

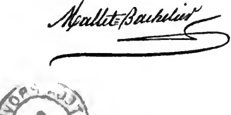

FONDO PROVINCIA

COURS

DE

MATHÉMATIQUES.







PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

COURS

DE

MATHÉMATIQUES

A L'USAGE

DES CANDIDATS A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES,

ET DE TOUS LES ÉLÈVES QUI SE DESTINENT AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT.

PAR CHARLES DE COMBEROUSSE,

INGÉNIEUR CIVIL,

Examinateur d'Admission à l'École Centrale des Arts et Manufactures, Répétiteur de Mécanique appliquée à la même École, Professeur de Mathématiques et de Mécanique au Collège Chaptal.

TOME DEUXIÈME.

GÉOMÉTRIE PLANE. — GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE. COMPLÉMENT DE GÉOMÉTRIE. TRIGONOMÉTRIE. — COMPLÉMENT D'ALGÈBRE.





PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS,

Quai des Augustins, 55.

1861





TABLE DES MATIÈRES.



GÉOMÉTRIE.



GÉOMÉTRIE PLANE.



LIVRE PREMIER.

LES LIGNES.

CHAPITRE PREMIER. — La Ligne droite.

CHAPITRE II. — La Circonférence de Cercle.

CHAPITRE III. — Les Lignes proportionnelles.

CHAPITRE IV. — MESURE DE LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

LIVRE DEUXIÈME.

LES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER. — MESURE DES AIRES.

CHAPITRE II. — RAPPORTS DES AIRES SEMBLABLES.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE TROISIÈME.

LES PLANS.

CHAPITRE PREMIER. — PROPRIÉTÉS DES PLANS.

LIVRE QUATRIÈME.

LES SURFACES ET LES VOLUMES DES CORPS.

COMPLÉMENT DE GÉOMÉTRIE.

TRIGONOMÉTRIE.

LIVRE PREMIER.

THÉORIE DES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES.

CHAPITRE III. — CONSTRUCTION ET USAGE DES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES.

LIVRE DEUXIÈME.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

CHAPITRE PREMIER. — FORMULES FONDAMENTALES.

CHAPITRE II. — RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES.

CHAPITRE III. — RÉSOLUTION DES TRIANGLES OBLIQUANGLES.

CHAPITRE IV. — EXERCICES ET APPLICATIONS.

LIVRE TROISIÈME.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE (*).

CHAPITRE PREMIER. — FORMULES FONDAMENTALES.

CHAPITRE II. — RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES RECTANGLES.

CHAPITRE III. — RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES OBLIQUANGLES.

CHAPITRE IV. — APPLICATIONS.

(*) La Trigonométrie *sphérique* n'est pas exigée des Candidats à l'École Centrale.

COMPLÉMENT D'ALGÈBRE (*).

LIVRE PREMIER.

EXTENSION DU CALCUL ALGÉBRIQUE.

(*) Cette section n'est pas exigée des Candidats à l'École Centrale; mais ils trouveront, dans le second et le quatrième Livre, une partie des matières qui leur sont enseignées à l'École, dans le Cours d'Analyse de première année.

LIVRE DEUXIÈME.

SÉRIES ET FONCTIONS DÉRIVÉES.

CHAPITRE PREMIER. — Notions sur les Séries.

CHAPITRE II. — Des Fonctions dérivées.

CHAPITRE III. — Étude des Variations des Fonctions, maximums et minimums.

CHAPITRE IV. — Retour a la Fonction primitive, applications.



LIVRE TROISIÈME.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS.

CHAPITRE PREMIER. — GÉNÉRALITÉS RELATIVES AUX VARIATIONS D'UNE FONCTION ENTIÈRE — COMPOSITION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

CHAPITRE II. — TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS. — LIMITES DES RACINES.

CHAPITRE III. — THÉORÈME DE DESCARTES.

CHAPITRE IV. — RECHERCHE DES RACINES COMMENSURABLES.

CHAPITRE V. — RECHERCHE DES RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS. — THÉORIE DES RACINES ÉGALES.

CHAPITRE VI. — THÉORÈME DE ROLLE. — RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.



NOTES.

ERRATA.

Page 23, *ajoutez* à la fin du n° 43 : le point O est appelé *centre* du parallélogramme. Toute droite limitée de part et d'autre au parallélogramme, et passant par ce point, y est divisée en deux parties égales et partage le parallélogramme en deux trapèzes égaux.

Page 58, ligne 10, *après* ils sont *inversement* placés, *ajoutez :* dans le premier cas, la similitude est *directe :* dans le second, elle est *inverse.*

Page 319, ligne 7, *après* de la droite, *intercalez :* dans le sens de la partie positive de l'axe.

Page 408, ligne 8, *après* ne change pas, *intercalez :* si l'on veut rendre la formule obtenue calculable par logarithmes, on posera

$$\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b = \sin C\cot x, \quad \text{d'où} \quad \cot\frac{1}{2}\Delta = \frac{\sin(C+x)}{\sin C\sin x}.$$

Page 430, ligne 5, *au lieu de* $QR' - RQ' = 1$, *lisez* $QR' - RQ' = \mp 1$.

COURS

DE

MATHÉMATIQUES.

GÉOMÉTRIE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE PREMIER.

LES LIGNES.

CHAPITRE PREMIER.

LA LIGNE DROITE.

Notions préliminaires.

1. On appelle *volume* d'un corps l'espace ou la portion d'espace qu'il occupe.

La géométrie fait abstraction de toutes les propriétés des corps : elle ne considère que leur *étendue*. Ils n'ont plus ni *impénétrabilité*, ni *porosité*, ni *élasticité*, ni *pesanteur*, etc. C'est comme si l'on pouvait plonger les corps dans une atmosphère assez dense pour en conserver l'empreinte : la géométrie ne raisonne que sur cette empreinte. Nous ne dirons donc jamais que nous voulons calculer la *solidité* d'un corps, mais bien son volume.

2. Pour fixer les idées, considérons un *parallélipipède rectangle* (un livre quelconque a une pareille forme). Si sa *hauteur* devient très-petite, de manière à pouvoir être négligée à côté des deux autres *dimensions*, on passera, lorsque la hauteur sera devenue aussi petite qu'on peut le supposer, de l'idée de volume à l'idée de *surface*.

On voit que les volumes des corps sont séparés de l'espace environnant par des *surfaces*.

De même, si l'on considère un *rectangle*, et si l'on suppose que sa *base* devienne très-petite, de manière à pouvoir être négligée à côté de sa *hauteur*, on passera, lorsque la base sera devenue aussi petite qu'on peut le supposer, de l'idée de surface à l'idée de *ligne*.

On voit que les surfaces sont limitées par les *lignes*, comme les volumes le sont par les surfaces.

Enfin, étant donnée une ligne quelconque, si sa longueur diminue de manière à devenir plus petite que tout ce qu'on voudra, on passera de l'idée de ligne à l'idée de *point*. Un point indique seulement une position dans l'espace.

La *génération* des éléments géométriques aura lieu en sens inverse. Le point, dans son mouvement, engendre une ligne ; la ligne, dans son mouvement, engendre une surface ; la surface, dans son mouvement, engendre un volume.

Deux lignes se *coupent* suivant un point, deux surfaces suivant une ligne; deux volumes se coupent ou se pénètrent suivant une surface.

3. La plus simple de toutes les lignes est la *ligne droite*. *Elle est décrite par un point qui, dans son mouvement, tend constamment vers un seul et même point.*

Il en résulte immédiatement que le plus court chemin d'un point A à un point B est la ligne droite AB menée entre ces deux points (*fig.* 1). Il en résulte aussi que deux points suffisent pour déterminer une droite : dès lors, deux droites AB et CD qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue, c'est-à-dire quelque loin qu'on les suppose prolongées vers la droite ou vers la gauche.

Fig. 1.

Une ligne brisée est décrite par un point qui, dans son mouvement, change de temps en temps de direction. Ce point décrit alors (*fig.* 2) des portions de lignes droites AB, BC, CD, dont les directions varient et qui ont pour points communs successifs les points B, C, où le changement de direction s'opère.

Fig. 2.

Une ligne courbe est décrite par le mouvement d'un point qui change à chaque instant de direction. On peut la regarder alors comme une ligne brisée composée d'une infinité d'éléments rectilignes

Fig. 3.

infiniment petits (*fig.* 3). Et cette définition est importante en ce qu'elle permet d'étendre immédiatement, avec Leibnitz, toutes les propriétés des lignes brisées aux lignes courbes, lorsque ces propriétés ne dépendent ni de la grandeur ni du nombre des côtés de la ligne brisée.

4. On entend par *surface plane* ou *plan* une surface telle, que, dès qu'une ligne droite y a deux points, elle y est contenue tout entière. Nous prouverons plus loin que deux plans *coïncident* dès qu'ils ont trois points communs.

On divise la géométrie en géométrie *plane* et géométrie *dans l'espace*. La géométrie plane traite des figures qu'on peut tracer sur un plan ; la géométrie dans l'espace traite des figures dont les éléments sont disposés d'une manière quelconque.

5. Deux figures qui peuvent se superposer ou pénétrer exactement l'une dans l'autre, c'est-à-dire deux figures qui peuvent coïncider, sont dites *égales*. Deux longueurs qui renferment le même nombre d'unités de longueur, deux surfaces qui renferment le même nombre d'unités superficielles, deux volumes qui renferment le même nombre d'unités de volume, sans que leur coïncidence soit possible, sont dits *équivalents*.

6. *Le but de la géométrie est la mesure de l'étendue.* Mais il est utile de préciser cette définition.

On ne peut mesurer *directement* que les lignes droites, en portant sur celles qu'on considère l'unité de longueur autant de fois que possible. Et encore cette mesure directe n'est pas possible dans un très-grand nombre de cas (*distance d'un point à un point inaccessible, distance de deux points inaccessibles, etc.*). On ne peut pas mesurer directement les lignes courbes. Il en est de même pour les surfaces et les volumes ; on ramène leur évaluation à celle de certaines lignes droites qui ont une liaison déterminée avec la surface ou le volume considéré.

Si l'on veut donner une idée juste de la géométrie, il faut donc dire que *la géométrie a pour but de mesurer l'étendue, en ramenant toutes les mesures quelconques à la mesure directe de certaines lignes droites choisies convenablement dans chaque cas.* Toutes les propriétés démontrées successivement dans un Traité de Géométrie concourent au but que nous indiquons.

7. Toute proposition consiste dans une *hypothèse* et une *conclusion* qui en découle. La démonstration de la proposition est la suite des raisonnements qu'il faut faire pour passer de

l'hypothèse à la conclusion, en s'appuyant sur des vérités évidentes ou déjà démontrées.

Une proposition étant donnée, si l'on adopte à la fois une hypothèse contraire et une conclusion contraire, on énoncera la proposition *contraire*. On énoncera la proposition *réciproque*, en prenant la conclusion pour hypothèse et l'hypothèse pour conclusion.

Ainsi, proposition directe : *tous les angles droits sont égaux ;* proposition contraire : *tous les angles qui ne sont pas droits ne sont pas égaux ;* proposition réciproque : *tous les angles égaux sont droits.*

Comme le prouve l'exemple choisi, la proposition contraire et la proposition réciproque sont souvent fausses, parce que la conclusion de la proposition directe répond souvent à un plus grand nombre de cas que l'hypothèse.

La proposition directe, la proposition contraire et leurs propositions réciproques sont tellement liées, que, les deux premières étant vraies, leurs réciproques le sont. Par exemple, élevant une perpendiculaire sur le milieu d'une droite, on démontre que tous ses points sont également éloignés des extrémités de la droite, et que tous les points qui ne lui appartiennent pas dans le plan considéré, sont inégalement distants de ces mêmes extrémités. On en conclut alors immédiatement que tous les points également éloignés sont sur la perpendiculaire, et que tous les points inégalement éloignés sont hors de la perpendiculaire.

8. Le mot *axiome* signifie proposition évidente par elle-même. Un *théorème* est une proposition qui doit être démontrée. Le mot *problème* s'explique de lui-même. Un *lemme* est une proposition préliminaire facilitant la démonstration d'un théorème. Un *corollaire* est une conséquence immédiate d'un théorème. Le *scolie* est une remarque sur un ou plusieurs théorèmes.

I. — Mesure et rapport des lignes droites.

9. Nous savons par l'arithmétique ce qu'on doit entendre par le mot *unité* et ce que c'est que mesurer une grandeur.

Mesurer la grandeur d'une ligne droite, c'est la comparer à une autre droite prise pour unité.

Si la droite qu'on veut mesurer surpasse le mètre, on porte le mètre sur sa direction autant de fois que possible ; supposons qu'il y soit contenu 5 fois, plus un reste inférieur au mètre. On cherchera combien ce reste contient de décimètres ; supposons qu'il en contienne 5, plus un reste inférieur au décimètre. On mesurera ce nouveau reste à l'aide du centi-

mètre et, s'il en contient exactement 9, on dira que la droite considérée est une longueur de $5^{m},59$.

Si la droite donnée est plus petite que le mètre, on emploiera immédiatement comme unité le décimètre ou le centimètre, etc.

Pour comparer deux grandeurs, il faut former le rapport des nombres qui les représentent : il faut donc chercher d'abord si ces grandeurs contiennent exactement une même unité, si elles ont une commune mesure.

Deux lignes droites étant données, on trouve *leur plus grande commune mesure* en opérant sur ces droites absolument comme on opère sur deux nombres pour trouver leur plus grand commun diviseur. On porte donc la plus petite droite sur la plus grande autant de fois que possible, le reste obtenu sur la plus petite droite, le second reste sur le premier, etc. L'opération est terminée lorsqu'on arrive à un reste contenu exactement dans le reste précédent. Ce dernier reste est la plus grande commune mesure cherchée.

Désignons, par exemple, par A et B les deux droites données, par R, R′, R″, les restes successivement trouvés. Supposons que les résultats des opérations soient représentés par les égalités suivantes :

$$A = 3B + R,\quad B = 5R + R',\quad R = 2R' + R'',\quad R' = 7R''.$$

On en déduira facilement

$$R = 15R'',\quad B = 82R'',\quad A = 261R''.$$

On en conclura donc, pour le rapport de A à B,

$$\frac{A}{B} = \frac{261\,R''}{82\,R''} = \frac{261}{82}.$$

On peut remarquer que l'expression fractionnaire obtenue doit être irréductible. Si 261 et 82 admettaient par exemple le facteur commun 5, A et B seraient divisibles par 5 R″ : R″ ne serait donc plus leur plus grande commune mesure.

Il peut se faire que les deux droites considérées n'aient pas de commune mesure, qu'elles soient incommensurables. En cherchant leur plus grande commune mesure, on n'arrivera alors jamais à un reste nul, du moins théoriquement; car les restes successifs formant une suite décroissante, finissent bientôt, en vertu de leur petitesse, par échapper à tous nos moyens d'appréciation.

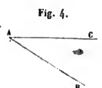
On peut néanmoins trouver le rapport incommensurable de deux droites données, avec telle approximation qu'on veut. Supposons que les droites A et B n'aient pas de commune mesure et qu'on demande l'expression de leur rapport à 0,001

près. On divisera B en 1000 parties égales : nous désignerons l'une de ces parties par a. On portera a sur A autant de fois que possible : supposons que A tombe entre $7815a$ et $7816a$. Le rapport $\frac{A}{B}$ tombera évidemment entre $\frac{7815a}{1000a}$ et $\frac{7816a}{1000a}$, c'est-à-dire entre 7,815 et 7,816 : le premier nombre représentera le rapport cherché à 0,001 près par défaut ; le second, à 0,001 près par excès.

II. — Des angles.

10. Lorsque deux droites AB et AC partent d'un même point A en suivant des directions différentes, elles forment un *angle* (*fig.* 4). Le point A est le *sommet* de l'angle, les droites AB et AC, prolongées aussi loin qu'on voudra, en sont les *côtés*.

Fig. 4.

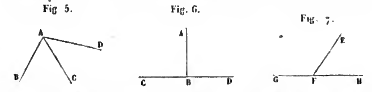


Pour avoir une idée exacte de la *grandeur* d'un angle, il faut supposer que le côté AB, par exemple, était d'abord couché sur le côté AC; puis qu'il s'en est éloigné en tournant autour du sommet A, pour venir prendre la position qu'il occupe. L'amplitude de ce mouvement de rotation correspond à la grandeur de l'angle.

On désigne un angle par la lettre placée à son sommet : on dira l'angle A. Lorsque plusieurs angles ont même sommet, on les distingue en lisant en outre deux lettres placées sur leurs côtés; on a soin d'énoncer au milieu la lettre du sommet : on dira l'angle BAC.

11. Deux angles sont *adjacents*, lorsque, ayant un sommet commun et un côté commun, les côtés non communs sont

Fig 5. Fig. 6. Fig. 7.



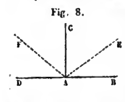
situés de part et d'autre de ce côté commun. Les angles BAC, CAD (*fig.* 5), sont adjacents. Lorsque deux droites se coupent, elles forment deux angles adjacents : lorsque ces angles adjacents sont égaux, la première droite est dite *perpendiculaire* sur la seconde; elle est dite *oblique* dans le cas contraire. La droite AB (*fig.* 6) est perpendiculaire sur la droite CD, parce que les angles adjacents CBA, DBA, sont égaux. La droite EF (*fig.* 7) est oblique sur la droite GH, parce que les angles adjacents GFE, HFE, sont inégaux. Le point B est le

pied de la perpendiculaire, le point F est le pied de l'oblique. Les angles adjacents égaux CBA, DBA, sont appelés *droits*. Un angle droit est un angle dont l'un des côtés est perpendiculaire sur l'autre.

12. *Par un point pris sur une droite, on peut toujours lui élever une perpendiculaire, mais une seule.*

Par le point A de la droite DB, menons une droite quelconque AE. Si les angles BAE, DAE, sont égaux, AE sera perpendiculaire sur DB. S'il n'en est pas ainsi, supposons que BAE soit le plus petit des deux angles. Faisons alors tourner la ligne AE autour du point A jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec AD. Dans ce mouvement, l'angle BAE croît d'une manière continue, tandis que l'angle DAE décroît d'une manière continue jusqu'à devenir nul. L'angle BAE, d'abord plus petit que l'angle DAE, doit donc devenir plus grand comme l'indique la seconde position AF de AE, marquée sur la figure (*fig.* 8). Il y a donc nécessairement un instant, et cet instant est unique, où les deux angles sont égaux. Avant cet instant, les deux angles n'étaient pas encore égaux; après, ils ne le sont plus. Si l'on suppose que AE occupe la position AC, lorsque les deux angles adjacents sont égaux, on voit que AC est la seule perpendiculaire qu'on puisse élever au point A sur DB.

Fig. 8.



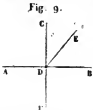
Tous les angles droits sont égaux; sans quoi on pourrait mener deux perpendiculaires en un même point d'une même droite.

Un angle *aigu* est un angle plus petit qu'un angle droit, un angle *obtus* est un angle plus grand qu'un angle droit : l'angle DAF est aigu, l'angle BAF est obtus.

13. Lorsque la somme de deux angles est égale à un angle droit, ces angles sont appelés *complémentaires;* lorsque la somme de deux angles est égale à deux angles droits, ces angles sont appelés *supplémentaires.*

Les angles adjacents formés par deux droites qui se coupent sont supplémentaires (*fig.* 9).

Fig. 9.



Soient les angles BDE, EDA. J'élève au point D la perpendiculaire DC sur AB. L'angle aigu BDE est inférieur à un angle droit de l'angle CDE; l'angle obtus ADE est supérieur à un angle droit du même angle CDE. La somme des angles BDE, ADE, est donc égale à deux angles droits.

Il résulte de cette démonstration que *la somme de tous les angles qu'on peut former autour d'un même*

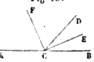
point D *et au-dessus d'une même droite* AB, *est toujours égale à deux angles droits.*

Lorsque deux droites qui se coupent sont prolongées toutes deux au delà du point d'intersection, elles forment quatre angles : c'est ce que montre la figure, lorsqu'on considère les droites AB et CF. Ce qui précède prouve alors que *l'un de ces quatre angles étant droit, les trois autres le sont.* Par conséquent, *si* CD *est perpendiculaire sur* AB, AB *l'est à son tour sur* CD.

La somme de tous les angles qu'on peut former autour d'un même point, est égale à quatre angles droits. On n'a, pour s'en assurer, qu'à mener par le point donné deux droites perpendiculaires entre elles et indéfiniment prolongées.

Lorsque deux angles adjacents sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs, c'est-à-dire leurs côtés non communs, sont en ligne droite. Cette réciproque de la proposition précédente est évidente. Si les deux angles ADE, EDB (*fig.* 9) sont supplémentaires, les côtés AD et DB sont en ligne droite ; car le prolongement de AD détermine précisément le supplément de l'angle ADE.

La bissectrice d'un angle est la ligne qui, menée par le sommet de cet angle, le partage en deux angles égaux. *Les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires sont à angle droit* (*fig.* 10).



Soient les deux angles supplémentaires ACD, DCB, soient CF et CE les bissectrices de ces angles. L'angle FCD est la moitié de l'angle ACD, l'angle DCE est la moitié de l'angle DCB. L'angle FCE sera donc la moitié de la somme des angles ACD et DCE ou la moitié de deux angles droits.

14. Deux angles *opposés par le sommet* sont tels, que les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

Les angles opposés par le sommet sont égaux. Soient les deux droites BD, EF (*fig.* 11), je dis que les angles BAE, FAD, sont égaux. En effet, ces deux angles ont pour supplément le même angle DAE. On prouverait de même que les angles DAE, FAB sont égaux.



Réciproquement, *si les angles* BAE, FAD *sont égaux, ainsi que les angles* DAE, FAB, *les trois points* B, A, D, *seront en ligne droite ainsi que les trois points* F, A, E. En effet, la somme des angles formés autour du point A étant toujours égale à quatre droits (13), la somme des angles BAE et DAE,

qui est la moitié de la somme des angles considérés, sera égale à deux angles droits; ces angles étant dans la position d'adjacents, leurs côtés extérieurs BA et AD seront en ligne droite. On démontrera de même que FAE est une seule et même ligne droite.

Les bissectrices des angles opposés par le sommet sont en prolongement l'une de l'autre (fig. 12).

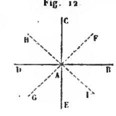


Fig. 12

En effet, CA est perpendiculaire sur AD, parce que ces droites sont bissectrices d'angles supplémentaires (13); AE est perpendiculaire sur AD pour la même raison. Il en résulte que AC et AE sont en prolongement (12). On prouvera de même que AD et AB sont en prolongement.

III. — Des triangles.

15. On appelle *triangle* la figure formée par trois droites qui se coupent deux à deux. Les portions ainsi limitées de ces droites sont les *côtés* du triangle, les angles qu'elles forment deux à deux sont les *angles* du triangle, leurs points d'intersection en sont les *sommets*.

Dans tout triangle, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence (fig. 13).

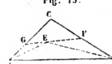


Fig. 13.

La ligne droite entre deux points étant le plus court chemin entre ces points, on a immédiatement

$$AB < AC + CB.$$

De cette inégalité, on déduit

$$CB > AB - AC.$$

On voit que trois longueurs prises au hasard ne peuvent pas toujours former les trois côtés d'un triangle.

Si l'on prend un point E *dans l'intérieur du triangle* ABC *et si l'on mène les droites* EA, EB, *la somme de ces droites sera plus petite que la somme des côtés* AC, CB.

Menons par le point E une droite GF qui coupe les deux côtés CA, CB : on aura

$$GF < CG + CF.$$

On aura aussi $EA < EG + GA$, $EB < EF + FB$. On en déduit $EA + EB < GF + GA + FB$. Si l'on remplace alors GF par la quantité plus grande $CG + CF$, on aura à fortiori

$$EA + EB < CA + CB.$$

16. Il y a considérer dans un triangle six éléments : trois côtés et trois angles. Il suffit que trois de ces éléments soient égaux dans deux triangles, pour que ces triangles soient égaux : il faut seulement que parmi ces éléments égaux il entre au moins un côté. Nous aurons donc à démontrer les trois cas d'égalité suivants :

17. 1° *Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun* (*fig.* 14).

Supposons que l'angle C′ soit égal à l'angle C et qu'on ait A′C′ = AC, C′B′ = CB. L'égalité géométrique, c'est, comme nous l'avons déjà dit, la coïncidence possible. Les deux angles C′ et C étant égaux, on pourra porter le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de manière que ces angles coïncident. Les droites A′C′ et AC, C′B′ et CB, auront alors la même direction, et comme on a A′C′ = AC et C′B′ = CB, les sommets A et A′, B et B′, coïncideront. Les deux triangles considérés ayant mêmes sommets se recouvriront parfaitement et seront égaux.

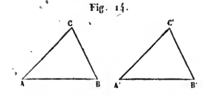


Fig. 14.

18. 2° *Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun* (*fig.* 14).

Supposons qu'on ait AB = A′B′, et que les angles A et A′, B et B′, soient égaux. On pourra porter le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de manière que A′B′ coïncide avec AB; si les deux triangles tombent alors dans le même sens par rapport au côté commun, A′C′ prendra la direction de AC, puisque l'angle A égale l'angle A′; B′C′ prendra la direction de BC, puisque l'angle B égale l'angle B′. Le point d'intersection C′ des côtés A′C′ et B′C′ coïncidera donc avec le point d'intersection C des côtés AC et BC. Les deux triangles considérés ayant mêmes sommets se recouvriront parfaitement et seront égaux.

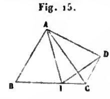
19. 3° *Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun.*

Pour démontrer ce théorème, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

Lorsque deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant des angles inégaux, les troisièmes côtés sont inégaux, et le plus grand est opposé au plus grand angle (*fig.* 15).

On peut toujours placer les deux triangles proposés de manière qu'ils aient le côté commun AC et que les deux autres côtés AB = AD tombent de part et d'autre de ce côté commun. Supposons l'angle BAC plus grand que l'angle CAD, il faut prouver que le côté BC est plus grand que le côté CD. Pour cela, je mène la bissectrice AI de l'angle total BAD : elle sera dans le plus grand angle BAC et coupera BC au point I. Joignons ID. Les deux triangles BAI, IAD, seront égaux d'après le premier cas d'égalité (17), et l'on en conclura BI = ID. Le triangle ICD donne d'ailleurs $CD < IC + ID$, c'est-à-dire $CD < IC + IB$ ou que BC.

Fig. 15.



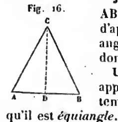
Revenons au théorème proposé et à la *fig.* 14. Supposons qu'on ait, dans les deux triangles ABC, A′B′C′, AB = A′B′, AC = A′C′, BC = B′C′. Il faut nécessairement que l'angle C soit égal à l'angle C′, sans quoi AB ne serait pas égal à A′B′ d'après le lemme précédent. On rentre donc dans le premier cas d'égalité (17), et les triangles proposés sont bien égaux.

On peut remarquer, d'après les propositions qu'on vient d'établir, que lorsque deux triangles sont égaux, les côtés égaux sont toujours opposés à des angles égaux, et réciproquement.

20. On entend par triangle *isocèle* un triangle qui a deux côtés égaux. La *base* d'un triangle isocèle est le côté qui n'a pas d'égal. La perpendiculaire abaissée du sommet opposé sur la base est la hauteur du triangle.

Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux (*fig.* 16).

Fig. 16.



Je joins le sommet C au milieu de la base AB : les deux triangles ACD, DCB, sont égaux d'après le troisième cas d'égalité (19) : les angles A et B opposés au côté commun CD sont donc égaux.

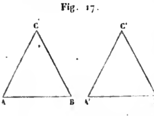
Un triangle qui a tous ses côtés égaux est appelé *équilatéral*. On voit qu'il a en même temps ses trois angles égaux, c'est-à-dire qu'il est *équiangle*.

L'égalité des triangles ACD, DCB, prouve que la droite CD est la bissectrice de l'angle C, et qu'elle est perpendiculaire sur le milieu de AB. La droite CD remplit donc quatre *conditions :* elle passe par le sommet C, par le milieu D de la base AB, elle est la hauteur du triangle isocèle, elle est la bissectrice de l'angle au sommet. Deux *points* ou deux *conditions* suffisant pour

déterminer une droite, dès qu'une droite remplira deux des quatre conditions énoncées, elle remplira nécessairement les deux autres.

21. *Lorsqu'un triangle a deux angles égaux, il est isocèle, et les côtés égaux sont opposés aux angles égaux.*

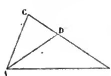
Soit le triangle ABC dans lequel l'angle A est égal à l'angle B; soit un triangle A'B'C', reproduction du triangle ABC (*fig.* 17). Je porte le triangle A'B'C' *retourné* sur le triangle ABC. Le point B' tombera au point A, le point A' au point B. L'angle B' égal à l'angle A' coïncidera avec l'angle A, l'angle A' égal à l'angle B' coïncidera avec l'angle B; le point C' viendra donc au point C, et les deux triangles coïncideront malgré le renversement du triangle A'B'C'. Le côté B'C' égal à BC se confondant alors avec le côté AC, on en conclut AC = BC.



Un triangle équiangle est nécessairement équilatéral.

22. *Dans un triangle, à un plus grand angle est opposé un plus grand côté* (*fig.* 18)

Soit le triangle ABC. Je suppose l'angle A plus grand que l'angle B, je dis que le côté CB sera plus grand que le côté CA.



Je fais, dans l'angle A, un angle DAB égal à l'angle B : le triangle DAB sera isocèle, et l'on aura AD = DB. Le triangle DAC donne AD + DC > CA. Si l'on remplace AD par son égal DB, il vient DB + DC > CA ou CB > CA.

En rapprochant les théorèmes précédents, on voit que deux côtés d'un triangle ont toujours entre eux la même relation que les angles qui leur sont opposés.

IV. — Des perpendiculaires et des obliques.

23. *Par un point pris hors d'une droite, on peut lui mener une perpendiculaire, mais une seule.*

Soit (*fig.* 19) le point O par lequel je veux mener une perpendiculaire à la droite AB. Je fais tourner la partie supérieure du plan autour de AB jusqu'à ce qu'elle vienne se rabattre sur la partie inférieure, je marque la position O' alors occupée par le point O. Je relève le plan, et je joins les points O et O' ; OO' est la perpendiculaire demandée; car un nou-

veau rabattement entraînerait la coïncidence des angles adjacents ACO et ACO′ c'est-à-dire prouverait leur égalité.

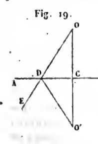


Fig. 19.

Soit une autre droite quelconque ODE, je dis qu'elle est *oblique* à AB. En effet, les deux triangles OCD, O′CD, sont égaux d'après le premier cas d'égalité (17) : les deux angles ODC, O′DC, sont donc égaux. Mais l'angle O′DC est évidemment plus petit que l'angle EDC : son égal ODC sera donc plus petit que l'angle ADO qui est opposé par le sommet à l'angle EDC. OD faisant avec AB des angles inégaux, est oblique à AB.

Une droite OD étant oblique à AB, toute perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de OD sur AB sera située dans l'angle aigu formé par OD avec AB : si la perpendiculaire à AB est élevée au point D, elle sera au contraire dans l'angle obtus formé par OD avec AB.

24. *Si d'un point pris hors d'une droite partent une perpendiculaire et plusieurs obliques à cette droite, la perpendiculaire est la plus courte distance du point à la droite; deux obliques également éloignées de la perpendiculaire sont égales; de deux obliques inégalement distantes de la perpendiculaire, la plus éloignée est la plus grande* (*fig.* 20).

Soient le point O et la droite AB, considérons la perpendiculaire OC et l'oblique quelconque OD. La perpendiculaire

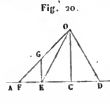


Fig. 20.

tombera dans l'angle aigu formé par OD avec AB (23), c'est-à-dire que si l'on compare dans le triangle OCD les côtés OC et OD, OC opposé au plus petit angle sera le plus petit côté (22). La plus courte distance du point O à la droite AB est donc la perpendiculaire OC.

On dit que deux obliques telles que OD et OE sont également éloignées de la perpendiculaire OC, lorsque leurs *pieds* D et E sont également éloignés du *pied* C de la perpendiculaire. Ces obliques sont nécessairement égales d'après l'égalité des triangles OCD, OCE.

Soient enfin les deux obliques OD et OF inégalement éloignées de la perpendiculaire, parce qu'on a $CF > CD$. On pourra prendre $CE = CD$, il en résultera $OE = OD$, et il restera à comparer OE et OF. Pour cela, j'élève au point E une perpendiculaire à AB : elle sera située dans l'angle obtus OEA (23) et dès lors coupera OF au point G. Le triangle OGE donnera $OE < EG + GO$, et à plus forte raison $OE < FG + GO$, puisque

EG est une perpendiculaire et FG une oblique à AB. On aura donc OE < OF, c'est-à-dire OD < OF.

Les réciproques de ces propositions sont évidentes. En particulier, lorsqu'une droite OC est *la plus courte distance* du point O à la droite AB, elle est *perpendiculaire* sur AB.

25. *Le lieu géométrique de tous les points d'un plan à égale distance des extrémités d'une droite, est la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite* (*fig.* 21).

On entend par *lieu géométrique* une série de points jouissant d'une certaine propriété commune, à l'exclusion de tous les autres points du plan.

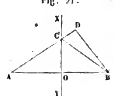


Fig. 21.

Soit la droite XY perpendiculaire sur le milieu de AB. Je prends un point C quelconque sur XY, et je le joins aux points A et B. Les obliques CA et CB seront égales, comme également éloignées de la perpendiculaire (24).

Je prends un point D quelconque hors de XY, et je le joins aux points A et B. DA coupera XY au point C, et d'après la remarque qui précède, on aura $CA = CB$. Le triangle DCB donne d'ailleurs $DB < DC + CB$, c'est-à-dire $DB < DC + CA$ ou $DB < DA$.

Les points pris sur la perpendiculaire sont également distants des extrémités A et B; les points pris hors de la perpendiculaire sont inégalement distants des mêmes extrémités : la perpendiculaire XY constitue donc bien le lieu géométrique indiqué.

Deux points suffisant pour déterminer une droite, dès qu'une droite XY aura deux de ses points à égale distance des extrémités d'une droite AB, elle sera perpendiculaire sur le milieu de AB.

26. On entend par triangle *rectangle* un triangle dans lequel il y a un angle droit : le côté opposé à l'angle droit est l'*hypoténuse* du triangle. Les cas spéciaux d'égalité des triangles rectangles sont les suivants.

1° *Deux triangles rectangles sont égaux, lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.*

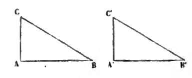


Fig. 22.

Soient les deux triangles rectangles ABC, A′B′C′ (*fig.* 22), dans lesquels on a $BC = B'C'$ et l'angle B égal à l'angle B′. Je por-

terai les deux triangles l'un sur l'autre, de manière que B'C' coïncide avec BC; en vertu de l'égalité des angles B' et B, B'A' prendra la direction de BA, et le point A' tombera au point A; car les perpendiculaires abaissées des points C' et C, qui n'en font plus qu'un seul, sur les droites B'A' et BA qui coïncident, devront se confondre (23).

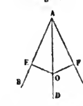
2° *Deux triangles rectangles sont égaux, lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal* (*fig.* 22).

Je suppose maintenant BC = B'C' et CA = C'A'. Je porte les deux triangles l'un sur l'autre, de manière que C'A' coïncide avec CA. L'angle A' étant égal à l'angle A, A'B' prendra alors la direction de AB et le point B' tombera au point B; car les obliques égales BC et B'C' doivent s'écarter également de la perpendiculaire CA.

27. *La bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points du plan à égale distance des côtés de l'angle.*

Soit l'angle BAC (*fig.* 23) et soit AD sa bissectrice. Prenons un point O quelconque sur cette bissectrice, et abaissons de ce point les perpendiculaires OE et OF sur les côtés AB et AC. Les deux triangles rectangles AOE, AOF, seront égaux (26, 1°), et l'on en déduira OE = OF: donc tous les points de la bissectrice sont également distants des côtés de l'angle.

Fig. 23.



Supposons maintenant que le point O soit un point du plan, tel, que les perpendiculaires OE et OF abaissées de ce point sur les côtés de l'angle soient égales. En joignant AO, on formera deux triangles rectangles AOE, AOF, qui seront égaux (26, 2°). On en déduira l'égalité des angles EAO, FAO, c'est-à-dire que AO se confondra avec la bissectrice de l'angle BAC: donc tous les points également distants des côtés de l'angle sont sur la bissectrice.

La bissectrice de l'angle est donc bien le lieu géométrique indiqué.

V. — Des parallèles.

28. Lorsque deux droites *situées dans un même plan* ne se rencontrent pas, si loin qu'on les prolonge, on dit qu'elles sont *parallèles*.

Fig. 24.

E G L M D F

Deux droites, DE, FG, perpendiculaires à une même droite LM (*fig.* 24), sont parallèles; car d'un point pris hors d'une droite, on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire sur cette droite.

Si l'on veut, par le point L, mener une parallèle à la droite FG, on abaissera donc LM perpendiculaire

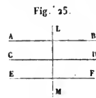
sur FG et, par le point L, on mènera DE perpendiculaire sur LM.

Nous admettrons comme évident que, par un point pris hors d'une droite, on ne peut lui mener qu'une parallèle. Il en résulte que, si une droite en rencontre une autre, elle rencontre aussi toutes les parallèles à cette autre.

29. *Lorsque deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

Soient les parallèles DE, FG (*fig.* 24). Soit LM perpendiculaire sur FG. Si l'on menait au point L une perpendiculaire à LM, cette perpendiculaire serait parallèle à FG : elle se confondra donc nécessairement avec la parallèle DE (28).

Fig. 25.



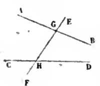
Il résulte de ce que nous venons de dire, que *deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

Soient (*fig:* 25) les deux droites AB et CD, parallèles à la même droite EF. Soit LM perpendiculaire à EF : les deux droites AB et CD seront aussi perpendiculaires à LM, et dès lors parallèles.

30. Lorsqu'une sécante rencontre deux droites quelconques, elle forme avec ces deux droites huit angles auxquels on a donné des noms particuliers.

Soient les deux droites AB, CD, et la sécante EF (*fig.* 26) : quatre angles seront formés autour du point G, quatre autour du point H.

Fig. 26.



Les angles compris entre les droites AB et CD sont des angles *internes*, les angles extérieurs à ces droites sont des angles *externes*.

Les angles internes non adjacents situés de part et d'autre de la sécante sont des angles *alternes-internes :* par exemple, les angles AGH, DHG.

Les angles externes non adjacents situés de part et d'autre de la sécante sont des angles *alternes-externes :* par exemple, les angles AGE, DHF.

Deux angles situés d'un même côté de la sécante, l'un interne, l'autre externe, mais non adjacents, sont des angles *internes-externes* ou *correspondants :* par exemple, les angles BGH, DHF.

Les angles tels que BGH, DHG, sont des angles *internes d'un même côté ;* les angles tels que BGE, DHF, sont des angles *externes d'un même côté.*

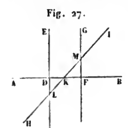
Lorsque les deux droites AB et CD sont parallèles, les angles

formés par ces droites avec la sécante EF jouissent de propriétés importantes.

31. *Lorsque deux parallèles sont rencontrées par une sécante, les quatre angles aigus formés sont égaux entre eux, ainsi que les quatre angles obtus (fig. 27).*

Soient L et M les points d'intersection de la sécante HI avec les parallèles ED et GF. Par le point K, *milieu* de LM, je mène AB perpendiculaire sur ED et sur GF. Les deux triangles rectangles KDL, KFM, sont égaux (26, 1°) : il en résulte l'égalité des angles KLD, KMF. Par conséquent, les angles aigus en L étant égaux comme opposés par le sommet, ainsi que les angles aigus en M, les quatre angles aigus formés autour des points L et M sont égaux entre eux. Les quatre angles obtus formés autour des mêmes points sont aussi égaux entre eux, comme suppléments des angles aigus.

Fig. 27.



Si nous remarquons maintenant que deux angles alternes-internes, alternes-externes ou correspondants, sont à la fois aigus ou obtus, tandis que deux angles internes d'un même côté ou externes d'un même côté sont l'un aigu et l'autre obtus ; nous pourrons dire que, lorsque deux parallèles sont rencontrées par une sécante :

1° *Les angles alternes-internes, les angles alternes-externes, les angles correspondants, sont égaux ;*

2° *Les angles internes d'un même côté, les angles externes d'un même côté, sont supplémentaires.*

32. La *réciproque* de cette proposition est vraie.

Supposons, par exemple (*fig.* 27), que les angles alternes-internes ELM, LMF, soient égaux ; je dis que les droites ED et GF seront parallèles. En effet, si l'on menait par le point L une parallèle à GF, elle ferait avec LM un angle égal à l'angle LMF : la droite ED, remplissant déjà cette condition, n'est autre que la parallèle indiquée.

On démontrerait d'une manière identique les autres parties de la réciproque.

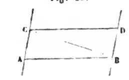
33. Les propositions contraires des deux précédentes sont vraies. En particulier, *lorsque deux droites font avec une sécante deux angles internes d'un même côté dont la somme est inférieure à deux angles droits, elles se rencontrent.* Ainsi, une perpendiculaire et une oblique à une même droite se rencontrent toujours lorsqu'on les suppose suffisamment prolon-

gées. C'est là le *postulatum* sur lequel Euclide base la théorie des parallèles. Nous avons remplacé la *demande* d'Euclide par celle-ci : *Par un même point, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite* (28).

34. *Les portions de parallèles comprises entre deux droites parallèles sont égales* (*fig.* 28).

Soient les parallèles AC et BD coupées par les parallèles AB et CD. Joignons les points C et B. Les deux triangles ACB et CBD seront égaux d'après le second cas d'égalité (18) : on en déduira AC=BD, on aura de même AB=CD.

Fig. 28.

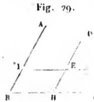


Si les droites AC et BD étaient perpendiculaires aux droites AB et CD, elles seraient toujours parallèles; mais elles mesureraient alors les distances de deux points quelconques de la droite AB à sa parallèle CD : il en résulte que *deux droites parallèles sont partout également distantes.*

35. *Deux angles qui ont leurs côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires* (*fig.* 29).

Soient d'abord les angles ABC, DEF, qui ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens. Je prolonge DE jusqu'en H. Si l'on considère les parallèles AB, DH, et la sécante BC, les angles ABC et DHC sont égaux comme correspondants. Si l'on considère les parallèles EF, HC, et la sécante DH, les angles DHC et DEF sont égaux comme correspondants. Il en résulte l'égalité des angles ABC et DEF.

Fig. 29.



Soient maintenant les angles ABC et IEH qui ont leurs côtés parallèles, mais dirigés en sens contraires. Ces deux angles seront encore égaux, puisqu'en prolongeant les côtés de l'angle IEH, on obtiendra l'angle DEF égal à l'angle ABC.

Soient enfin les angles ABC et DEI : les deux côtés AB et DE sont parallèles et dirigés dans le même sens, les deux côtés BC et EI sont parallèles et dirigés en sens contraires. L'angle DEI étant le supplément de l'angle DEF, est aussi le supplément de l'angle ABC.

En résumé, lorsque deux angles ont leurs côtés parallèles, ils sont égaux lorsque ces côtés sont dirigés dans le même sens ou en sens contraires; ils sont supplémentaires, lorsqu'en les comparant, on trouve deux côtés dirigés dans le même sens et deux côtés dirigés en sens contraires.

36. *Deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, sont égaux ou supplémentaires.*

Soient les deux angles ABC et DEF (*fig.* 30) : AB est perpendiculaire à DE, BC est perpendiculaire à EF. Par le point B, je mène BL perpendiculaire à AB : BL sera parallèle à DE; par le point B, je mène BH perpendiculaire à BC, c'est-à-dire parallèle à EF. Les deux angles LBH et DEF seront égaux comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens. Mais les deux angles LBH et ABC sont égaux comme compléments du même angle HBA : les deux angles ABC et DEF sont donc égaux.

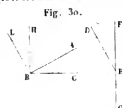


Fig. 30.

Si l'on avait considéré l'angle DEG, il aurait été le supplément de l'angle ABC.

37. *La somme des angles d'un triangle est toujours égale à deux angles droits* (*fig.* 31).

Soit le triangle ABC. Je prolonge le côté AB suivant AE, et je mène AD parallèle à BC. Considérons les trois angles formés autour du point A et au-dessus de la droite BE : la somme de ces trois angles est égale à deux angles droits (13). Le premier de ces angles est l'angle CAB du triangle; le second DAC est égal à l'angle C du triangle, car ces angles sont alternes-internes par rapport aux parallèles BC et AD et à la sécante AC; le troisième angle DAE est égal à l'angle B du triangle, car ces angles sont correspondants par rapport aux mêmes parallèles coupées par la sécante BE. La somme des angles du triangle est donc bien égale à deux angles droits.

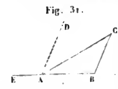


Fig. 31.

L'angle CAE formé par le côté AC et le prolongement AE du côté AB s'appelle angle *extérieur* du triangle ABC. *Un angle extérieur est égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.*

Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit ou obtus. Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.

Dans un triangle équilatéral, chaque angle vaut deux tiers d'angle droit.

Dans un triangle isocèle, la valeur d'un angle étant donnée, on connaît les deux autres angles.

Deux triangles sont équiangles chacun à chacun, lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et

deux angles égaux chacun à chacun, que ces angles soient ou non adjacents au côté égal.

VI. — Des polygones et, en particulier, des quadrilatères.

38. Toute ligne brisée qui se ferme d'elle-même est un *polygone*. Les différents côtés de la ligne brisée sont les *côtés* du polygone ; les angles formés par ces côtés et les sommets de ces angles sont les *angles* et les *sommets* du polygone. En joignant deux sommets non consécutifs, on a une *diagonale* du polygone. L'ensemble des côtés du polygone constitue son *contour* ou son *périmètre*.

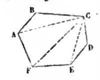
Un polygone de trois côtés est un *triangle*. Celui de quatre côtés s'appelle *quadrilatère*. Celui de cinq côtés s'appelle *pentagone*, celui de six s'appelle *hexagone*, celui de sept *heptagone*, celui de huit *octogone*, celui de neuf *ennéagone*, celui de dix *décagone*, celui de douze *dodécagone*, celui de quinze *pentédécagone*.

Un polygone est *convexe*, lorsqu'il tombe tout entier d'un même côté par rapport à chacun de ses côtés indéfiniment prolongés. Il est *concave* dans le cas contraire. Une droite quelconque ne peut couper le périmètre d'un polygone convexe qu'en deux points.

39. *La somme des angles d'un polygone convexe est toujours égale à autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux* (*fig.* 32).

Soit le polygone ABCDEF. En menant toutes les diagonales qui partent du sommet C, je le partage en triangles. Chacun de ces triangles emploie un côté du polygone, sauf les deux triangles extrêmes qui en emploient deux. Si n est le nombre des côtés du polygone, le nombre des triangles sera donc représenté par $n-2$. La somme des angles de tous les triangles est précisément la somme des angles du polygone, et la somme des angles de chaque triangle est égale à deux angles droits. La somme des angles du polygone sera donc, en prenant l'angle droit pour unité,

Fig. 32.



$$2(n-2) \quad \text{ou} \quad 2n-4.$$

Si l'on fait dans cette formule $n=4$, on trouve 4 pour la somme cherchée. *La somme des angles d'un quadrilatère est donc égale à quatre angles droits.*

La somme des angles qu'on forme à l'extérieur d'un polygone, en prolongeant successivement ses côtés dans le même

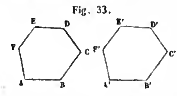
sens, est toujours égale à quatre angles droits. Car la somme des angles tant intérieurs qu'extérieurs, est égale à $2n$ angles droits, en désignant par n le nombre des sommets ou des côtés du polygone convexe considéré.

Il en résulte qu'un polygone convexe ne peut pas avoir plus de trois angles intérieurs qui soient aigus; sans quoi, il aurait plus de trois angles extérieurs obtus.

40. *Deux polygones de même espèce sont égaux, lorsque toutes leurs parties sont égales et disposées dans le même ordre, à l'exception de deux côtés consécutifs et de l'angle qu'ils forment* (*fig.* 33).

Soient les deux hexagones ABCDEF, A'B'C'D'E'F'. Je suppose égaux les angles A et A', B et B', C et C', D et D', E et E', ainsi que les côtés AB et A'B', BC et B'C', CD et C'D', DE et D'E'. Je porte les deux polygones l'un sur l'autre, de manière que les angles A et A' coïncident : A'F' prendra la direction de AF, A'B' et AB se confondront. L'angle B étant égal à l'angle B', le côté B'C' prendra alors la direction du côté BC, et comme il lui est égal, les sommets C' et C se confondront. Il en sera de même des sommets D et D', E et E'. L'angle E' étant égal à l'angle E, le côté E'F' prendra la direction du côté EF, et le sommet F' devant se trouver à la fois sur les côtés EF et AF tombera à leur intersection F. Les deux polygones ayant mêmes sommets se recouvriront exactement et seront égaux.

Fig. 33.



On voit que si les polygones considérés ont n côtés, il faut qu'ils aient pour être égaux $n-1$ angles égaux et $n-2$ côtés égaux. Les conditions nécessaires pour l'égalité des deux polygones considérés sont donc au nombre de $2n-3$.

41. Parmi les quadrilatères, on distingue :

Le *parallélogramme*, dont les côtés opposés sont parallèles; le *rectangle*, dont les angles sont droits; le *losange*, dont les côtés sont égaux; le *carré*, dont les côtés et les angles sont égaux; le *trapèze*, dont deux côtés seulement sont parallèles.

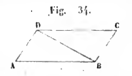
42. *Dans tout parallélogramme, les côtés et les angles opposés sont égaux.*

Les angles opposés sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés en sens contraires (35). Les côtés opposés sont égaux comme portions de parallèles comprises entre parallèles (34).



La *réciproque* est vraie (*fig.* 34). Supposons d'abord les angles opposés égaux. De $A = C$ et $B = D$, on conclura $A + B = C + D$. Les deux angles A et B valent donc ensemble la moitié de la somme des angles du quadrilatère ou deux droits: ils sont donc supplémentaires. Par suite, comme ils sont internes d'un même côté par rapport aux droites AD, BC, et à la sécante AB, les droites AD et BC sont parallèles (32). On prouverait de même que les droites AB et DC sont parallèles. La figure ABCD est donc bien un parallélogramme.

Fig. 34.



Supposons maintenant qu'on ait $AB = DC$ et $AD = BC$. Les deux triangles ADB, DBC, sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Les angles ADB et DBC sont égaux et, comme ils sont alternes-internes par rapport aux droites AD, BC, et a la sécante DB, les droites AD et BC sont parallèles. L'égalité des angles ABD, BDC, entraîne de même le parallélisme des droites AB et DC. Le quadrilatère considéré est encore un parallélogramme.

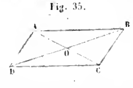
Tout quadrilatère dans lequel deux côtés opposés sont à la fois égaux et parallèles, est un parallélogramme.

Si l'on a AD égal et parallèle à BC, les deux triangles ADB, DBC, sont égaux d'après le premier cas d'égalité; car DB est commun et les angles ADB, DBC, sont égaux comme alternes-internes par rapport aux parallèles AD et BC et à la sécante DB. Il en résulte $AB = DC$.

43. *Les diagonales d'un parallélogramme sont inégales et se divisent mutuellement en parties égales* (*fig.* 35).

Les triangles AOB, DOC, sont égaux d'après le second cas d'égalité; car les côtés AB et DC sont égaux (42), et les angles ABO et ÔDC, BAO et OCD le sont aussi comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB et CD coupées par les sécantes BD et AC. On en conclut $AO = OC$ et $OB = OD$.

Fig. 35.



Les diagonales AC et BD sont d'ailleurs inégales; car les deux triangles ADC et BCD ont le côté DC commun, le côté AD est égal au côté BC; mais l'angle ADC est plus petit que l'angle BCD, puisque ces angles étant supplémentaires, si l'un est aigu, l'autre est obtus. Donc la diagonale AC est plus petite que la diagonale BD (19).

Lorsque les diagonales d'un quadrilatère se coupent mutuellement en parties égales, ce quadrilatère est un parallélo-

gramme. Cette réciproque est immédiatement démontrée par l'égalité des triangles AOB, DOC.

44. *Lorsque dans un parallélogramme l'un des angles est droit, tous les autres le sont, et le quadrilatère est un rectangle* (*fig.* 36).

Fig. 36.

Si l'angle A est droit, l'angle opposé C l'est aussi (42); les angles B et D sont droits comme suppléments d'angles droits.

Dans un rectangle les diagonales sont égales; car les triangles rectangles ABC, BAD, sont égaux.

45. *Un losange est un parallélogramme* (*fig.* 37); car les quatre côtés étant égaux, il en est de même des angles opposés (42).

Fig. 37.



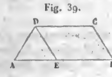
Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires entre elles. La diagonale AC est perpendiculaire sur le milieu de DB, puisque les points A et C sont également distants des points D et B. La diagonale DB est perpendiculaire sur le milieu de AC, puisque les points D et B sont également distants des points A et C (25).

46. *Le carré réunit les propriétés du rectangle et du losange* (*fig.* 38) : ses diagonales sont égales et perpendiculaires entre elles.

Fig. 38.

47. Parmi les trapèzes, on considère les trapèzes *rectangles* dans lesquels un côté est perpendiculaire aux deux côtés parallèles; et les trapèzes *isocèles ou symétriques* dans lesquels les deux côtés non parallèles sont égaux (*fig.* 39).

Fig. 39.



Dans un trapèze isocèle, les angles formés par les côtés parallèles avec les deux autres côtés sont égaux. Menons DE parallèle à CB : la figure DCBE sera un parallélogramme, et l'on aura DE = CB. Puisqu'on a DA = CB par hypothèse, le triangle ADE sera isocèle : l'angle A sera donc égal à l'angle DEA et, par suite, à l'angle B (35). Les angles D et C sont alors égaux comme suppléments d'angles égaux.

48. Deux parallélogrammes sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; deux rectangles sont égaux, lorsqu'ils ont deux côtés adjacents égaux chacun à chacun; deux losanges sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal et un angle égal; deux carrés sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal (40).

CHAPITRE II.

LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

I. — Des arcs et des cordes.

49. La *circonférence de cercle* est le lieu géométrique de tous les points d'un plan à égale distance d'un point intérieur nommé *centre*. C'est la seule ligne courbe qu'on considère dans les éléments.

La portion de surface plane limitée par la circonférence s'appelle *cercle*.

Toute ligne menée du centre à la circonférence est un *rayon* : tous les rayons sont égaux. On désigne une circonférence par son rayon.

On appelle *arc* une portion quelconque de la circonférence : la *corde* d'un arc est la droite qui joint les extrémités de cet arc. A chaque corde correspondent deux arcs dont la somme constitue la circonférence : on ne s'occupe ordinairement que du plus petit de ces deux arcs.

Toute corde passant par le centre est un *diamètre* : tous les diamètres sont égaux puisqu'ils équivalent à deux fois le rayon.

La circonférence est une courbe *convexe*, c'est-à-dire qu'elle ne peut être coupée par une droite en plus de deux points. S'il en était autrement, on pourrait mener du centre à une même droite trois droites égales; ce qui est inadmissible. En effet, d'un point à une droite on ne peut mener plus de deux obliques égales (24).

50. *La plus grande corde qu'on puisse mener dans une circonférence est un diamètre; tout diamètre divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales* (*fig.* 40).

Fig. 40.

Soit la corde AB; je mène par le point A le diamètre AC, et je joins le centre O au point B. Le triangle AOB donne,

$$AB < AO + OB \quad \text{ou} \quad AB < AC.$$

Si l'on plie maintenant la figure le long du diamètre AC pour rabattre la partie supérieure du cercle sur sa partie inférieure, je dis que les deux portions de circonférence déterminées par le diamètre AC se recouvriront complétement. S'il n'en était pas ainsi, si le point B, par exemple, tombait en B_1, les rayons OD et OB_1 seraient inégaux, de sorte qu'il

y aurait des points de la circonférence inégalement éloignés du centre.

51. *Dans le même cercle ou dans des cercles de rayons égaux, à des arcs égaux correspondent des cordes égales; réciproquement, à des cordes égales correspondent des arcs égaux, pourvu que les arcs considérés soient tous les deux plus petits ou plus grands qu'une demi-circonférence* (*fig.* 41).

Soient les deux cercles de rayons égaux OA et IC : ces deux cercles coïncideront nécessairement si l'on fait coïncider leurs centres. On peut les faire coïncider de manière que le point C tombe au point A. Si l'on suppose alors que l'arc CD soit égal à l'arc AB, le point D tombera au point B. Les deux cordes CD et AB coïncideront donc et seront égales.

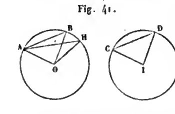


Fig. 41.

Réciproquement, si les cordes CD et AB sont égales, les deux triangles CID et AOB seront égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. L'angle CID sera donc égal à l'angle AOB. Si l'on porte les deux cercles l'un sur l'autre de manière que les rayons IC et OA coïncident, le rayon ID prendra la direction du rayon OB, et le point D tombera au point B. Les deux arcs CD et AB coïncideront donc et seront égaux.

52. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, à un plus grand arc correspond une plus grande corde, et réciproquement.* Il est bien entendu qu'on considère toujours des arcs plus petits qu'une demi-circonférence.

Soient le cercle IC égal au cercle OA et l'arc AH plus grand que l'arc CD (*fig.* 41) : je dis que la corde AH sera plus grande que la corde CD.

Je prends l'arc AB égal à l'arc CD : la corde AB sera égale à la corde CD (51), et la question sera ramenée à comparer les deux cordes AH et AB. Je joins OB; le rayon OB se trouvera nécessairement dans l'angle AOH, puisque le point B doit se trouver entre les points A et H. L'angle AOB sera donc plus petit que l'angle AOH. Si l'on compare alors les deux triangles AOB et AOH qui ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux, on en conclura immédiatement $AH > AB$ (19).

La *réciproque* est évidente.

On voit qu'il existe entre deux cordes la même relation qu'entre les arcs qu'elles sous-tendent, pourvu que ces arcs soient plus petits qu'une demi-circonférence. Si l'on considérait des arcs plus grands qu'une demi-circonférence, la corde

serait d'autant plus petite au contraire que l'arc serait plus grand.

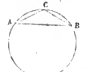


Fig. 42.

Il est évident d'ailleurs que *le rapport de deux arcs n'est pas égal à celui de leurs cordes.*

Si l'arc AB est double de l'arc AC, la corde AB est plus petite que AC + CB, c'est-à-dire plus petite que le double de la corde AC (*fig.* 42).

II. — Perpendiculaires et parallèles dans le cercle.

53. *Le diamètre perpendiculaire à une corde divise en deux parties égales cette corde et les arcs qu'elle sous-tend* (*fig.* 43).

Soient la corde CD et le diamètre AB qui lui est perpendiculaire : plions la figure le long du diamètre AB. Le point D tombera sur HC, puisque les angles en H étant droits, HD prend la direction de HC; le point D tombera aussi sur la demi-circonférence ACB : il tombera donc au point C. HD étant égal à HC, le point H est le milieu de la corde CD. L'arc BD coïncidant avec l'arc BC, et l'arc AD coïncidant avec l'arc AC, les points B et A seront les milieux des arcs sous-tendus par la corde CD.

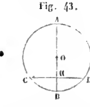


Fig. 43.

Le diamètre AB remplit cinq conditions : il passe par le centre, il est perpendiculaire sur la corde CD, il passe par son milieu et par les milieux des arcs qu'elle détermine. Deux conditions suffisant pour déterminer une droite, dès qu'une droite remplira deux des cinq conditions énoncées, elle remplira forcément les trois autres. En particulier, si l'on joint le centre au milieu de la corde, on a un diamètre perpendiculaire sur cette corde et dont les extrémités sont les milieux des arcs sous-tendus par la corde.

Le lieu géométrique des points milieux d'un système de cordes parallèles est évidemment le diamètre mené perpendiculairement à leur direction.

54. *Deux cordes égales sont également éloignées du centre et, de deux cordes inégales, la plus petite est la plus éloignée du centre* (*fig.* 44).

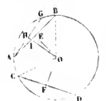


Fig. 44.

Soient les deux cordes égales AB et CD. J'abaisse du centre sur ces cordes les perpendiculaires OE et OF. Les points E et F seront les milieux des deux cordes (53). Dès lors les deux triangles rectangles EOB, FOC, seront égaux (26, 2°) et l'on aura OE = OF.

Prenons maintenant un arc AG plus petit que l'arc AB : la corde AG sera plus petite que la corde AB (52).

La perpendiculaire OH abaissée du centre sur la corde AG, coupera nécessairement la corde AB au point I, car les points O et H sont de côtés différents par rapport à AB. On aura donc OI<OH. OI étant une oblique à AB, on aura à plus forte raison OE<OH.

La *réciproque* de cette proposition est évidente, c'est-à-dire que les distances des cordes au centre ont entre elles la même relation *inverse* que les cordes elles-mêmes, sauf dans le cas d'égalité.

55. *Trois points non en ligne droite déterminent une circonférence* (*fig.* 45).

Soient les trois points A, B, C, non situés en ligne droite. Je mène les droites AB et BC. J'élève DF perpendiculaire sur le milieu de AB, EG perpendiculaire sur le milieu de BC. Ces deux perpendiculaires se rencontreront en un point O; en effet, si l'on joint DE, la somme des angles internes d'un même côté ODE et OED sera inférieure à deux angles droits (33). Le point O étant à la fois également distant des points A et B et des points B et C, sera à égale distance des trois points A, B, C. Par suite, si du point O comme centre, avec OA pour rayon, on décrit une circonférence, elle passera par les trois points donnés. Et comme il n'y a qu'un point O à égale distance des points A, B, C, il n'y a aussi qu'une circonférence passant par ces points.

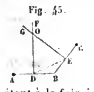


Fig. 45.

D'après ce théorème, trois points non en ligne droite suffisant pour déterminer une circonférence, dès que deux circonférences auront trois points communs (49), elles coïncideront.

56. Lorsqu'une droite AB rencontre une circonférence en deux points A et B (*fig.* 46), on dit qu'elle est *sécante* à cette circonférence. Si la sécante AB tourne autour du point A pour venir prendre une position telle que AB′, le second point d'intersection se rapprochera du premier. Il arrivera un moment où la sécante venant en AC, les deux points d'intersection B et A se réuniront en un seul. On dit alors que la droite AC est *tangente* à la circonférence au point A, qu'on appelle *point de contact*. La circonférence étant une courbe convexe, la tangente AC ne peut avoir qu'un point commun avec elle, elle la *touche* en ce point. On peut donc définir la tangente à la circonférence, une droite qui n'a qu'un point commun avec elle; mais cette définition, applicable seulement aux courbes convexes, est moins générale que la précédente.

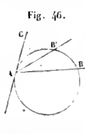


Fig. 46.

Toute perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente à la circonférence ; réciproquement, *toute tangente à la circonférence est perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contact* (*fig.* 47).

Fig. 47.

Soit CD perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA. Toute droite telle que OB sera oblique par rapport à CD. On aura donc OB > OA, c'est-à-dire que le point B sera extérieur à la circonférence. Le point B étant quelconque, la droite CD n'aura que le point A commun avec la circonférence : elle lui sera donc tangente en ce point.

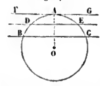
Supposons, réciproquement, que la droite CD soit tangente à la circonférence au point A. Le point B sera extérieur à la circonférence, et l'on aura OB > OA. Dès lors OA représentera la plus courte distance du centre à la droite CD, et sera perpendiculaire sur cette droite.

Il résulte de ce théorème que, par un point pris sur une circonférence, on peut toujours lui mener une tangente, mais une seule.

On voit aussi qu'une tangente est parallèle au système de cordes que le diamètre mené au point de contact divise en deux parties égales (53).

57. *Deux parallèles interceptent sur une même circonférence des arcs égaux* (*fig.* 48).

Fig. 48.

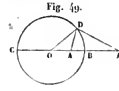


Soient les deux parallèles DE, BC, et soit la tangente FG qui leur est parallèle. Le rayon OA mené au point de contact sera perpendiculaire aux cordes DE, BC : le point A sera donc le milieu des arcs DE et BC, et l'on aura arc AD = arc AE, arc AB = arc AC. Il en résulte évidemment arc BD = arc CE.

Si l'on considérait la tangente parallèle à la tangente FG, cette tangente correspondrait à l'autre extrémité du diamètre qui passe par le point A : les arcs compris entre ces deux tangentes seraient donc des demi-circonférences.

58. *Pour trouver la plus courte ou la plus grande distance d'un point à la circonférence, il faut le joindre au centre* (*fig.* 49).

Fig. 49.



Soit le point A extérieur à la circonférence dont le centre est O. Je joins le point A au centre ; en prolongeant AO, j'obtiens deux points d'intersection B et C. Menons une droite quelconque AD. Le triangle OAD don-

nera $OA < OD + AD$. Retranchant de part et d'autre le rayon OB et le rayon OD, il restera $AB < AD$. On aura de même $AO + OD > AD$, ce qui revient à $AC > AD$.

Si le point A est intérieur à la circonférence, le triangle OAD donne $OD - OA < AD$, et si l'on remplace OD par son égal OB, il vient encore $AB < AD$. On aura de même $AD < OA + OD$ ou $AD < AC$.

La plus courte distance cherchée est donc AB, la plus grande est AC.

On appelle *normale* à une courbe la perpendiculaire élevée, au point de contact, à la tangente à cette courbe. Dans le cercle, toutes les normales concourent au centre. La plus courte et la plus grande distance que nous venons de déterminer, se confondent avec les deux normales qu'on peut mener à la circonférence par le point donné.

III. — Positions mutuelles de deux circonférences.

59. Deux circonférences qui ne coïncident pas ne peuvent avoir plus de deux points communs (55) : on dit alors qu'elles sont *sécantes*.

Lorsque deux circonférences se coupent, la ligne qui joint leurs centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune.

En effet, la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde commune passe par les centres des deux circonférences (53); elle se confond donc avec la ligne des centres.

Deux circonférences sont *tangentes*, lorsqu'elles ont en un point commun une tangente commune. Ce point commun est nécessairement situé sur la ligne des centres, car les rayons des deux circonférences qui sont perpendiculaires à la tangente commune ne forment qu'une seule et même droite. Il est évident que deux circonférences tangentes n'ont qu'un point commun.

60. Deux circonférences ne peuvent occuper que cinq positions différentes, l'une par rapport à l'autre. Elles peuvent être : *extérieures* l'une à l'autre, *tangentes extérieurement*, *sécantes*, *tangentes intérieurement*, *intérieures* l'une à l'autre.

Fig. 50.

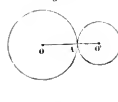
1° *Lorsque deux circonférences sont extérieures l'une à l'autre, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons* (*fig.* 50).

On a, en effet,

$$OO' = OA + AA' + O'A'.$$

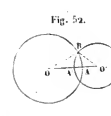
2° *Lorsque deux circonférences sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons* (*fig.* 51). En effet, le point de contact des deux circonférences étant sur la ligne des centres, on a $OO' = OA + O'A$.

Fig. 51.



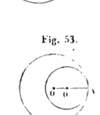
3° *Lorsque deux circonférences sont sécantes, la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence* (*fig.* 52). En effet, le triangle OBO′ donne $OO' < OB + O'B$. Il donne aussi $OO' + O'B > OB$ et, par suite, $OO' > OB - O'B$.

Fig. 52.



4° *Lorsque deux circonférences sont tangentes intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons* (*fig.* 53). En effet, le point de contact des deux circonférences étant sur la ligne des centres, on a $OO' = OA - O'A$.

Fig. 53.



5° *Lorsque deux circonférences sont intérieures l'une à l'autre, la distance des centres est plus petite que la différence des rayons* (*fig.* 54). En effet, l'on a

$$OO' = OA - O'A' - AA'.$$

Fig. 54.



Les *réciproques* de ces cinq propositions sont évidentes. Je dis, par exemple, que si la distance des centres est égale à la somme des rayons, les deux circonférences sont tangentes extérieurement. En effet, si elles occupaient une des quatre autres positions possibles, la distance des centres serait plus grande ou plus petite que la somme des rayons.

IV. — Mesure des angles.

61. Comme nous l'avons déjà dit en arithmétique, le *rapport* de deux grandeurs est le nombre qui mesure la première, lorsqu'on prend la seconde pour unité.

Lorsque deux grandeurs sont *commensurables*, leur rapport est *commensurable avec l'unité*, c'est-à-dire qu'il est exprimé par un nombre entier ou fractionnaire. Soient deux grandeurs, A et B, désignons leur commune mesure par m, et supposons qu'on ait $A = 17m$, $B = 9m$. Le rapport de A

à B sera

$$\frac{17m}{9m} \text{ ou } \frac{17}{9}.$$

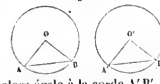
Lorsque deux grandeurs sont *incommensurables*, leur rapport est *incommensurable avec l'unité*, c'est-à-dire qu'il ne peut être exprimé ni par un nombre entier ni par un nombre fractionnaire. Mais on peut l'obtenir avec telle approximation qu'on veut (9).

Il est nécessaire de définir ce qu'on doit entendre par *deux rapports incommensurables égaux*. Deux rapports incommensurables sont égaux lorsqu'ils ont la même expression numérique pour le même degré d'approximation, et cela quel que soit le degré d'approximation choisi.

62. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, les angles au centre égaux correspondent à des arcs égaux, et réciproquement* (*fig.* 55).

On appelle *angle au centre* un angle dont le sommet se confond avec le centre de la circonférence considérée. Supposons que l'angle AOB soit égal à l'angle A′O′B′, le rayon AO étant égal au rayon A′O′. Les deux triangles AOB, A′O′B′, seront égaux d'après le premier cas d'égalité. La corde AB étant alors égale à la corde A′B′, l'arc AB sera égal à l'arc A′B′.

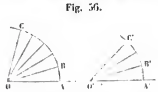
Fig 55.



Réciproquement, si l'on suppose l'arc AB égal à l'arc A′B′, la corde AB sera égale à la corde A′B′, les deux triangles AOB, A′O′B′, seront égaux d'après le troisième cas d'égalité, et l'on en conclura l'égalité des angles AOB, A′O′B′.

63. *Le rapport de deux angles quelconques est égal à celui des arcs compris entre leurs côtés, et décrits de leurs sommets comme centres avec un même rayon* (*fig.* 56).

Fig. 56.



Soient les angles AOC et A′O′C′. Décrivons de leurs sommets comme centres avec un même rayon les arcs AC, A′C′. Supposons d'abord que ces arcs aient une commune mesure contenue 5 fois, par exemple, dans l'arc AC et 3 fois dans l'arc A′C′. Nous aurons alors (61)

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}.$$

Joignons aux centres O et O' tous les points de division des arcs AC, A'C'. Nous décomposerons l'angle AOC en 5 angles partiels tels que AOB, et l'angle A'O'C' en 3 angles partiels tels que A'O'B'. Tous ces angles partiels, correspondant à des arcs égaux, seront égaux entre eux (62), et l'un d'eux pourra servir de commune mesure aux angles AOC, A'O'C'. On aura donc

$$\frac{AOC}{A'O'C'} = \frac{5}{3}.$$

Par conséquent, le rapport des deux angles est bien égal à celui des deux arcs interceptés.

Supposons maintenant que les deux arcs AC et A'C' n'aient pas de commune mesure. Divisons l'arc A'C' en un certain nombre m de parties égales, désignons par a l'une de ces parties. Nous aurons $A'C' = ma$. Portons a sur AC autant de fois que possible ; supposons que AC contienne p fois a, plus un reste r, inférieur à a et nécessairement incommensurable avec a. Nous aurons $AC = pa + r$. Il en résultera

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{pa + r}{ma} = \frac{p}{m} + \frac{r}{ma}.$$

La fraction $\frac{r}{a}$ étant inférieure à 1, la fraction $\frac{r}{ma}$ est inférieure à $\frac{1}{m}$. Par suite, $\frac{p}{m}$ représente le rapport $\frac{AC}{A'C'}$, avec une approximation marquée par $\frac{1}{m}$.

Si l'on joint aux centres O et O' tous les points de division des arcs AC, A'C', on décomposera l'angle A'O'C' en m angles partiels égaux entre eux, nous désignerons l'un de ces angles par A, et l'angle AOC en p angles partiels égaux à A, plus un angle R inférieur à A. On pourra donc écrire

$$A'O'C' = mA \quad \text{et} \quad AOC = pA + R.$$

Il en résultera

$$\frac{AOC}{A'O'C'} = \frac{pA + R}{mA},$$

c'est-à-dire

$$\frac{AOC}{A'O'C'} = \frac{p}{m} + \frac{R}{mA}.$$

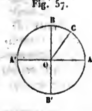
La fraction $\frac{R}{A}$ étant inférieure à 1, la fraction $\frac{R}{mA}$ est inférieure à $\frac{1}{m}$. Par suite, $\frac{p}{m}$ représente le rapport $\frac{AOC}{A'O'C'}$ avec une approximation marquée par $\frac{1}{m}$.

Pris avec le même degré d'approximation, les deux rapports $\frac{AC}{A'C'}$ et $\frac{AOC}{A'O'C'}$ sont donc égaux, et cela quel que soit le degré d'approximation, puisque la valeur de m est complétement arbitraire. Le théorème subsiste donc encore, lors même que le rapport des arcs est incommensurable.

Le mode de raisonnement dont nous venons de faire usage est complétement général ; dans tous les cas analogues à celui que nous venons de traiter, nous ne le répéterons donc pas, et nous renverrons à ce qui précède.

64. *Si l'on fait correspondre l'unité d'arc à l'unité d'angle, la mesure de l'angle sera exprimée par le même nombre abstrait que la mesure de l'arc qu'il intercepte.*

Fig. 57.



Il est naturel de choisir l'angle droit pour unité d'angle. Menons par le centre d'une circonférence deux diamètres AA', BB', perpendiculaires entre eux (*fig.* 57). On formera ainsi quatre angles au centre égaux entre eux, il en sera donc de même des arcs correspondants. A l'angle droit correspond par suite un quart de circonférence, et nous devrons prendre ce quart de circonférence pour unité d'arc.

Si l'on veut comparer l'angle quelconque AOC à l'angle droit AOB, on aura (63)

$$\frac{AOC}{AOB}=\frac{AC}{AB} \quad \text{ou} \quad \frac{AOC}{1^{dr}}=\frac{AC}{1^{qu}}.$$

Le premier membre de l'égalité exprime la mesure de l'angle AOC, le second membre exprime la mesure de l'arc AC. Le même nombre abstrait représente donc bien les deux mesures.

Si l'on dit souvent qu'*un angle a pour mesure son arc*, c'est seulement pour abréger le discours. On doit dire : *la mesure de l'angle est égale à celle de l'arc qu'il intercepte.*

Pour faciliter l'expression des arcs, on a divisé la circonférence en 360 parties égales appelées *degrés;* chaque degré, en 60 parties égales appelées *minutes;* chaque minute, en 60 parties égales appelées *secondes.* Le quart de la circonférence renferme 90 degrés ou 5400 minutes ou 324000 secondes. On indiquera un arc de 32 degrés 25 minutes 27 secondes, en écrivant $32° 25' 17''$.

Un angle de $32° 25' 17''$ sera alors un angle qui intercepterait un arc de $32° 25' 17''$ sur une circonférence décrite de son sommet comme centre *avec un rayon quelconque.* Pour comparer cet angle à l'angle droit, il faut comparer $32° 25' 17''$ à $90°$. Pour effectuer cette comparaison, on

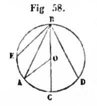
devra exprimer en secondes le nombre complexe 32°25′ 17″ et remplacer 90° par 324000″. On trouvera ainsi pour le rapport cherché $\frac{116717}{324000}$.

65. On appelle *angle inscrit* un angle formé par deux cordes qui se coupent en un même point de la circonférence.

La mesure d'un angle inscrit est égale à la mesure de la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

Nous distinguerons trois cas (*fig.* 58). Le centre de la circonférence pourra tomber sur l'un des côtés de l'angle. Soit, par exemple, l'angle ABC. Joignons OA. Le triangle AOB sera isocèle, et l'angle A sera égal à l'angle B. L'angle AOC extérieur au triangle AOB, étant égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents (37), sera égal au double de l'angle ABC. Comme angle au centre, l'angle AOC a la même mesure que son arc AC : l'angle ABC, qui en est la moitié, aura donc pour mesure celle de la moitié de l'arc AC (63).

Fig. 58.



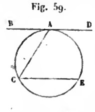
Supposons que le centre de la circonférence tombe entre les deux côtés de l'angle, et considérons l'angle ABD. On mènera par le sommet B le diamètre BC. L'angle ABD étant la somme des angles ABC, CBD, sa mesure sera égale à la somme de leurs mesures. Elle sera donc encore la même que celle de la moitié de l'arc AD.

Enfin, si le centre est extérieur à l'angle considéré ABE, on mènera encore le diamètre BC. L'angle ABE étant la différence des angles EBC, ABC, sa mesure sera égale à la différence de leurs mesures, c'est-à-dire à celle de la moitié de l'arc AE.

La mesure de l'angle formé par une tangente et une corde aboutissant au point de contact, est égale à la mesure de la moitié de l'arc sous-tendu par la corde (*fig.* 59).

Soit l'angle BAC. Par le point C, menons CE parallèle à la tangente BD : les arcs AC et AE seront égaux (57). Les angles BAC, ACE, sont d'ailleurs égaux comme alternes-internes (31). La mesure de l'angle BAC sera donc égale à la mesure de l'angle ACE, c'est-à-dire qu'elle sera égale à celle de la moitié de l'arc AE ou de son égal AC.

Fig. 59.

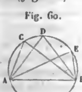


La moitié de l'arc AC correspondant à la mesure de l'angle BAC, la moitié de l'arc AEC correspondra à celle de l'angle supplémentaire CAD ; car la somme des mesures de deux

angles supplémentaires doit être égale à la mesure de deux angles droits ou à une demi-circonférence.

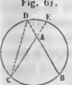
On appelle *segment* la portion de surface circulaire comprise entre un arc et sa corde : à chaque corde correspondent deux segments. *Tous les angles inscrits dans un même segment*, c'est-à-dire ayant leurs sommets sur l'arc du segment et leurs côtés terminés à sa corde, *sont égaux*. En effet, tous les angles tels que ACB, ADB, AEB, correspondent au même arc AB (*fig.* 60). *Lorsque le segment considéré est un demi-cercle, les angles inscrits sont droits*, puisque leur mesure correspond au quart de la circonférence. Suivant que le segment considéré est *plus petit* ou *plus grand* qu'un demi-cercle, les angles qui y sont inscrits sont *obtus* ou *aigus*, puisque leur mesure est alors plus grande ou plus petite que celle d'un angle droit. On dit qu'un segment de cercle est *capable d'un angle donné*, lorsque les angles inscrits dans ce segment sont égaux à l'angle considéré.

Fig. 60.



66. *La mesure de l'angle formé par deux sécantes qui se croisent à l'intérieur de la circonférence, est égale à la somme des mesures des arcs interceptés par les côtés de l'angle et leurs prolongements* (*fig.* 61).

Fig. 61.



Soit l'angle BAC. Ses côtés interceptent l'arc BC, ses côtés prolongés interceptent l'arc DE. Joignons CD. L'angle BAC extérieur au triangle CAD, est égal à la somme des deux angles intérieurs D et C. Sa mesure sera donc égale à la somme des mesures de ces deux angles. Elle équivaudra donc à la moitié de l'arc BC, augmentée de la moitié de l'arc DE.

67. *La mesure de l'angle formé par deux sécantes qui se croisent à l'extérieur de la circonférence, est égale à la différence des mesures des arcs interceptés par les côtés de l'angle* (*fig.* 62).

Fig. 62.



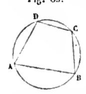
Soit l'angle BAC dont les côtés interceptent les arcs BC et DE. Joignons CD. L'angle BDC extérieur au triangle ACD sera égal à la somme des angles intérieurs A et C. L'angle BAC sera donc égal à la différence des angles BDC et DCE. Sa mesure sera égale à la différence des mesures de ces deux angles, c'est-à-dire qu'elle équivaudra à la moitié de l'arc BC, diminuée de la moitié de l'arc DE.

Le théorème subsiste, l'une des sécantes ou toutes les deux devenant tangentes.

68. *Les angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans une circonférence sont supplémentaires.*

On dit qu'un quadrilatère est incrit dans une circonférence, lorsque ses quatre sommets sont sur cette circonférence. Soit le quadrilatère ABCD (*fig.* 63). La mesure de l'angle A correspondra à la moitié de l'arc BCD (65), celle de l'angle C correspondra à la moitié de l'arc BAD. La somme des mesures des deux angles A et C équivaudra donc à une demi-circonférence, c'est-à-dire que ces angles sont supplémentaires.

Fig. 63.



La *réciproque* de cette proposition est vraie. *Tout quadrilatère dans lequel deux angles opposés sont supplémentaires, est inscriptible.* Supposons que les angles A et C remplissent cette condition. Si l'on fait passer une circonférence par les trois sommets D, A, B, je dis qu'elle passera par le quatrième sommet C. S'il n'en était pas ainsi, la mesure de l'angle C serait plus grande ou plus petite que celle de la moitié de l'arc BAD (66, 67); cet angle ne serait donc pas le supplément de l'angle A.

V.—Problèmes graphiques sur la ligne droite et la circonférence de cercle.

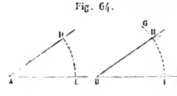
69. Résoudre *graphiquement* un problème, c'est construire certaines figures devant satisfaire à des conditions déterminées. L'exactitude de la solution dépend de l'exactitude des constructions. On n'emploie dans ces sortes de constructions que la ligne droite et la circonférence de cercle, c'est-à-dire que les lignes qu'on peut tracer à l'aide de la *règle* et du *compas*.

Nous ne dirons rien de l'usage et de la vérification de ces instruments, bien connus du lecteur. Nous ferons seulement remarquer qu'on doit toujours éviter de déterminer un point par l'intersection de deux lignes se coupant sous un angle trop aigu. Dans ce cas, en effet, par suite de l'épaisseur des lignes tracées, elles semblent coïncider dans une étendue plus ou moins grande, et il y a incertitude sur la position du point cherché.

Les problèmes très-simples que nous allons traiter, servent de base à la solution graphique de la plupart des problèmes de géométrie.

70. *Construire un angle égal à un angle donné* (*fig.* 64).

Fig. 64.



Soit l'angle donné A. Du sommet A comme centre, je décrirai entre les côtés de cet angle un arc DE. Je tracerai une droite BC et, du point B comme centre, avec un rayon égal à AD, je décrirai l'arc de

cercle indéfini FG. Sur cet arc, à partir du point F, je porterai une ouverture de compas FH, égale à la corde DE. L'angle HBF sera égal à l'angle donné, d'après l'égalité des arcs FH, DE (63).

Cette construction permettra de trouver le troisième angle d'un triangle, quand on connaîtra les deux autres.

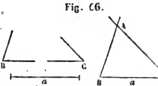
71. *Construire un triangle, connaissant un angle et les deux côtés qui le comprennent* (*fig.* 65).

Fig. 65.

On donne l'angle C et les côtés *a* et *b*. Je construis un angle égal à l'angle C, je prends sur les côtés de cet angle, à partir du sommet C, des longueurs égales aux côtés *a* et *b*. Le triangle ACB sera évidemment le triangle demandé. On aurait pu renverser l'ordre dans lequel on a porté les côtés *a* et *b* : on aurait obtenu le même triangle *retourné*.

72. *Construire un triangle, connaissant un côté et deux angles* (*fig.* 66).

On peut toujours supposer que les deux angles donnés B et C sont adjacents au côté donné *a* (37). Je prends une


Fig. 66.

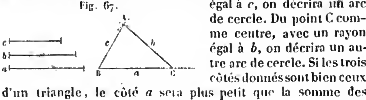
longueur BC égale à *a*. Au point B, je fais un angle ABC égal à l'angle donné B ; au point C, un angle ACB égal à l'angle donné C. Les deux droites BA et CA se couperont au point A, et le triangle BAC sera le triangle demandé.

On aurait pu renverser l'ordre dans lequel on a construit les angles B et C, c'est-à-dire faire l'angle C au point B, et l'angle B au point C : on aurait obtenu le même triangle *retourné*.

Pour que le problème soit possible, il faut que la somme des angles donnés B et C soit inférieure à deux angles droits (37).

73. *Construire un triangle, connaissant ses trois côtés* (*fig.* 67).

Soient *a*, *b*, *c*, les trois côtés donnés. On prendra une longueur BC égale à *a*. Du point B comme centre, avec un rayon

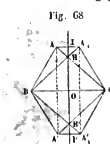

Fig. 67.

égal à *c*, on décrira un arc de cercle. Du point C comme centre, avec un rayon égal à *b*, on décrira un autre arc de cercle. Si les trois côtés donnés sont bien ceux d'un triangle, le côté *a* sera plus petit que la somme des

côtés b et c et plus grand que leur différence (15), c'est-à-dire que la distance des centres des deux arcs sera plus petite que la somme de leurs rayons et plus grande que la différence de ces mêmes rayons : ces deux arcs se couperont donc (60, 3°) en un point A, qui sera le troisième sommet du triangle demandé.

Les arcs de cercle se couperont aussi au-dessous de la ligne des centres (*fig.* 68), en un point A', et le triangle A'BC répondra aussi à la question. La ligne AA', qui joint les deux sommets A et A', sera coupée perpendiculairement par BC en deux parties égales (59). On dit alors que les deux triangles ABC, A'BC, sont *symétriques*. Si l'on échangeait les rayons c et b, on obtiendrait deux nouveaux triangles A_1BC, A'_1BC, symétriques par rapport à BC, qui ne seraient que les triangles ABC, A'BC, *retournés*. On peut remarquer que les quatre triangles BHC, AHA_1, BH'C, $A'H'A'_1$, seront nécessairement isocèles. La perpendiculaire II' élevée au milieu O de BC, passera donc par les milieux I et I' des droites AA_1, $A'A'_1$, parallèles à BC. Les sommets A et A_1, A' et A'_1, seront donc deux à deux *symétriques* par rapport à la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC. Lorsque deux figures planes quelconques ont, comme les deux triangles BAC, BA'C, leurs sommets symétriques par rapport à un même axe, elles sont égales, c'est-à-dire qu'elles peuvent coïncider, comme les deux triangles désignés, par *renversement* ou *rotation* autour de l'axe.

Fig. 68

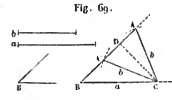


74. *Construire un triangle, étant donnés deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.*

Soient donnés les cotés b et a et l'angle B. Le côté b peut être plus petit ou plus grand que le côté a ; il peut lui être égal.

Supposons $b < a$. Je ferai (*fig.* 69) un angle égal à l'angle donné B. Je prendrai sur l'un des côtés de cet angle une longueur BC égale à a. Du point C comme centre, avec b pour rayon, je décrirai un arc de cercle qui coupera l'autre côté de l'angle en deux points A et A'. Les deux triangles BCA, BCA', rempliront les conditions de l'énoncé.

Fig. 69.



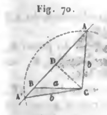
Pour que le problème soit possible dans le cas considéré, il faut que l'angle donné B soit aigu (37).

Si l'on avait $b = CD$, CD étant la perpendiculaire abaissée du

point C sur le second côté de l'angle B, l'arc de cercle décrit du point C serait tangent au second côté de l'angle, et il n'y aurait plus qu'une solution qui serait le triangle rectangle BCD.

Si b est $> a$ (*fig.* 70), le second point d'intersection A' se trouve rejeté au-dessous du point B, et le second triangle BCA' ne répond pas à la question, puisqu'il renferme le supplément de l'angle donné B au lieu de cet angle lui-même. Dans ce cas, l'angle B peut être obtus. S'il est droit, les deux solutions conviennent; mais elles n'en font en réalité qu'une seule, parce qu'un triangle rectangle est déterminé lorsqu'on connaît son hypoténuse et l'un des côtés de l'angle droit (26, 2°).

Fig. 70.



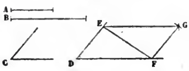
Si b est égal à a, le second point d'intersection A' se confond avec le point B : il n'y a qu'une solution qui est le triangle isocèle BCA.

Le problème n'est d'ailleurs possible dans aucun cas, lorsque le côté b est inférieur à la perpendiculaire CD, plus courte distance du point C au second côté de l'angle B.

En résumé, un triangle n'est pas *déterminé* par la connaissance de deux de ses côtés et de l'angle opposé à l'un d'eux. Il faut examiner les données pour savoir s'il n'y a qu'une seule réponse à la question.

75. *Construire un parallélogramme, dont on connaît deux côtés adjacents* A *et* B *et l'angle* C *qu'ils forment* (*fig.* 71).

Fig. 71.

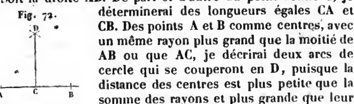


Cette question revient évidemment à construire un triangle EDF, dont on connaît deux côtés et l'angle compris; puis un triangle EFG, dont on connaît les trois côtés.

76. *Par un point donné sur une droite donnée, élever une perpendiculaire sur cette droite* (*fig.* 72).

Soit la droite AB. De part et d'autre du point donné C, je déterminerai des longueurs égales CA et CB. Des points A et B comme centres, avec un même rayon plus grand que la moitié de AB ou que AC, je décrirai deux arcs de cercle qui se couperont en D, puisque la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence qui est nulle. La ligne CD sera la perpendiculaire demandée, car les deux points C et D étant également éloignés

Fig. 72.



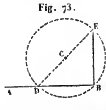
des points A et B, CD est perpendiculaire sur le milieu de AB.

La construction sera d'autant plus exacte, que les points C et D seront plus éloignés l'un de l'autre : deux points étant très-rapprochés, une erreur très-petite sur la position de l'un d'eux en produit en effet une très-grande sur la direction de la droite qui les joint.

On peut, comme vérification, déterminer au-dessous de AB un troisième point de la perpendiculaire CD.

Si l'on ne pouvait prolonger la droite AB au delà du point B, et si la perpendiculaire devait être élevée au point B, on pourrait opérer comme il suit.

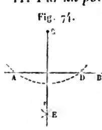
Fig. 73.



D'un point C pris hors de la droite AB, on décrirait une circonférence ayant CB pour rayon. Cette circonférence couperait AB en un second point D. On mènerait le diamètre DCE, et la droite BE serait la perpendiculaire demandée; car l'angle DBE est inscrit dans une demi-circonférence (*fig.* 73).

77. *Par un point pris hors d'une droite, lui mener une perpendiculaire* (*fig.* 74).

Fig. 74.

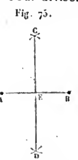


Du point donné C, avec un rayon convenable, on décrira un arc de cercle qui coupera la droite donnée AB en deux points A et D. Des points A et D comme centres, avec un même rayon plus grand que la moitié de AD, on décrira deux arcs de cercle qui se couperont en E au-dessous de AB. La ligne CE, perpendiculaire sur le milieu de AD, sera la perpendiculaire demandée.

78. *Division d'une droite, d'un arc ou d'un angle, en deux parties égales.*

Pour diviser la droite AB en deux parties égales (*fig.* 75), des points A et B comme centres, avec un même rayon notablement plus grand que la moitié de AB, je décrirai deux arcs de cercle qui se couperont en deux points C et D, au-dessus et au-dessous de AB. La droite CD, perpendiculaire sur le milieu de AB, déterminera le milieu E de cette ligne. On voit que le problème proposé revient à celui-ci : *élever une perpendiculaire sur le milieu d'une droite.*

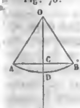
Fig. 75.



Si l'on veut diviser l'arc AB ou l'angle AOB en deux parties égales (*fig.* 76), on déterminera comme précédemment un point E à égale distance des

points A et B. En joignant ce point E au centre de l'arc ou au sommet de l'angle, c'est-à-dire au point O, on aura la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde AB. Cette perpendiculaire divisera l'arc AB au point D en deux parties égales (53); elle divisera donc aussi l'angle AOB en deux parties égales (64).

Fig. 76.



En appliquant la même construction aux moitiés obtenues et en continuant de la même manière, on voit qu'on pourra partager une droite, un arc ou un angle, en un nombre de divisions marqué par une puissance quelconque de 2.

79. *Retrouver le centre d'une circonférence ou d'un arc de cercle* (*fig.* 77).

Fig. 77.



On marquera trois points A, B, C, sur la circonférence ou l'arc donné; on obtiendra ainsi deux cordes AB et BC. On élèvera la perpendiculaire DE sur le milieu de AB, la perpendiculaire FG sur le milieu de BC. Ces deux perpendiculaires se croiseront en un point O qui sera le centre cherché (55).

80. *Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée.*

Soient la droite BC et le point A (*fig.* 78). Par le point A, on mènera une droite quelconque AC qui vienne couper BC au point C. On fera ensuite avec AC, en prenant le point A pour sommet, un angle CAD égal à l'angle ACB. AD sera la parallèle demandée, puisque les angles égaux formés sont alternes-internes par rapport aux droites BC, AD, coupées par la sécante AC.

Fig. 78.

On aurait pu aussi mener une droite quelconque telle que AB, et achever le parallélogramme ABCD dont les deux côtés adjacents AB, BC, comprennent l'angle ABC (75).

On aurait pu abaisser du point A une perpendiculaire AE sur BC (*fig.* 79); puis, au point F, élever FD perpendiculaire sur BC. Si l'on prend FD égale à AE, le point D appartiendra à la parallèle menée par le point A à la droite BC (34).

Fig. 79.

On aurait pu encore prendre un point O quelconque sur BC (*fig.* 79), et du point O comme centre, avec OA pour rayon, décrire une demi-circonférence arrêtée aux points B et C. Portant alors la distance BA de C en D, le

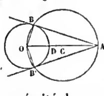
point D appartiendra à la parallèle menée par le point A à BC (57).

81. On peut abréger toutes les constructions que nous venons d'indiquer à l'aide de l'*équerre* et du *rapporteur*. On pourra notamment, en se servant de l'équerre et de la propriété des angles correspondants, tracer très-exactement des parallèles. Nous n'entrerons dans aucun détail sur ces instruments, dont la pratique de l'art du dessin a dû rendre l'emploi familier à tous nos lecteurs.

82. *Par un point donné hors d'un cercle, mener une tangente à ce cercle* (*fig.* 80).

Soient le cercle dont le centre est O, et le point A. Joignons OA et, sur OA comme diamètre, décrivons une circonférence qui rencontrera forcément la circonférence donnée en deux points B et B'. Les droites AB et AB' seront les tangentes demandées. En effet, les angles OBA et OB'A sont droits comme angles inscrits dans une demi-circonférence. Les droites AB, AB', sont donc perpendiculaires à l'extrémité des rayons OB, OB' (56).

Fig. 80.



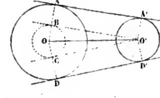
Remarquons l'égalité des deux triangles rectangles OBA, OB'A. Ils ont la même hypoténuse OA et OB = OB'. On en conclut l'égalité des deux tangentes AB et AB', et celle des deux angles OAB, OAB'.

Ainsi, *par un point pris hors d'un cercle, on peut lui mener deux tangentes, ces tangentes sont égales, et elles sont également inclinées sur la ligne qui joint leur point de concours au centre.*

83. *Mener une tangente commune à deux circonférences données.*

La tangente commune peut laisser les deux circonférences d'un même côté ou de côtés différents. Dans le premier cas, c'est une tangente commune *extérieure ;* dans le second, c'est une tangente commune *intérieure.*

Fig. 81.



1° Soient les deux circonférences O et O' et la tangente commune extérieure AA'. Menons les rayons OA et O'A'. Ces rayons seront parallèles et, si l'on mène par le point O' la parallèle O'B à AA', la figure O'A'AB sera un rectangle, de sorte que OB représentera la différence

des deux rayons OA et O'A'. Par conséquent, si du point O comme centre, avec OB pour rayon, on décrit une circonférence, elle sera tangente à la droite O'B qui est parallèle à la direction de la tangente commune. Il en résulte immédiatement la construction suivante (*fig.* 81).

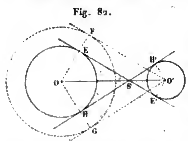
Du point O comme centre, avec la différence des rayons des circonférences données pour rayon, on décrira une circonférence. Du point O', on mènera à cette circonférence la tangente O'B. On prolongera le rayon OB jusqu'au point A où il rencontre la circonférence O et, par le point A, on mènera AA' parallèle à O'B : AA' sera la tangente commune demandée. Comme on peut mener par le point O' au cercle OB deux tangentes O'B et O'C, il y aura en général deux solutions AA' et DD'.

Le problème sera possible tant que le point O' sera extérieur au cercle OB, c'est-à-dire tant que la distance des centres des circonférences données sera plus grande que la différence de leurs rayons. Si la distance OO' est égale à la différence des rayons, le point O' se trouvera sur la circonférence OB et sur la ligne des centres : les deux solutions se réduiront à une seule, qui sera la tangente commune aux deux circonférences données, alors tangentes intérieurement.

Ainsi, deux circonférences extérieures l'une à l'autre, tangentes extérieurement ou sécantes, admettent deux tangentes communes extérieures. Deux circonférences tangentes intérieurement n'en admettent plus qu'une seule. Il n'existe aucune solution, lorsque les circonférences données sont intérieures l'une à l'autre.

2° Soient les deux circonférences O et O' et la tangente commune intérieure EE'. Menons les rayons OE et O'E'. Ces rayons seront parallèles et, si l'on mène par le point O' la parallèle O'F à EE', la figure O'E'EF sera un rectangle, de sorte que OF représentera la somme des deux rayons OE et O'E'. Par conséquent, si du point O comme centre, avec OF pour rayon, on décrit une circonférence, elle sera tangente à la droite O'F, qui est parallèle à la direction de la tangente commune. Il en résulte immédiatement la construction suivante (*fig.* 82).

Fig. 82.



Du point O comme centre, avec la somme des rayons des circonférences données pour rayon, on décrira une circonférence. Du point O', on mènera à cette circonférence la tan-

gente O′F. Par le point E, où le rayon OF rencontre la circonférence O, on tracera EE′ parallèle à O′F : EE′ sera la tangente commune demandée. Comme on peut mener par le point O′ au cercle OF deux tangentes O′F et O′G, il y aura en général deux solutions EE′ et HH′.

Le problème sera possible tant que le point O′ sera extérieur au cercle OF, c'est-à-dire tant que la distance des centres des circonférences données sera plus grande que la somme de leurs rayons. Si la distance OO′ est égale à la somme des rayons, le point O′ se trouvera sur la circonférence OF et sur la ligne des centres : les deux solutions se réduiront à une seule qui sera la tangente commune aux deux circonférences données, alors tangentes extérieurement.

Ainsi, deux circonférences extérieures l'une à l'autre admettent deux tangentes communes intérieures. Deux circonférences tangentes extérieurement n'en admettent plus qu'une seule. Il n'existe aucune solution, lorsque les circonférences données sont sécantes, tangentes intérieurement ou intérieures l'une à l'autre.

Les deux tangentes communes extérieures se coupent en un même point situé sur la ligne des centres. En effet, elles se coupent, la somme des angles DAA′, ADD′ (*fig.* 81) étant inférieure à deux angles droits ; et les points O et O′ appartiennent à la bissectrice de l'angle qu'elles forment (27).

Les deux tangentes communes intérieures se coupent aussi en un même point S *de la ligne des centres* (*fig.* 82). En effet, elles forment deux angles opposés par le sommet, les points O et O′ appartiennent aux bissectrices de ces angles, et les bissectrices des angles opposés par le sommet sont en ligne droite (14).

Dans le cas des tangentes communes extérieures, si les rayons des deux circonférences données étaient égaux, la circonférence OB se réduirait à un point, et la tangente O′B, parallèle à la direction de la tangente commune, se confondrait avec la ligne des centres. Dans ce cas, les deux tangentes extérieures seraient parallèles à la ligne des centres. Quant aux tangentes intérieures, leur point de concours S serait au milieu de la distance des centres : c'est ce que prouve la comparaison des triangles OSE, O′SE′ qui, dans le cas considéré, deviennent égaux.

On doit appliquer la méthode que nous avons employée pour résoudre la question proposée, toutes les fois qu'on n'aperçoit pas rapidement la solution du problème. *Cette méthode consiste à supposer le problème résolu*, à tracer la figure correspondante, et à étudier sur cette figure la liaison des données et des inconnues.



84. *Dans tout quadrilatère circonscrit à une circonférence, les côtés opposés forment des sommes égales* (*fig.* 83).

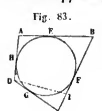


Fig. 83.

On dit qu'un quadrilatère est circonscrit à une circonférence, lorsque tous ses côtés sont tangents à cette circonférence.

Les tangentes issues d'un même point étant égales (82), on aura

$$AE = AH,\ BE = BF,\ CG = CF,\ DG = DH.$$

Si l'on ajoute toutes ces égalités membre à membre, il viendra évidemment

$$AB + CD = AD + BC.$$

La *réciproque* est vraie. Supposons qu'on ait

$$AB + CD = AD + BC,$$

je dis que le quadrilatère est circonscriptible; c'est-à-dire que si l'on trace un cercle tangent aux trois côtés AD, AB, BC [le centre de ce cercle sera à la rencontre des bissectrices des angles A et B (82)], sa circonférence sera nécessairement tangente au quatrième côté DC. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait mener par le point D une tangente DI à cette circonférence. Le quadrilatère DABI étant circonscrit, on aurait à la fois

$$AB + DI = AD + BI \quad \text{et} \quad DC < DI + IC.$$

On en conclut, en ajoutant,

$$AB + DC < AD + BC;$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

85. *Décrire sur une droite donnée comme corde, un segment capable d'un angle donné* (*fig.* 84).

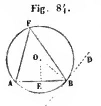


Fig. 84.

On veut décrire une circonférence passant par les points A et B, et telle, que l'un des deux segments correspondant à la corde que ces points déterminent soit capable de l'angle donné.

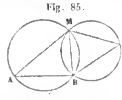
Je mènerai par le point B une droite CD faisant au-dessous de AB un angle ABC égal à l'angle donné. J'élèverai BO perpendiculaire à CD et EO perpendiculaire à AB, le point E étant le milieu de AB. Les droites BO et EO se couperont nécessairement au point O. Du point O comme centre, avec OB pour rayon, je décrirai une circonférence qui sera la circonférence demandée. En effet, la droite CD sera

tangente à cette circonférence, et l'angle donné ABC aura pour mesure la moitié de l'arc AB. Or tous les angles AFB, inscrits dans le segment supérieur à AB, auront aussi pour mesure la moitié de l'arc AB : ils seront donc égaux à l'angle ABC, et le segment AFB sera bien capable de l'angle donné.

Si l'on suppose une droite AB, et si l'on demande le lieu géométrique des sommets des angles égaux à un angle donné, dont les côtés passent constamment par les extrémités A et B, ce lieu sera une circonférence décrite sur AB comme corde et telle, que l'un des segments correspondants soit capable de l'angle donné. En effet, tous les angles inscrits dans ce segment seront égaux à l'angle donné, et tous ceux dont le sommet sera intérieur ou extérieur à la circonférence, ayant une mesure plus grande ou plus petite que celle de l'angle donné (66, 67), seront plus grands ou plus petits que lui.

Lorsqu'on veut rapporter sur une carte un point remarquable M, on choisit trois points A, B, C, déjà marqués sur cette carte. On mesure, à l'aide d'instruments spéciaux, les angles AMB, BMC. En décrivant sur AB et sur BC des segments capables des angles AMB, BMC, on obtient deux lieux géométriques du point M. Ce point se trouvera donc sur la carte, au second point d'intersection des deux circonférences qui ont déjà le point B commun (*fig.* 85).

Fig. 85.



CHAPITRE III.

LES LIGNES PROPORTIONNELLES.

I. — Des lignes proportionnelles dans le triangle.

86. On dit qu'une droite est partagée au point M en deux parties AM et MB proportionnelles à deux nombres donnés, 5 et 14 par exemple, lorsqu'on a

$$\frac{AM}{MB} = \frac{5}{14}.$$

On peut toujours effectuer ce partage, mais il n'y a qu'une seule manière de l'effectuer : il faut, en effet, diviser AB en $5+14$ ou 19 parties égales, et prendre pour AM les cinq premières divisions, pour MB les quatorze autres. Ainsi, *il*

Fig. 86.

A M B N

n'existe entre A *et* B *qu'un point* M *dont les distances à ces mêmes points soient dans un rapport donné.*

Il n'existe aussi sur le prolongement de AB *qu'un point* N *dont les distances aux points* A *et* B *soient dans un rapport donné.*

Supposons qu'on ait

$$\frac{AN}{BN}=\frac{p}{q}.$$

Si le point N s'éloigne sur la droite d'une quantité x, on aura

$$\frac{AN}{BN}=\frac{p+x}{q+x}:$$

le rapport diminuera ; si le point N se rapproche vers la gauche d'une quantité x, le rapport deviendra

$$\frac{AN}{BN}=\frac{p-x}{q-x}:$$

il augmentera (*Arith.*, 139). Il n'est donc égal à $\frac{p}{q}$ que pour une seule position du point N.

87. *Toute droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres en parties proportionnelles* (*fig.* 87).

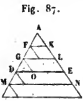


Fig. 87.

Soit le triangle ABC, soit la droite DE parallèle au côté BC. Supposons que les deux segments AD et DB admettent une commune mesure, et qu'elle soit contenue 3 fois dans AD et 2 fois dans DB, par exemple. On aura

$$\frac{AD}{DB}=\frac{3}{2}.$$

Par les points de division F, G, M, on mènera des parallèles à BC ou à DE. Je dis que les divisions que toutes ces parallèles déterminent sur le côté AC sont aussi égales entre elles. Menons GO parallèle à AC, et comparons les deux triangles AFK et GDO. Ces triangles sont égaux, car leurs côtés égaux AF et GD sont adjacents à des angles égaux chacun à chacun comme correspondants. On en conclura AK = GO. Mais la figure GOEL étant un parallélogramme, on aura

$$GO = LE, \quad \text{d'où} \quad AK = LE.$$

On prouverait de la même manière l'égalité de AK et des

autres divisions de AC. AK pourra donc servir de commune mesure aux deux segments AE et EC, et l'on aura

$$\frac{AE}{EC}=\frac{3}{2},$$

puisque cette commune mesure est contenue 3 fois dans AE et 2 fois dans EC.

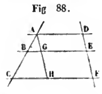
Les segments AD et DB d'une part, AE et EC d'autre part, présentant le même rapport, ces segments seront *proportionnels*, et l'on aura

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

On en déduira (*Alg.*, 49)

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE} \quad \text{et} \quad \frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}.$$

Il résulte du théorème démontré que *deux droites quelconques sont coupées en parties proportionnelles par une série de parallèles* (*fig.* 88).



Soient les deux droites AC et DF coupées par les parallèles AD, BE, CF. On mènera AH parallèle à DF. Le triangle CAH donnera alors

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AG}{GH}.$$

Mais AG = DE, GH = EF (34). On aura donc

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

On aura aussi

$$\frac{AC}{AB}=\frac{DF}{DE} \quad \text{et} \quad \frac{AC}{BC}=\frac{DF}{EF}.$$

88. La *réciproque* du théorème précédent est vraie, c'est-à-dire que *si une droite divise deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, elle est parallèle au troisième côté* (*fig.* 87).

Soit le triangle ABC. Supposons que la droite DE divise les côtés AB et AC en parties proportionnelles : je dis que DE sera parallèle au côté BC. En effet, si l'on menait par le point D une parallèle au côté BC, elle couperait le côté AC en parties proportionnelles à AD et à DB. Le côté AC étant déjà di-

visé au point E de cette manière, cette parallèle passerait nécessairement par le point E (86), c'est-à-dire qu'elle se confondra avec la droite DE.

Si, dans le théorème direct (87), les segments AD et DB n'avaient pas de commune mesure, on aurait recours au mode de démonstration déjà indiqué (63).

89. *La bissectrice de l'angle d'un triangle divise le côté opposé en segments proportionnels aux côtés qui comprennent l'angle (fig. 89).*

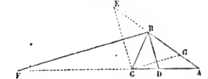


Fig. 89.

Soit le triangle ABC, soit BD la bissectrice de l'angle B : je dis qu'on aura

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{CB}.$$

Par le point C, je mène à BD la parallèle CE jusqu'à la rencontre de AB prolongé. On a alors dans le triangle ACE (87) :

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE}.$$

Considérons le triangle CBE. L'angle en C de ce triangle est égal à l'angle CBD, puisque ces angles sont alternes-internes par rapport aux parallèles CE et BD coupées par la sécante CB. De même, l'angle en E est égal à l'angle DBA, puisque ces angles sont correspondants par rapport aux mêmes parallèles coupées par la sécante EA. Les angles CBD, DBA, étant égaux, il en est de même des angles en C et en E du triangle CBE : ce triangle est donc isocèle, et l'on a $BE = CB$. On a donc bien

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{CB}.$$

90. *La bissectrice de l'angle extérieur d'un triangle coupe le côté opposé en un point dont les distances aux extrémités de ce côté sont proportionnelles aux côtés qui comprennent l'angle intérieur adjacent (fig. 89).*

Considérons l'angle extérieur CBE et menons sa bissectrice BF. Je dis qu'on aura

$$\frac{FA}{FC} = \frac{AB}{CB}.$$

Par le point C, je mène CG parallèle à BF jusqu'à la rencontre du côté AB. Le triangle ABF donne alors (87)

$$\frac{FA}{FC} = \frac{AB}{BG}.$$

Considérons le triangle CBG. Ce triangle sera isocèle : l'angle C est égal à l'angle FBC, puisque ces angles sont alternes-

internes par rapport aux parallèles CG, BF, et à la sécante CB; l'angle G est égal à l'angle FBE, puisque ces angles sont correspondants par rapport aux mêmes parallèles; les deux angles C et G sont donc égaux, et l'on a CB = BG. On a donc bien

$$\frac{FA}{FC} = \frac{AB}{CB}.$$

Les *réciproques* des deux propositions précédentes sont évidentes. Le point D, qui partage AC en segments proportionnels aux côtés AB et CB, étant un point unique (86), toute droite BD qui détermine un point jouissant de cette propriété se confond avec la bissectrice de l'angle B. De même, le point F, situé sur le prolongement de AC, dont les distances aux points A et C forment un rapport égal à celui des côtés AB et CB, étant aussi un point unique (86), toute droite BF qui détermine un point jouissant de cette propriété se confond avec la bissectrice de l'angle extérieur CBE.

91. *Le lieu géométrique de tous les points d'un plan dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné, est une circonférence de cercle* (*fig.* 90).

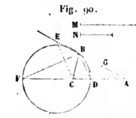


Fig. 90.

Soient les deux points donnés A et C, soient M et N les deux lignes dont le rapport représente le rapport donné. Je détermine sur AC un point D tel, qu'on ait

$$\frac{AD}{DC} = \frac{M}{N}:$$

le point D appartiendra au lieu cherché. Je détermine sur le prolongement de AC un point F tel, qu'on ait

$$\frac{FA}{FC} = \frac{M}{N}:$$

le point F appartiendra au lieu demandé.

Supposons que le point B du plan soit un des points du lieu. On aura alors

$$\frac{AB}{CB} = \frac{M}{N}.$$

Dès lors, si l'on forme le triangle ABC, BD sera la bissectrice de l'angle intérieur ABC, et BF sera la bissectrice de l'angle extérieur CBE (90). Les droites BD et BF étant bissectrices d'angles supplémentaires seront à angle droit (13), et par suite, si l'on décrit une circonférence sur FD comme diamètre, elle passera par le point B. *Tous les points du lieu appartiennent donc à cette circonférence.*

Il reste à prouver que *tous les points de la circonférence*

appartiennent au lieu. Prenons un point B quelconque sur la circonférence dont FD est le diamètre. Joignons-le aux points D et F et formons le triangle ABC. Menons par le point C les parallèles CE et CG à BD et à BF. Ces parallèles seront à angle droit, puisque l'angle DBF est droit : il en résulte que la circonférence décrite sur EG comme diamètre passe par le point C. Mais le triangle ACE donne $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE}$, le triangle ABF donne $\frac{FA}{FC} = \frac{AB}{BG}$: on en conclut, à cause du rapport commun,

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AB}{BG}, \quad \text{d'où} \quad BE = BG.$$

Le point B est donc le centre de la circonférence décrite sur EG comme diamètre, et l'on a

$$BE = CB.$$

L'égalité $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE}$ deviendra donc $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{CB} = \frac{M}{N}$, de sorte que le point B est un point du lieu.

Le lieu géométrique demandé est donc bien la circonférence décrite sur DF comme diamètre, les points D et F étant ceux de la ligne AC qui répondent à la question.

II. — De la similitude.

92. Deux polygones d'un même nombre de côtés sont *semblables,* lorsqu'ils ont leurs angles égaux chacun à chacun et compris entre côtés proportionnels, les côtés proportionnels étant d'ailleurs disposés dans le même ordre.

On appelle *homologues* les parties qui se correspondent dans deux polygones semblables : ainsi, les sommets des angles égaux sont des points homologues, les diagonales qui joignent des sommets homologues sont des lignes homologues.

On appelle *rapport de similitude* de deux polygones semblables le rapport constant qui lie deux côtés homologues.

On voit facilement qu'on peut, dans un polygone quelconque, changer la proportion des côtés sans faire varier les angles, ou faire varier les angles sans changer les côtés. Ainsi, étant donné le polygone ABCDE (*fig.* 91), si l'on mène IH parallèle à EA, on formera un nouveau pentagone qui aura les mêmes angles que le pentagone proposé; mais la proportion des côtés ne sera plus la même, puisque les côtés ED et AB sont devenus plus petits, tandis que les côtés BC et CD n'ont pas changé. On pourrait aussi conserver aux

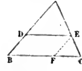
Fig. 91.

côtés les mêmes longueurs et altérer les différents angles, en supposant des articulations aux différents sommets, et en rapprochant par exemple le sommet A du sommet D. Il résulte de cette remarque que, si l'on considère deux polygones quelconques, la proportionnalité des côtés ne sera pas une conséquence de l'égalité des angles, et réciproquement.

Cette dépendance n'a lieu que pour les triangles, et la théorie de leur similitude s'en trouve beaucoup simplifiée, comme on va le voir.

93. *Si l'on coupe un triangle par une parallèle à l'un de ses côtés, le triangle partiel qu'on détermine est semblable au triangle proposé* (*fig.* 92).

Fig. 92.



Soit le triangle ABC. Je mène la parallèle DE au côté BC. Les deux triangles ABC, ADE, ont évidemment leurs angles égaux chacun à chacun. DE étant parallèle à BC, on a

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Traçons EF parallèle à AB, on aura

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BF}.$$

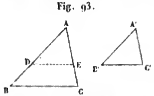
La figure DEFB étant un parallélogramme, on peut remplacer BF par son égale DE et écrire

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}.$$

Les deux triangles ABC, ADE, ayant leurs angles égaux et leurs côtés homologues proportionnels, sont semblables.

94. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs angles égaux chacun à chacun* (*fig.* 93).

Fig. 93.



Soient les deux triangles ABC, A'B'C'. L'angle A est égal à l'angle A', l'angle B égal à l'angle B', l'angle C égal à l'angle C'. Prenons AD = A'B' et AE = A'C' : joignons DE. Les deux triangles ADE, A'B'C', seront égaux d'après le premier cas d'égalité (17). L'angle D sera donc égal à l'angle B' et par conséquent à l'angle B. Les deux angles D et B étant dans la position de correspondants par rapport aux droites DE, BC, et à la sécante AB, ces droites seront paral-

lèles, et le triangle ADE sera semblable au triangle ABC (93) : il en sera donc de même du triangle A'B'C'.

95. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs côtés proportionnels chacun à chacun (fig. 93).*

Soient les deux triangles ABC, A'B'C', et supposons qu'on ait

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Prenons AD = A'B', AE = A'C' : joignons DE. On aura $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$. La ligne DE sera parallèle à BC, et le triangle ADE sera semblable au triangle ABC (93). On aura alors

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}.$$

Si l'on compare cette suite de rapports égaux à celle qui résulte de l'hypothèse, on verra que les cinq premiers termes étant les mêmes de part et d'autre, on doit aussi avoir DE = B'C'. Les deux triangles ADE, A'B'C', sont donc égaux d'après le troisième cas d'égalité (19) et le triangle A'B'C' est semblable au triangle ABC.

Les deux théorèmes précédents prouvent que l'égalité des angles entraîne, pour les triangles, la proportionnalité des côtés, et réciproquement. Il sera donc permis de définir deux triangles semblables, *deux triangles qui sont équiangles*, par exemple. Au point de vue pratique, il suffira de vérifier que les deux triangles considérés ont deux angles égaux chacun à chacun, puisque la somme des angles d'un triangle est constante.

Il existe pour les triangles d'autres caractères très-simples de similitude, utiles à connaître, et que nous allons parcourir.

96. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels (fig. 93).*

Soient les deux triangles ABC, A'B'C'. On a l'angle A égal à l'angle A' et, de plus, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$. Prenons AD = A'B', AE = A'C', et joignons DE. Les deux triangles ADE et A'B'C' seront égaux, d'après le premier cas d'égalité. On aura d'ailleurs

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Par conséquent, DE sera parallèle à BC, le triangle ADE sera semblable au triangle ABC, et il en sera de même du triangle A'B'C'.

97. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun.*

Nous avons vu (35, 36) que deux angles qui avaient leurs côtés parallèles ou perpendiculaires étaient égaux ou supplémentaires. Désignons les angles des deux triangles considérés par A et A′, B et B′, C et C′. On ne pourra faire sur les relations qui doivent lier ces angles deux à deux, que les quatre hypothèses suivantes :

$$\begin{array}{lll} A + A' = 2^d, & B + B' = 2^d, & C + C' = 2^d. \\ A + A' = 2^d, & B + B' = 2^d, & C = C'. \\ A + A' = 2^d, & B = B', & C = C'. \\ A = A', & B = B', & C = C'. \end{array}$$

La première hypothèse doit être rejetée, la somme des angles des deux triangles ne pouvant être égale à six droits. Elle ne peut pas non plus être égale à quatre droits augmentés de deux fois l'angle C : la seconde hypothèse est donc aussi inadmissible. La troisième hypothèse entraîne la condition $A = A'$: elle n'est donc qu'un cas particulier (celui où les triangles proposés sont rectangles) de la quatrième hypothèse, qui est la seule vraie. Les triangles considérés étant équiangles sont semblables (95).

Il faut remarquer que les côtés proportionnels sont toujours, dans les triangles semblables, opposés aux angles égaux. Dans le dernier cas examiné, les côtés homologues sont parallèles ou perpendiculaires entre eux.

98. *Deux parallèles sont coupées en parties proportionnelles par une série de sécantes issues d'un même point (fig. 94).*

Fig. 94.

Soient les deux parallèles AD, EH, coupées par les sécantes OA, OB, OC, OD.

Les triangles OAB, OEF, sont semblables (93) et donnent

$$\frac{OB}{OF} = \frac{AB}{EF}.$$

De même, la similitude des triangles OBC, OFG, permet d'écrire

$$\frac{OB}{OF} = \frac{BC}{FG}.$$

On aura donc

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}.$$

On prouverait de la même manière que

$$\frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}.$$

La *réciproque* de cette proposition est vraie. *Si les deux parallèles* AD, EH, *sont coupées proportionnellement par une série de sécantes* AE, BF, CG, DH, *ces sécantes aboutissent à un même point* O.

Supposons que les deux droites AE et CG se rencontrent en un certain point O. On a par hypothèse

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}.$$

Joignons OF : cette ligne prolongée devra couper AC en parties proportionnelles aux segments EF et FG, d'après le théorème direct. Or AC est déjà divisée de cette manière au point B; OF prolongée passera donc par le point B, c'est-à-dire que les trois points B, F, O, sont en ligne droite. On prouverait de même que DH prolongée passe par le point O.

99. *Deux polygones semblables peuvent toujours se décomposer en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés* (*fig.* 95).

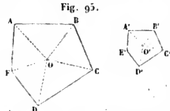


Fig. 95.

Soient les deux polygones semblables ABCDE, A'B'C'D'E'. Je prends un point O quelconque dans l'intérieur du premier polygone, et je le décompose en triangles en joignant ce point O à tous ses sommets. Il faut déterminer dans le second polygone le point O', homologue du point O. Pour cela, je fais en A', avec A'B', un angle égal à l'angle BAO et en B' un angle égal à l'angle ABO. Le triangle ABO et le triangle A'B'O' sont semblables (95), et le point O' est l'homologue du point O. Je joins le point O' à tous les sommets du polygone A'B'C'D'E'. Comparons les triangles BOC, B'O'C'. Les deux polygones étant semblables, l'angle B du premier est égal à l'angle B' du second; les deux triangles AOB, A'O'B', étant semblables par construction, l'angle ABO est égal à l'angle A'B'O'. L'angle OBC, différence des angles B et ABO, est donc égal à l'angle O'B'C', différence des angles B' et A'B'O'. La similitude des deux polygones entraîne l'égalité

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}:$$

celle des deux triangles AOB, A′O′B′, donne

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{O'B'};$$

on aura donc

$$\frac{OB}{O'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Par suite, les deux triangles BOC, B′O′C′, seront semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

On prouverait de la même manière la similitude des triangles COD, C′O′D′, DOE, D′O′E′, EOA, E′O′A′.

Il faut remarquer que le point O pourrait se confondre avec l'un des sommets A du polygone ABCDE; son homologue O′ se confondrait alors avec le sommet A′. Les deux polygones seraient divisés en triangles semblables par les diagonales homologues partant des sommets A et A′. Cette remarque prouve que, dans deux polygones semblables, le rapport de deux diagonales homologues est égal au rapport de similitude des deux polygones. *Ce rapport est celui de deux lignes homologues tracées d'une manière quelconque dans les deux polygones.*

Le point O pourrait être *extérieur* au polygone ABCDE. Le même théorème subsisterait, en convenant de regarder le polygone comme composé d'une série de triangles, les uns *additifs*, les autres *sonstractifs*. Ainsi (*fig.* 96) on pourra regarder le polygone ABCDE comme composé des triangles additifs SAB, SAE, SED, et des triangles soustractifs SBC, SCD. Le raisonnement sera le même que précédemment.

100. *Deux polygones composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés, sont semblables* (*fig.* 95).

Soient les deux polygones ABCDE, A′B′C′D′E′: Supposons qu'ils soient décomposés en triangles semblables OAB, O′A′B′, OBC, O′B′C′, OCD, O′C′D′, etc. Les angles des deux polygones seront égaux comme sommes d'angles égaux. Si l'on compare, par exemple, l'angle B et l'angle B′, on verra que l'angle B est la somme des angles ABO, OBC, et que l'angle B′ est la somme des angles A′B′O′, O′B′C′. Les angles ABO et A′B′O′, OBC et O′B′C′, sont d'ailleurs égaux par suite de la similitude des triangles OAB et O′A′B′, OBC et O′B′C′. La similitude de ces mêmes triangles permet de poser

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BO}{B'O'}, \quad \frac{BO}{B'O'} = \frac{BC}{B'C'};$$

c'est-à-dire

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

On prouverait de même que

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}, \text{ etc.}$$

Les deux polygones ont donc leurs angles égaux et leurs côtés homologues proportionnels : ils sont donc semblables.

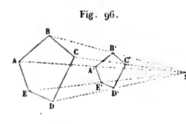
En supposant que le point O se confonde avec le sommet A, chacun des polygones considérés comprend $n-2$ triangles, en désignant par n le nombre des côtés de ces polygones. La similitude de chaque couple de triangles exigeant 2 conditions, la similitude des deux polygones exigera $2n-4$ conditions. Leur égalité en exige $2n-3$ (40). C'est là une loi générale, le nombre des conditions d'égalité surpasse toujours de 1 le nombre des conditions de similitude, parce qu'il faut dans ce cas ajouter aux conditions de similitude cette condition particulière, que le rapport de similitude est égal à 1 : la proportionnalité des côtés se change alors en égalité.

101. *Si l'on joint un point quelconque* S *à tous les sommets d'un polygone* ABCDE, *et si l'on prend sur les droites* SA, SB, SC, *etc., des points* A', B', C', *etc., tels, qu'on ait*

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} = \frac{SD}{SD'} = \frac{SE}{SE'},$$

les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E', *sont semblables* (*fig.* 96).

Fig. 96.



En effet, les deux triangles SAB, SA'B', ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables : le côté AB sera parallèle au côté A'B', et l'on aura

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{SB}{SB'}.$$

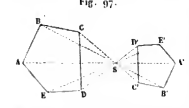
En comparant les deux triangles SBC, SB'C', on prouverait le parallélisme des côtés BC, B'C', et l'égalité des rapports $\frac{BC}{B'C'}$, et $\frac{SB}{SB'}$, etc. Les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E', ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, auront tous

leurs angles égaux ; ils auront, de plus, tous leurs côtés proportionnels : ils seront donc semblables.

Remarquons que les points A′, B′, C′, etc., peuvent être pris soit sur les côtés SA, SB, SC, etc., soit sur les prolongements de ces côtés : le point S s'appelle *centre de similitude*, les droites SA, SA′, SB, SB′, etc., sont les *rayons vecteurs* des points A, A′, B, B′, etc. Lorsque les deux polygones sont du même côté du point S, ils sont *semblablement placés ;* lorsqu'ils sont de part et d'autre du point S, ils sont *inversement placés.*

La *réciproque* du théorème qu'on vient de démontrer est vraie. *Si deux polygones semblables ont leurs côtés parallèles, les droites qui joignent les sommets homologues se croisent en un même point qui est le centre de similitude des deux polygones* (*fig.* 97).

Fig. 97.



Soient les deux polygones ABCDE, A′B′C′D′E′, qui remplissent les conditions de l'énoncé. Joignons AA′ et BB′. Soit S le point de rencontre de ces deux droites. Les deux triangles SAB, SA′B′, seront semblables comme équiangles, puisque AB et A′B′ sont parallèles, et l'on aura

$$\frac{AS}{A'S}=\frac{BS}{B'S}=\frac{AB}{A'B'}.$$

Joignons SC et SC′, et comparons les triangles BSC, B′SC′. L'angle en B sera égal à l'angle en B′, à cause des parallèles BC, B′C′. On aura d'ailleurs

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BS}{B'S},$$

par suite de la similitude des polygones. On aura donc aussi, d'après ce qui précède,

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{BS}{B'S};$$

et les deux triangles BSC, B′SC′, seront semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. Ils seront donc équiangles, et les rayons SC et SC′ ne formeront qu'une seule et même ligne droite. On prouverait de même que DD′ et EE′ passent par le point S.

Plusieurs instruments ingénieux employés pour réduire les dessins, sont basés sur le théorème que nous venons d'établir : nous citerons le *pantographe*.

102. *Le rapport des périmètres de deux polygones semblables est égal au rapport de similitude des deux polygones* (*fig.* 97).

Les deux polygones ABCDE, A′B′C′D′E′, étant semblables, on a

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}.$$

Un théorème connu permet donc de poser immédiatement

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

Le numérateur du premier membre de l'égalité obtenue représente la somme des côtés du polygone ABCDE, c'est-à-dire son *périmètre* P; le dénominateur de ce même premier membre représente le périmètre P′ du polygone A′B′C′D′E′. On aura donc

$$\frac{P}{P'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

III. — Relations métriques entre les différentes parties d'un triangle.

103. Pour simplifier les énoncés, on appelle en géométrie *produit de deux lignes* le produit des nombres qui expriment leurs mesures par rapport à la même unité; *carré d'une ligne*, le carré du nombre qui exprime sa mesure.

Si l'on a

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D},$$

A, B, C, D, représentant des longueurs ou les nombres qui les mesurent lorsqu'on les rapporte à une même unité, on dit que D est une *quatrième proportionnelle* à A, B, C.

Si les moyens B et C sont égaux, on aura

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{D}:$$

D est alors une *troisième proportionnelle* à A et B. Dans ce cas, B, à son tour, est une *moyenne proportionnelle* entre A et D, et l'on a $B^2 = A \times D$.

Fig. 98.

On appelle *projection* d'un point A sur une ligne droite XY, le pied *a* de la perpendiculaire abaissée du point A sur XY. Si l'on donne une droite limitée AB, sa projection sur XY est la longueur *ab* qui sépare les projections de ses points extrêmes (*fig.* 98).

104. *Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle*

on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse : chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse elle-même; la perpendiculaire abaissée est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse (*fig.* 99).

Fig. 99.



Soit le triangle rectangle ABC, soit la perpendiculaire AD abaissée du sommet A sur l'hypoténuse BC. Cette perpendiculaire partagera le triangle proposé en deux triangles partiels, qui lui seront semblables et qui seront, par conséquent, semblables entre eux. En effet, les deux triangles rectangles ABC et ABD ayant l'angle aigu B commun, sont équiangles et semblables; il en est de même des triangles rectangles ABC et ADC, qui ont l'angle aigu C commun.

Si l'on compare successivement les triangles ABD et ABC, ADC et ABC, on pourra donc écrire

$$\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BC}, \quad \text{d'où} \quad AB^2=BD.BC;$$

$$\frac{CD}{AC}=\frac{AC}{BC}, \quad \text{d'où} \quad AC^2=CD.BC.$$

Il faut se rappeler que les côtés proportionnels sont les côtés opposés aux angles égaux.

Si l'on compare ensuite les triangles partiels ABD, ADC, on aura

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}, \quad \text{d'où} \quad AD^2=BD.CD.$$

Si l'on décrit un cercle sur BC comme diamètre, il passera par le sommet A (65); on peut, par conséquent, énoncer sous la forme suivante les propriétés démontrées :

Toute corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre qui passe par l'une de ses extrémités, et sa projection sur ce diamètre; la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la circonférence sur un diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce diamètre.

105. *Si l'on exprime numériquement, par rapport à une même unité, les trois cotés d'un triangle rectangle, le carré du nombre qui représente l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des nombres qui représentent les deux côtés de l'angle droit* (*fig.* 99).

Le théorème précédent vient de nous donner les deux égalités

$$AB^2=BD.BC,$$
$$AC^2=CD.BC.$$

Ajoutons-les membre à membre, et mettons dans le second membre BC en facteur commun; il viendra

$$AB^2 + AC^2 = (BD + CD).BC.$$

BD + CD = BC. On aura donc

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

On peut facilement, en ayant égard à cette relation, trouver l'un des côtés d'un triangle rectangle, lorsqu'on connaît les deux autres.

Si l'on donne les côtés de l'angle droit égaux à 4^M et à 3^M, on aura immédiatement, en représentant l'hypoténuse par z,

$$z^2 = 4^2 + 3^2 = 25, \quad \text{d'où} \quad z = 5.$$

Si l'on donne l'hypoténuse égale à 13^M et l'un des côtés de l'angle droit égal à 5^M, on aura immédiatement, en représentant par x le côté inconnu,

$$13^2 = 5^2 + x^2, \quad \text{d'où} \quad x^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \quad \text{et} \quad x = 12.$$

Le rapport de la diagonale du carré à son côté est exprimé par la quantité incommensurable $\sqrt{2}$.

Fig. 100.

Le triangle ABC (*fig.* 100) étant rectangle et isocèle, donne

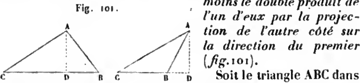
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2,$$

d'où

$$\frac{AC^2}{AB^2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{AC}{AB} = \sqrt{2}.$$

On doit remarquer que les théorèmes relatifs à la similitude des triangles (94, 95), joints à celui du carré de l'hypoténuse, sont les plus importants de la géométrie. Car toutes les figures peuvent se décomposer en triangles quelconques, et tout triangle quelconque peut se décomposer en deux triangles rectangles par une perpendiculaire abaissée de l'un des sommets sur le côté opposé. On aura donc constamment à appliquer les propositions indiquées.

106. *Dans tout triangle, le carré du côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins le double produit de l'un d'eux par la projection de l'autre côté sur la direction du premier* (*fig.* 101).



Soit le triangle ABC dans lequel l'angle C est aigu. Considérons le côté AB opposé à cet angle. Du sommet A, j'a-

baisse sur le côté opposé la perpendiculaire AD : elle tombera en dedans ou en dehors du triangle, suivant que l'angle B sera aigu ou obtus. Dans le premier cas, on aura

$$DB = BC - CD;$$

dans le second, on aura

$$DB = CD - BC.$$

Dans les deux cas, on aura

$$DB^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.$$

Le triangle rectangle ABD donne d'ailleurs

$$AB^2 = AD^2 + DB^2.$$

On aura donc, en remplaçant DB^2 par sa valeur,

$$AB^2 = AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.$$

Le triangle rectangle ADC permettant de remplacer

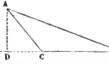
$$AD^2 + CD^2 \text{ par } AC^2,$$

il viendra

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC.CD.$$

107. *Dans tout triangle, le carré du côté opposé à un angle obtus est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, plus le double produit de l'un d'eux par la projection de l'autre côté sur la direction du premier* (*fig.* 102).

Fig. 102.



Soit le triangle ABC dans lequel l'angle C est obtus. Considérons le côté AB opposé à cet angle. Du sommet A, j'abaisse sur le côté opposé la perpendiculaire AD : elle tombera en dehors du triangle, et l'on aura

$$DB = BC + CD,$$

d'où

$$DB^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC.CD.$$

Le triangle rectangle ABD donne d'ailleurs

$$AB^2 = AD^2 + DB^2.$$

On aura donc, en remplaçant DB^2 par sa valeur,

$$AB^2 = AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.CD.$$

Le triangle rectangle ADC permettant de substituer AC^2 à

$AD^2 + CD^2$, il viendra

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC.CD.$$

Si l'on rapproche les théorèmes précédents, on voit que *l'angle d'un triangle est nécessairement aigu, obtus ou droit, suivant que le carré du côté opposé est inférieur, supérieur ou égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Étant donnés $AB = 7^m$, $AC = 5^m$, $BC = 4^m$, proposons-nous de déterminer la hauteur du sommet A au-dessus du côté BC ou la perpendiculaire AD. Comme 7^2 l'emporte sur $5^2 + 4^2$, l'angle opposé au côté AB est obtus, et l'on peut poser

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC.CD,$$

c'est-à-dire

$$49 = 16 + 25 + 8CD.$$

On en déduit

$$CD = 1.$$

Le triangle rectangle ADC donne alors

$$AD = \sqrt{25 - 1} \quad \text{ou} \quad AD = \sqrt{24} = 4,899$$

à moins de 0,0005 par excès.

108. *Dans tout triangle, la somme des carrés de deux côtés est égale à deux fois la somme des carrés de la moitié du troisième côté et de la médiane correspondante* (*fig.* 103).

Fig. 103.

Soit le triangle ABC : la *médiane* qui correspond au côté BC est la droite AD qui joint le sommet A au milieu D du côté BC. L'un des angles en D est aigu, l'autre est obtus, sauf le cas du triangle isocèle; mais alors le théorème est évident. Le triangle ADC donne

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 + 2CD.DE.$$

Le triangle ADB donne à son tour

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD.DE.$$

Si l'on ajoute ces deux égalités membre à membre et si l'on remarque que CD = BD, il viendra, en réduisant,

$$AC^2 + AB^2 = 2(CD^2 + AD^2).$$

Si la droite BC ne change pas et si la somme des carrés des côtés AC et AB reste constante, ces côtés variant eux-mêmes, l'égalité précédente prouve que la valeur de la médiane AD restera constante. Par conséquent, *le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est con-*

stante, est une circonférence de cercle qui a pour centre le milieu de la droite qui joint les deux points fixes.

Si l'on a

$$AC^2 + AB^2 = m^2,$$

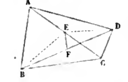
il viendra

$$m^2 = 2(CD^2 + AD^2), \quad \text{d'où} \quad AD = \sqrt{\frac{m^2}{2} - CD^2}.$$

Telle sera l'expression du rayon de la circonférence. Le problème est impossible, lorsqu'on a $m^2 < 2CD^2$.

La somme des carrés des côtés d'un quadrilatère quelconque est égale à la somme des carrés des diagonales, augmentée de quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux des diagonales (fig. 104).

Fig. 104.



Soit le quadrilatère ABCD. Soient E et F les milieux des diagonales AC et BD. Les deux triangles ADC, ABC, donneront

$$AD^2 + DC^2 = 2(AE^2 + DE^2),$$
$$AB^2 + BC^2 = 2(AE^2 + BE^2).$$

Si l'on ajoute ces deux égalités membre à membre, il vient

$$AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = 4AE^2 + 2(BE^2 + DE^2).$$

Le triangle BED donne d'ailleurs

$$2(BE^2 + DE^2) = 4(BF^2 + EF^2).$$

On aura donc

$$AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = 4AE^2 + 4BF^2 + 4EF^2.$$

Mais de $2AE = AC$, on déduit $4AE^2 = AC^2$; de même, de $2BF = BD$, on déduit $4BF^2 = BD^2$. Il restera donc

$$AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2.$$

S'il s'agit d'un parallélogramme, la distance EF devient nulle. Par conséquent, *dans tout parallélogramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales.*

109. *Dans tout triangle, la différence des carrés de deux côtés est égale au double produit du troisième côté par la projection sur sa direction de la médiane correspondante (fig. 103).*

Nous avons déjà trouvé les deux égalités

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 + 2CD.DE,$$
$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD.DE.$$

Retranchons-les membre à membre, en remarquant que $CD = BD$: il viendra

$$AC^2 - AB^2 = 4 CD.DE,$$

c'est-à-dire

$$AC^2 - AB^2 = 2 BC.DE.$$

Remarquons que si les points B et C restent fixes, tandis que, les côtés AC et AB variant, la différence de leurs carrés demeure constante, l'égalité précédente prouve que la projection DE ou la position du point E reste aussi constante. Par conséquent, *le lieu des points dont la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante, est une perpendiculaire à la droite qui joint les points fixes.*

Si l'on a

$$AC^2 - AB^2 = m^2,$$

il viendra

$$m^2 = 2 BC.DE, \quad \text{d'où} \quad DE = \frac{m^2}{2 BC}.$$

Telle est la valeur de DE. On portera cette valeur de DE, à partir du point D milieu de BC, à droite ou à gauche de ce point, et le lieu se composera en réalité des deux perpendiculaires élevées à BC par les points obtenus.

110. *Le produit de deux cotés d'un triangle est égal au carré de la bissectrice de l'angle qu'ils forment, augmenté du produit des deux segments que cette bissectrice détermine sur le troisième côté* (*fig.* 105).

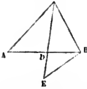


Fig. 105.

Soit le triangle ABC, soit la bissectrice CD de l'angle C. Formons l'angle DBE égal à la moitié de l'angle C. Les deux triangles ACD et DBE seront évidemment équiangles et semblables. L'angle CAD sera donc égal à l'angle DEB, et il en résultera la similitude des deux triangles ACD, CBE. On aura, par suite de cette similitude,

$$\frac{AC}{CE} = \frac{CD}{CB}, \quad \text{d'où} \quad AC.CB = CD.CE.$$

On peut remplacer CE par $CD + DE$: on aura alors

$$AC.CB = CD^2 + CD.DE.$$

La similitude des triangles ACD, DBE, donne d'ailleurs

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{DE}, \quad \text{d'où} \quad CD.DE = AD.DB.$$

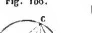
En substituant dans l'égalité précédente, nous aurons donc

$$AC.CB = CD^2 + AD.DB.$$

Nous pourrons, à l'aide des théorèmes établis (**106, 107, 108, 110**), calculer les *hauteurs* des différents sommets d'un triangle par rapport aux côtés opposés, les *médianes* de ce triangle, les *bissectrices* de ses angles, en fonction des trois côtés du triangle.

Le produit de deux côtés d'un triangle est encore *égal au produit de la hauteur qui correspond au troisième côté par le diamètre du cercle circonscrit au triangle* (*fig.* 106).

Fig. 106.



Lorsqu'un triangle est inscrit dans une circonférence, on dit que la circonférence lui est *circonscrite*.

Soit le triangle ABC inscrit dans la circonférence O, soit CE perpendiculaire sur AB. Les deux triangles rectangles ACD, CBE sont semblables; car l'angle ADC et l'angle EBC sont inscrits dans le même segment. On aura donc

$$\frac{AC}{CE} = \frac{CD}{CB}, \quad \text{d'où} \quad AC.CB = CE.CD.$$

IV. — Des lignes proportionnelles dans le cercle.

111. *Si d'un point pris dans le plan d'un cercle on lui mène des sécantes, le produit des distances de ce point aux intersections de chaque sécante avec la circonférence est constant* (*fig.* 107).

Fig. 107.

Supposons d'abord le point donné intérieur au cercle. Par ce point E, menons deux cordes quelconques AB et CD. Joignons AC et BD. Nous formerons deux triangles AEC, DEB; ces triangles sont équiangles, car les angles en E sont opposés par le sommet, et les angles en C et en B sont égaux comme inscrits dans le même segment. La similitude des triangles considérés permettra donc de poser

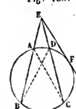
$$\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}, \quad \text{d'où} \quad AE.BE = CE.DE.$$

On énonce quelquefois cette importante propriété, en disant que *deux cordes quelconques se coupent dans une circonférence en parties inversement proportionnelles.*

Supposons maintenant le point donné extérieur au cercle. Par ce point E, menons deux sécantes quelconques EAB, EDC

(*fig.* 108). Joignons AC et BD. Les deux triangles AEC, DEB seront semblables. En effet, ils ont l'angle E commun, et les angles C et B sont égaux comme inscrits dans le même segment. On pourra donc poser

Fig. 108.



$$\frac{EC}{EB} = \frac{EA}{ED}, \quad \text{d'où} \quad EC.ED = EB.EA.$$

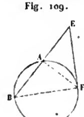
On énonce quelquefois cette propriété en disant que *deux sécantes issues d'un même point sont inversement proportionnelles à leurs parties extérieures.*

Si l'on conçoit que la sécante EC tourne autour du point E, de manière à devenir la tangente EF, le théorème ne cessera pas d'être vrai, mais à la limite la sécante entière se confondra avec sa partie extérieure. On aura donc

$$EF^2 = EB.EA.$$

Ce qui prouve que, *lorsqu'une tangente et une sécante partent d'un même point, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure* (*fig.* 109).

Fig. 109.

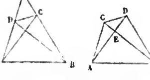


On peut d'ailleurs le démontrer directement comme il suit. Soient la tangente EF et la sécante EAB. Joignons AF et BF. Les deux triangles EBF, EAF, sont semblables. En effet, ils ont l'angle E commun, et l'angle EBF est égal à l'angle EFA, puisque ces deux angles ont pour mesure la moitié du même arc AF. On aura donc

$$\frac{EB}{EF} = \frac{EF}{EA}, \quad \text{d'où} \quad EF^2 = EB.EA.$$

112. La *réciproque* de la proposition précédente est vraie. *Lorsque deux droites* AD, BC, *prolongées s'il y a lieu, se coupent en un point* E *tel, qu'on ait*

Fig. 110.



$$AE.DE = BE.CE,$$

leurs extrémités A, D, B, C, *sont situées sur une même circonférence* (*fig.* 110).

Divisons les deux membres de l'égalité donnée par BE.DE.

On aura

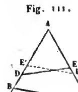
$$\frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE}.$$

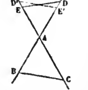
Les deux triangles ACE, BDE, auront donc un angle commun ou un angle égal compris entre côtés proportionnels. Ces triangles, étant alors semblables, seront équiangles. Par conséquent, si l'on décrit sur CD comme corde un segment capable de l'angle CAD, la circonférence qui passera par les trois sommets C, A, D, passera aussi par le quatrième sommet B; en effet, les angles en A et en B sont égaux d'après ce qu'on vient de dire.

113. Lorsque deux droites forment respectivement des angles égaux avec les côtés d'un même angle, on leur donne le nom de droites *anti-parallèles*.

Soit l'angle A coupé par les droites BC, DE; si les angles ABC, AED, sont égaux, les droites BC et DE sont anti-parallèles (*fig.* 111). Prenons AE′ = AE et AD′ = AD, joignons D′E′ : les deux triangles ADE, AD′E′ seront égaux, et l'angle AED sera égal à l'angle AE′D′. L'angle ABC sera donc lui-même égal à l'angle AE′D′, et la droite BC sera parallèle à la droite E′D′. On aura donc

Fig. 111.





$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AD'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}, \quad \text{d'où} \quad AB.AD = AC.AE.$$

Les distances du sommet de l'angle aux points d'intersection de chacun de ses cotés avec les deux droites anti-parallèles, forment donc un produit constant.

Si le point D se confondait avec le point B, on aurait

$$AB^2 = AC.AE.$$

Lorsque les deux droites anti-parallèles se croisent en un même point sur l'un des côtés de l'angle, la distance du sommet à ce point est donc moyenne proportionnelle entre les segments comptés sur l'autre côté de l'angle.

La propriété qu'on vient de démontrer permettrait de rendre plus rapide l'exposition de quelques-uns des théorèmes précédents. Considérons, par exemple (*fig.* 107), les cordes AB, CD. Les angles en A et en D étant égaux comme inscrits dans le même segment, les droites AC, DB, sont anti-parallèles par rapport aux côtés de l'angle E : on aura donc immé-

diatement

$$AE.BE = CE.DE.$$

On voit que deux droites anti-parallèles déterminent deux triangles semblables, qui deviennent semblablement placés par *renversement.*

V.—Problèmes sur les lignes proportionnelles.

114. *Division d'une ligne droite en un certain nombre de parties égales (fig. 112).*

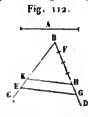


Fig. 112.

Soit A à diviser en cinq parties égales. Je forme un angle quelconque CBD et, sur le côté BC, je porte une longueur BE égale à la droite A. Sur l'autre côté BD, je porte, à la suite l'une de l'autre, cinq fois de suite la longueur arbitraire BF. Soient H et G les deux derniers points de division. Je joins GE et, par le point H, je mène HK parallèle à GE. EK sera la cinquième partie de BE ou de A. On a, en effet, à cause des parallèles,

$$\frac{EK}{BE} = \frac{GH}{BG} = \frac{1}{5}.$$

115. *Division d'une ligne droite en parties proportionnelles à des lignes données ou à des nombres donnés (fig. 113).*

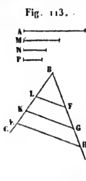


Fig. 113.

Soit à diviser la droite A en parties proportionnelles aux droites M, N, P. Je forme un angle quelconque CBD et, sur le côté BC, je porte une longueur BE égale à A. Sur l'autre côté BD, je porte successivement des longueurs BF, FG, GH, respectivement égales aux longueurs M, N, P. Je joins le point H au point E, et je mène à la droite HE les parallèles GK, FL. La droite BE ou A sera divisée aux points L et K, comme l'exige l'énoncé. On aura, en effet, à cause des parallèles,

$$\frac{BL}{LK} = \frac{BF}{FG} = \frac{M}{N} \quad \text{et} \quad \frac{LK}{KE} = \frac{FG}{GH} = \frac{N}{P},$$

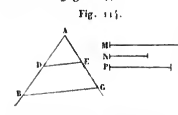
d'où

$$\frac{BL}{M} = \frac{LK}{N} = \frac{KE}{P}.$$

Si l'on devait partager A proportionnellement à des nombres donnés, on représenterait ces nombres par des droites en faisant choix d'une certaine unité, et l'on opérerait comme on vient de l'indiquer.

116. *Construire la quatrième proportionnelle à trois droites données (fig. 114).*

Fig. 114.



Soient M, N, P, les trois droites données. Je forme un angle quelconque BAC. Sur le côté AB, je prends AB = M et AD = N; je prends, sur le côté AC, AC = P. Je joins BC et, par le point D, je mène DE parallèle à BC. AE sera la quatrième proportionnelle demandée; car on aura

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE} \quad \text{ou} \quad \frac{M}{N}=\frac{P}{AE} \quad (103).$$

Si les lignes N et P étaient égales, AE serait la troisième proportionnelle aux lignes M et N.

117. *Construire la moyenne proportionnelle à deux lignes données (fig. 115).*

Fig. 115.

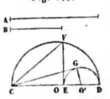
Soient les deux lignes données A et B. Je porte ces lignes, de C en D et de D en E, sur une droite indéfinie. Sur CE comme diamètre, je décris une demi-circonférence. J'élève par le point D, DF perpendiculaire au diamètre : DF est la moyenne proportionnelle demandée : on a en effet

$$\overline{DF}^2 = CD.DE = A.B \quad (104).$$

Remarquons que, si les lignes A et B sont inégales, le rayon OF sera toujours plus grand que la perpendiculaire FD. On vérifie ainsi géométriquement que la moyenne proportionnelle à deux lignes inégales est plus petite que leur moyenne arithmétique.

Lorsque les lignes A et B sont trop grandes pour qu'il soit commode de les porter à la suite l'une de l'autre, on opère comme il suit. On prend sur une droite indéfinie (*fig.* 116) CD = A, CE = B. On décrit sur CD comme diamètre une demi-circonférence, et au point E on élève EF perpendiculaire au diamètre. La moyenne proportionnelle demandée sera la corde CF. On a en effet

Fig. 116.



$$\overline{CF}^2 = CD.CE = A.B \quad (104).$$

On aurait pu aussi, dans le cas considéré, décrire une demi-circonférence sur ED comme diamètre : ED représente la différence des deux lignes données. Si l'on mène, par le point C, une tangente CG à cette circonférence, CG représentera la

moyenne proportionnelle cherchée ; car on aura encore

$$\overline{CG}^2 = CD.CE = A.B \quad (111).$$

On a évidemment $CO' = B + \frac{A - B}{2} = \frac{A + B}{2}$. De même, $O'G = O'D = \frac{A - B}{2}$. Le triangle CO'G est d'ailleurs rectangle en G. Il en résulte que *la demi-somme de deux lignes, leur moyenne proportionnelle et leur demi-différence, peuvent être représentées par les trois côtés d'un triangle rectangle.*

118. *Construire deux droites connaissant leur somme et leur produit* (*fig.* 117).

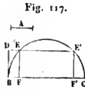


Fig. 117.

Soit BC la somme donnée, soit A la droite dont le carré égale le produit donné. Sur BC comme diamètre, je décris une demi-circonférence. Au point B, j'élève sur le diamètre BC la perpendiculaire BD et je la prends égale à A. Par le point D ainsi obtenu, je mène la parallèle DEE' au diamètre BC. Cette parallèle coupe généralement la circonférence en deux points E et E'; par ces points, j'abaisse sur le diamètre BC les perpendiculaires EF, E'F'. Les deux droites demandées seront BF et FC ou BF' et F'C : ces deux solutions n'en font qu'une seule, car on a évidemment $BF' = FC$ et $F'C = BF$; on a bien d'ailleurs $BF + FC = BC$ et $BF.FC = \overline{EF}^2 = A^2$.

Pour que la parallèle DEE' rencontre la circonférence, il faut que A ne surpasse pas le rayon de la circonférence ou la moitié de la somme BC : A étant égale à $\frac{BC}{2}$, la parallèle devient tangente à la circonférence. Le produit de deux lignes dont la somme est constante est donc maximum lorsque ces deux lignes sont égales. Nous retrouvons ainsi par la géométrie un théorème déjà démontré au point de vue algébrique.

119. *Construire deux droites, connaissant leur différence et leur produit* (*fig.* 118).

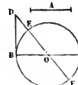


Fig. 118.

Soit BC la différence donnée, soit A la droite dont le carré égale le produit donné. Sur BC comme diamètre, je décris une circonférence. Au point B, j'élève sur le diamètre BC la perpendiculaire BD et je la prends égale à A. Par le point D ainsi obtenu et le centre de la circonférence, je mène la sécante DEF. Les deux lignes demandées seront la sécante entière DF et sa partie ex-

térieure DE. On a en effet

$$DF - DE = EF = BC \quad \text{et} \quad DF.DE = DB^2 = A^2 \quad (111).$$

Les deux problèmes que nous venons de résoudre, permettent de *construire* les racines des équations du second degré.

120. *Diviser une droite en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire la partager de manière que le plus grand segment soit une moyenne proportionnelle à la ligne entière et au plus petit segment* (*fig.* 119).

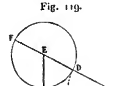


Fig. 119.

Nous avons déjà traité cette question en algèbre (*Alg. élém.* 196) : nous allons la reprendre au point de vue de la construction géométrique à appliquer. Je représente par a la ligne donnée AB, par x le plus grand segment cherché BC : le plus petit segment AC sera alors $a - x$. On doit avoir

$$x^2 = a(a - x).$$

On en déduit

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

Considérons la première racine $x' = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$. Pour *construire* le radical, on n'a qu'à élever en A une perpendiculaire AE égale à la moitié de AB, puis à joindre EB. On aura évidemment $EB = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$. Il faut retrancher de EB, $\frac{a}{2}$ ou ED; $BD = EB - ED$ représentera donc x', et l'on pourra porter cette longueur sur BA en décrivant, du point B comme centre avec BD pour rayon, l'arc de cercle DC.

La racine x'' est égale, en valeur *absolue*, à $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$.

Pour construire cette racine, il faut donc ajouter $\frac{a}{2}$ ou EF à EB; BF représentera donc numériquement x''. Si du point B comme centre, avec BF pour rayon, on décrit un arc de cercle qui vienne couper le prolongement de AB à droite du point B, on obtiendra un nouveau point qui répondra à la question entendue d'une manière plus générale (voir l'*Algèbre*).

AC est égale à $a - x'$ ou à $a + \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$, c'est-à-dire à $\frac{3a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$.

Il est important de se rappeler que le plus grand segment d'une droite a divisée en moyenne et extrême raison a pour expression

$$\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2},$$

et que le plus petit segment de cette droite est égal à

$$\frac{a(3-\sqrt{5})}{2}.$$

121. *Construire sur une ligne donnée un triangle ou un polygone semblable à un triangle ou à un polygone donné (fig. 120).*

Fig. 120.

Si l'on veut construire sur la ligne A'B', homologue de AB, un triangle semblable au triangle ABC, on fera l'angle B'A'C' égal à l'angle BAC et l'angle A'B'C' égal à l'angle ABC. Le triangle A'B'C' et le triangle ABC seront semblables comme équiangles.

Si l'on veut construire sur la ligne A'B', homologue de AB, un polygone semblable au polygone ABCDE, on décomposera le polygone donné en triangles en menant du sommet A les diagonales AC, AD. On construira alors sur A'B' un triangle A'B'C' semblable au triangle ABC; puis, sur A'C' homologue de AC, un triangle A'C'D' semblable au triangle ACD; enfin, sur A'D' homologue de AD, un triangle A'D'E' semblable au triangle AED. Les deux polygones ABCDE et A'B'C'D'E' seront semblables, comme composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés.

122. *Construction d'une échelle (fig. 121).* Quand on a levé le plan d'un terrain, il faut le rapporter sur le papier. Le rapport d'une droite du plan à celle qui lui correspond sur le terrain, s'appelle *échelle* du plan. Si ce rapport est 0,01, le plan est construit à l'échelle de 0,01 ou au *centième*.

Par extension, on appelle *échelle graphique* une figure géométrique qui permet de trouver immédiatement les longueurs des lignes du terrain, réduites dans un certain rapport, et, réciproquement, de passer des lignes mesurées sur le plan aux lignes qu'elles représentent effectivement.

Soit à construire une échelle de $\frac{1}{5000}$. 5000^{M} sont alors représentés par 1^{M} et 100^{M} par $0^{M},02$

Sur une droite indéfinie AB, on prend une longueur AF égale à $0^{M},02$ et on la divise en 10 parties égales. AF représentant 100^{M}, chaque division représentera 10^{M} : on numérotera donc les points de division 0, 10, 20,..., 100. On porte alors des longueurs égales à AF à la suite du point F, et on indique ces nouvelles divisions par les nombres 100, 200, 300, etc., de manière à atteindre le plus grand nombre de centaines de mètres qu'on puisse avoir à considérer. Par les points A, F, 100, 200, 300, etc., on élève des perpendiculaires à la droite AB. On porte sur l'une d'elles FE, dix fois une même longueur arbitraire, et par les points de division 1, 2, 3,..., 10, on mène des parallèles à AB. On prend sur CE, à partir du point E, une longueur EG égale au dixième de AF, on joint FG, et par les points de division de AF on mène des parallèles à FG.

Fig. 121.

Les *centaines* de mètres sont alors représentées par les divisions de FB, les *dizaines* de mètres par les divisions de AF, et les *neuf premiers multiples du mètre* par les portions de parallèles à AB comprises dans le triangle FGE. En effet, si l'on considère la cinquième parallèle et le segment L5 qui lui correspond, on aura

$$\frac{F5}{FE}=\frac{L5}{GE}=\frac{1}{2}.$$

GE représente 10^{M}, L5 en représentera 5.

Si l'on veut marquer sur le plan une longueur de 325^{M}, on place l'une des pointes du compas sur l'intersection M de la parallèle à FG qui correspond au point de division 20 sur AF, avec la parallèle à AF qui passe par la division 5 de FE; et l'on amène l'autre pointe du compas sur la parallèle à FE qui est marquée 300 ; on a 300^{M} depuis cette parallèle jusqu'à FE, 25^{M} depuis FE jusqu'au point M.

Réciproquement, si l'on veut savoir la longueur réelle d'une ligne du plan, on prend une ouverture de compas égale à cette ligne, et l'on voit immédiatement combien elle renferme de centaines de mètres. Supposons qu'elle tombe entre 200^{M} et

300^{M}. On place alors l'une des pointes du compas sur la parallèle 200 à FE, et on la fait glisser sur cette parallèle jusqu'à ce que l'autre pointe du compas vienne rencontrer un point d'intersection des parallèles à AF et des parallèles à FG ou couper l'une des parallèles à FG entre deux parallèles à AF. Supposons qu'on rencontre ainsi la parallèle 30 à FG entre la huitième et la neuvième parallèle à AF. La longueur cherchée renferme d'abord 200^{M}, puis 30^{M}, puis un nombre de mètres compris entre 8^{M} et 9^{M}. Cette longueur sera donc 238^{M} ou 239^{M}, à un demi-mètre près, en déterminant à vue quelle est la parallèle à AF la plus rapprochée de la pointe du compas.

Ce que nous venons de dire relativement au *lever des plans* s'applique évidemment à la représentation graphique d'un bâtiment, d'une machine, d'un objet quelconque.

CHAPITRE IV.

MESURE DE LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

I. — Des polygones réguliers.

123. Un polygone est *régulier* lorsqu'il a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux. Parmi les triangles et les quadrilatères, le triangle équilatéral et le carré sont des polygones réguliers.

Un polygone est *inscrit* dans un cercle lorsque tous ses sommets appartiennent à la circonférence : on dit alors que le cercle est *circonscrit* au polygone.

Un polygone est *circonscrit* à un cercle lorsque ses côtés sont tangents à la circonférence : on dit alors que le cercle est *inscrit* dans le polygone.

Tout triangle est *inscriptible* et *circonscriptible*. La première proposition est évidente : on peut toujours faire passer une circonférence par trois points A, B, C, (*fig.* 122), non en ligne droite. Quant à la seconde proposition, on voit (*fig.* 123) que si l'on mène les bissectrices des angles du triangle ABC, elles se croiseront nécessairement en un même point O; car le point de rencontre des deux bissectrices AO et BO étant également éloigné des trois côtés du triangle, appartient à la bissectrice du troisième angle. Le point O étant à égale distance des trois côtés du triangle, si du point O comme centre, avec la perpendiculaire OD abaissée de ce point sur AB pour rayon, on dé-

Fig. 122.

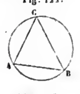
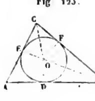


Fig. 123.

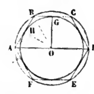


crit une circonférence, elle sera tangente aux trois côtés du triangle ou inscrite dans le triangle.

124. *Tout polygone régulier est inscriptible et circonscriptible* (*fig.* 124).

Soit, par exemple, l'hexagone régulier ABCDEF. Je détermine le centre O du cercle qui passe par les trois sommets A, B, C : je dis qu'il passera aussi par le sommet suivant D. J'abaisse du point O sur BC la perpendiculaire OG : le point G sera le milieu de BC. Comparons les deux quadrilatères OABG, ODCG : je les superpose, en pliant la figure suivant l'axe OG. Les angles en G étant droits, GB prend la direction de GC et le point B tombe en C, puisqu'on a GB = GC. Les angles en B et en C étant égaux, puisque le polygone est régulier, le côté BA prend la direction du côté CD, et le point A se confond avec le point D, puisqu'on a BA = CD. Le point O est resté fixe : les deux droites OA et OD ayant mêmes extrémités coïncident et sont égales. La circonférence décrite du point O comme centre avec OA pour rayon passera donc par le sommet D; on prouvera de la même manière qu'elle doit passer par tous les autres sommets du polygone : ce polygone est donc inscriptible.

Fig. 124.



Il est circonscriptible; car les côtés AB, BC, CD, etc., étant des cordes égales de la circonférence O, sont également éloignés du point O. Par conséquent, si du point O comme centre, avec la perpendiculaire OG pour rayon, on décrit une circonférence, elle sera tangente à tous les côtés du polygone donné en leurs milieux.

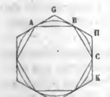
Le point O, centre commun du cercle circonscrit et du cercle inscrit, est le *centre* du polygone régulier. Le rayon du cercle circonscrit est le *rayon* du polygone; le rayon du cercle inscrit en est l'*apothème*. L'angle de deux rayons consécutifs OA, OB, est l'*angle au centre* du polygone. Tous les angles au centre sont égaux, puisqu'ils interceptent des arcs égaux. Le nombre des côtés du polygone étant n et la somme des angles formés autour du point O étant égale à quatre angles droits, la valeur de l'angle au centre d'un polygone régulier sera exprimée d'une manière générale par $\frac{4}{n}$.

On peut remarquer que les angles d'un polygone régulier étant tous égaux, l'un quelconque d'entre eux a pour expression $\frac{2n-4}{n}$ (39) ou $2-\frac{4}{n}$. *L'angle d'un polygone régulier et son angle au centre sont donc supplémentaires :* leurs moitiés sont

dès lors complémentaires : on en conclut, en considérant le triangle rectangle BOH, dans lequel OH est la bissectrice de l'angle au centre AOB, que BO, à son tour, est la bissectrice de l'angle ABC du polygone. Ainsi, *tout rayon divise en deux parties égales l'angle au sommet duquel il aboutit.*

125. *Si l'on partage une circonférence en un nombre quelconque d'arcs égaux, les cordes de ces arcs formeront un polygone régulier inscrit; les tangentes menées par les points de division formeront un polygone régulier circonscrit* (*fig.* 125).

Fig. 125.



Supposons qu'on partage la circonférence en n parties égales et qu'on joigne les points de division. Considérons un angle quelconque ABC du polygone formé : les côtés de cet angle interceptant deux divisions, il aura pour mesure la moitié de $n-2$ divisions. Il en sera de même de tous les autres angles du polygone; ses angles sont donc égaux. Quant à ses côtés, ils sont égaux comme cordes sous-tendant des arcs égaux. On obtient, par conséquent, un polygone régulier.

Supposons qu'on mène des tangentes à la circonférence par tous les points de division obtenus, ces tangentes formeront un polygone circonscrit. Je dis que ce polygone est régulier. En effet, si l'on considère les triangles AGB, BHC, etc., on voit que ces triangles sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun : ces triangles sont isocèles, deux tangentes issues d'un même point étant égales, et l'angle GBA est égal à l'angle HBC, ces deux angles ayant des mesures égales par hypothèse; d'ailleurs AB = BC. Les angles G, H, etc., sont donc tous égaux. GH, qui est le double de BH, est égal à HK, qui est le double de HC. Les côtés du polygone circonscrit sont donc tous égaux. Ce polygone est, par suite, régulier.

Étant donné un polygone régulier inscrit, si l'on prolonge ses apothèmes jusqu'à la rencontre de la circonférence et que, par les points ainsi déterminés, on mène des tangentes, elles formeront un polygone régulier circonscrit (*fig.* 126).

Fig. 126.

En effet, le point D étant le milieu de l'arc AB et le point E le milieu de l'arc BC (53), l'arc DE sera égal à l'arc AB. Il s'ensuit que les nouveaux points de division D, E, F, etc., partageront la circonférence dans le même nombre de parties égales que les points A, B, C, etc. Le polygone régulier circon-

serit ainsi obtenu a ses côtés parallèles à ceux du polygone régulier inscrit, et les rayons du polygone inscrit prolongés sont les rayons du polygone circonscrit; car les triangles rectangles MOD, MOE, étant égaux, MO est la bissectrice de l'angle DOE et doit se confondre avec BO, bissectrice du même angle.

Reportons-nous à la *fig.* 126. Si l'on joint le point D aux points A et B, le point E aux points B et C, etc, on formera évidemment un polygone régulier inscrit de $2n$ côtés, si le nombre de côtés du polygone ABC... est n. Le périmètre du nouveau polygone sera plus grand que celui du polygone ABC..., puisqu'on aura $BE + EC > BC$.

De même, si l'on mène des tangentes à la circonférence par les points B, C, etc., et qu'on les arrête aux tangentes qui forment le polygone circonscrit LMN..., on obtiendra un polygone régulier circonscrit de $2n$ côtés. Le périmètre de ce nouveau polygone sera plus petit que celui du polygone LMN..., puisqu'on aura $RS < RM + MS$.

Ainsi, à mesure qu'on double successivement le nombre des côtés d'un polygone régulier inscrit dans une circonférence, le périmètre de ce polygone augmente en restant inférieur au contour de la circonférence. A mesure qu'on double successivement le nombre des côtés d'un polygone régulier circonscrit à une circonférence, le périmètre de ce polygone diminue en restant supérieur au contour de la circonférence.

Remarquons que le triangle rectangle BOI donne

$$BO - OI < BI.$$

La différence entre le rayon et l'apothème d'un polygone régulier est donc toujours plus petite que la moitié du côté de ce polygone. A mesure qu'on double le nombre des côtés du polygone, son côté diminue et tend vers zéro : par suite, *la différence entre le rayon et l'apothème diminue en tendant aussi vers zéro, à mesure que le nombre des cotés du polygone augmente.*

126. *Deux polygones réguliers qui ont le même nombre de côtés sont semblables, et le rapport de leurs périmètres est égal à celui de leurs rayons ou de leurs apothèmes* (*fig.* 127).

Fig. 127.

La valeur de l'angle d'un polygone régulier ne dépend, comme nous l'avons déjà vu, que de son nombre de côtés : les deux polygones considérés ont donc leurs angles égaux. Leurs

côtés sont proportionnels, les rapports $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{BC}{B'C'}$, etc., étant nécessairement identiques. Ces deux polygones sont donc semblables.

Les périmètres P et P' des deux polygones formeront alors un rapport égal au rapport de similitude $\frac{AB}{A'B'}$ ou, ce qui revient au même, $\frac{AF}{A'F'}$, OF et O'F' représentant les apothèmes des deux polygones (102). Mais les deux triangles rectangles AOF, A'O'F', sont évidemment semblables, puisque les rayons AO et A'O' sont bissecteurs des angles A et A' des deux polygones. On aura donc

$$\frac{AF}{A'F'} = \frac{AO}{A'O'} = \frac{OF}{O'F'},$$

et l'on en conclura

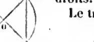
$$\frac{P}{P'} = \frac{AO}{A'O'} = \frac{OF}{O'F'}.$$

II. — Problèmes sur les polygones réguliers.

127. *Inscrire un carré dans un cercle donné (fig. 128).*

Je mène deux diamètres, AC, BD, perpendiculaires entre eux, et je joins leurs extrémités A, B, C, D. Le quadrilatère obtenu est un carré, car la circonférence est divisée en quatre parties égales par les angles au centre AOB, BOC, COD, DOA, qui sont droits.

Fig. 128.



Le triangle isocèle rectangle AOB donne

$$\overline{AB}^2 = 2\overline{AO}^2,\ \text{d'où}\ AB = AO\sqrt{2}.$$

Par conséquent, *le côté du carré inscrit est égal au rayon du cercle circonscrit multiplié par la racine carrée de 2.*

Le diamètre du cercle inscrit dans le carré est évidemment égal à son côté AB. *L'apothème du carré inscrit est donc égal à la moitié de son côté.*

Si l'on divise en deux parties égales les arcs sous-tendus par les côtés du carré, les points de division et les sommets du carré partageront la circonférence en huit parties égales. Partant du carré, on pourra donc facilement inscrire l'octogone régulier. En continuant de la même manière, on inscrira toute la série des polygones réguliers ayant pour nombre de côtés une puissance entière quelconque de 2, à partir de 2^2.

128. *Inscrire un hexagone régulier et un triangle équilatéral dans un cercle donné (fig. 129).*

Supposons que BC représente le côté de l'hexagone régulier. L'angle au centre BOC sera égal à $\frac{4^d}{6}$ ou à $\frac{2}{3}$ d'angle droit. Le triangle BOC étant isocèle, chacun des angles B et C sera aussi égal à $\frac{2}{3}$ d'angle droit. Par conséquent, le triangle BOC étant équiangle est équilatéral, et le côté BC de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon BO du cercle circonscrit.

Fig. 129.

Pour inscrire un hexagone régulier, il suffit donc de porter six fois le rayon sur la circonférence.

On inscrira le triangle équilatéral, en joignant de deux en deux les sommets de l'hexagone régulier inscrit.

Si l'on considère le triangle rectangle ACD, on a immédiatement

$$AC^2 = AD^2 - CD^2.$$

On a

$$AD = 2\,AO \quad \text{et} \quad CD = AO.$$

Il viendra donc

$$AC^2 = 4\,AO^2 - AO^2 = 3\,AO^2, \quad \text{d'où} \quad AC = AO\sqrt{3}.$$

Le côté du triangle équilatéral inscrit est donc égal au rayon du cercle circonscrit multiplié par la racine carrée de 3.

Le losange ABCO montre que l'apothème du triangle équilatéral est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit. La hauteur de ce triangle est, par suite, égale aux $\frac{3}{2}$ du rayon.

On peut remarquer ici que, lorsqu'un polygone régulier a un nombre de côtés *pair*, comme l'hexagone, chaque rayon AO prolongé donne un diamètre AD; tandis que lorsque le polygone régulier considéré a un nombre de côtés *impair*, comme le triangle équilatéral, à chaque rayon AO prolongé correspond un apothème.

Fig. 130.

Soit le triangle équilatéral inscrit ABC (*fig.* 130). Menons les apothèmes, prolongés jusqu'à la circonférence, OH, OI, OK. Si par les points H, I, K, nous menons des tangentes à la circonférence, nous formerons un triangle équilatéral circonscrit dont les côtés seront parallèles à ceux du triangle équilatéral inscrit (125). Les triangles semblables OAB, ODE,

nous donneront alors

$$\frac{AB}{DE} = \frac{OA}{OD} = \frac{OG}{OH} = \frac{1}{2}.$$

Le côté du triangle équilatéral circonscrit est donc double de celui du triangle équilatéral inscrit. Il en résulte évidemment que toutes les lignes tracées dans le triangle circonscrit sont doubles des lignes homologues du triangle inscrit. En particulier, la hauteur du triangle équilatéral circonscrit est triple du rayon du cercle inscrit.

Partant du triangle équilatéral et de l'hexagone, on pourra facilement inscrire les polygones réguliers de 12, 24, 48, 96, etc., côtés, en opérant successivement la bissection des arcs considérés.

129. *Inscrire un décagone régulier et un pentagone régulier dans un cercle (fig. 131).*

Supposons que AB représente le côté du décagone régulier: l'angle au centre AOB sera égal à $\frac{4^d}{10}$ ou à $\frac{2}{5}$ d'angle droit. Le triangle AOB étant isocèle, chacun des angles à la base sera égal à $\frac{4}{5}$ d'angle droit. Divisons l'angle OAB en deux parties égales par la droite AC: l'angle OAC étant égal à $\frac{2}{5}$ d'angle droit comme l'angle AOB, le triangle OAC sera isocèle, et l'on aura OC = AC. De même, l'angle CAB étant égal à $\frac{2^d}{5}$, et l'angle ABO à $\frac{4^d}{5}$, l'angle ACB sera nécessairement égal à $\frac{4^d}{5}$, et le triangle ACB sera isocèle, de sorte qu'on aura AC = AB. Ainsi, OC = AB.

Fig. 131.

Ceci posé, la droite AC étant bissectrice de l'angle OAB du triangle AOB, on aura (89)

$$\frac{AO}{AB} = \frac{OC}{CB}, \text{ d'où } \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{CB},$$

en remplaçant le rayon AO par le rayon OB et AB par son égal OC. On en déduit

$$\overline{OC}^2 \text{ ou } \overline{AB}^2 = OB.CB.$$

C'est-à-dire que *le côté du décagone régulier inscrit est égal au plus grand segment du rayon du cercle circonscrit divisé en moyenne et extrême raison* (120). Il aura donc pour expression $\frac{OB(-1+\sqrt{5})}{2}$.

Pour inscrire le pentagone régulier, il suffira de joindre de deux en deux les sommets du décagone.

Partant du pentagone et du décagone, on pourra facilement inscrire les polygones réguliers de 20, 40, 80, 160, etc., côtés, en opérant successivement la bissection des arcs considérés.

Soient AB et BC (*fig.* 132) deux côtés consécutifs du décagone régulier inscrit : AC représentera le côté du pentagone régulier. Prolongeons AB de manière que AD soit égal au rayon AO, et comparons les deux triangles AOC, AOD. L'angle AOC est égal à $\frac{4^d}{5}$ comme angle au centre du pentagone régulier, l'angle OAD, d'après ce qui précède, est aussi égal à $\frac{4^d}{5}$. Il en résulte que les deux triangles comparés sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux; par suite OD = AC. Menons par le point D, à la circonférence circonscrite, la tangente DE. On aura $DE^2 = DA.DB$ (111). On a d'ailleurs $AB^2 = DA.DB$. Par suite, DE est égale au côté du décagone régulier inscrit. En considérant le triangle rectangle ODE, on arrive donc à ce théorème : *Le côté du pentagone régulier inscrit est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit le rayon du cercle circonscrit et le coté du décagone régulier inscrit.*

Fig. 132.

On peut remarquer que l'on a $\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$. En prenant un arc égal à la différence des arcs qui représentent le sixième et le dixième de la circonférence, et en menant la corde de cet arc, on aura donc le côté du pentédécagone régulier inscrit. En partant de ce polygone, on pourra inscrire les polygones de 30, 60, 120, etc., côtés.

On sait circonscrire tous les polygones réguliers qu'on sait inscrire, puisqu'on n'a qu'à mener, par les sommets du polygone inscrit considéré, des tangentes à la circonférence donnée.

130. *Le rayon d'un cercle et le côté d'un polygone régulier inscrit dans ce cercle étant donnés, calculer le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés* (*fig.* 133).

Fig. 133.

Soit AB le côté donné. J'abaisse sur AB le diamètre perpendiculaire CD; AC représentera le côté cherché. On a immédiatement

$$AC^2 = CD.CE \ (104).$$

Mais $CE = OC - OE$ et $OE = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AE}^2}$,
puisque le triangle AOE est rectangle. On peut donc déterminer CE, et par suite AC, en fonction des quantités données.

Désignons par R le rayon du cercle donné, par c le coté AB du polygone donné, par d le diamètre du cercle inscrit dans ce polygone, c'est-à-dire le double de son apothème OE, par c' le côté AC cherché. On aura, d'après les formules précédentes :

$$\text{OE} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{2} = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad d = \sqrt{4R^2 - c^2};$$

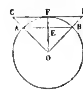
$$CE = R - \frac{d}{2}; \quad AC \quad \text{ou} \quad c' = \sqrt{2R\left(R - \frac{d}{2}\right)}, \quad \text{c'est-à-dire}$$
$c' = \sqrt{R(2R - d)}$.

Les formules pratiques à employer seront donc

$$d = \sqrt{4R^2 - c^2}, \quad c' = \sqrt{R(2R - d)}.$$

Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit, on peut facilement trouver le coté du polygone régulier circonscrit semblable (*fig.* 134). En se reportant au n° 125, si l'on conserve les notations précédentes, et si l'on désigne par x le côté CD cherché, les triangles AOB, COD, donnent immédiatement

Fig. 134.



$$\frac{x}{c} = \frac{OF}{OE} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}},$$

$$\text{d'où} \quad x = \frac{2cR}{\sqrt{4R^2 - c^2}}.$$

III. — Mesure de la circonférence.

131. D'après le principe posé (3), *on peut regarder la circonférence comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits :* car tous ses éléments, considérés comme égaux, sont à égale distance du centre et également inclinés les uns sur les autres. *On peut donc appliquer sur-le-champ à la circonférence tous les théorèmes relatifs aux polygones réguliers*, lorsque ces théorèmes ne dépendent pas de la grandeur et du nombre des côtés des polygones considérés.

132. Si l'on voulait préciser davantage, de manière à donner à la conclusion une apparence plus rigoureuse, on emploierait la considération des limites.

Nous savons déjà ce que c'est qu'une *limite.* Il est évident que *lorsqu'une quantité variable a une limite, elle n'en a*

qu'une seule ; car elle ne peut tendre à la fois vers deux quantités finies différentes.

Lorsque deux quantités variables s'approchent de leurs limites, en restant toujours égales entre elles, leurs limites elles-mêmes sont égales ; sans quoi, elles pourraient tendre à la fois vers deux limites différentes.

La somme ou la différence de deux quantités variables a pour limite la somme ou la différence des limites de ces quantités. Soient les deux quantités variables x et y dont les limites sont représentées par A et B. On a

$$(A - x) + (B - y) = (A + B) - (x + y).$$

x convergeant vers A et y vers B, le premier membre de l'égalité s'approche constamment de zéro : il en est donc de même du second, c'est-à-dire que la limite de $x + y$ est $A + B$.

On prouverait de même que la différence $x - y$ a pour limite $A - B$.

Le produit de deux quantités variables a pour limite le produit des limites de ces quantités.

Désignons par α la différence décroissante qui existe entre x et sa limite A, par β la différence décroissante entre y et sa limite B. On aura

$$A = x + \alpha, \quad B = y + \beta,$$

d'où

$$AB = xy + \alpha y + \beta x + \alpha\beta.$$

Les quantités α et β s'approchant constamment de zéro, il en est de même des trois derniers termes du second membre et de leur somme. Le produit variable xy s'approche donc constamment du produit AB qui en est alors la limite.

Le quotient de deux quantités variables a pour limite le quotient des limites de ces quantités, pourvu que la limite du diviseur ne soit pas zéro.

Désignons par q le quotient variable des quantités x et y. On aura

$$\frac{x}{y} = q, \quad \text{d'où} \quad x = y \cdot q.$$

Il en résulte, d'après ce qui précède,

$$\lim x = \lim y \times \lim q, \quad \text{d'où} \quad \lim q = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

Ces principes presque évidents étant posés, il est facile de démontrer que *la circonférence est la limite commune des périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits, lorsqu'on double indéfiniment le nombre de leurs côtés.*

Je désigne par p et par P les périmètres de deux polygones

réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit (*fig.* 134). Nous avons vu (125) que les périmètres de ces polygones s'approchaient constamment de celui de la circonférence, tout en le comprenant toujours entre eux, à mesure que le nombre n de leurs côtés doublait indéfiniment. Il suffit donc de prouver que la différence $P - p$ a pour limite zéro.

On a

$$\frac{CD}{AB} = \frac{OF}{OE}, \quad \text{d'où} \quad \frac{P}{p} = \frac{OF}{OE} \ (102).$$

On en déduit

$$\frac{P-p}{P} = \frac{OF-OE}{OF},$$

c'est-à-dire

$$P - p = \frac{P.EF}{OF}.$$

Or $\frac{P}{OF}$ représente un quotient variable toujours plus grand que le rapport de la circonférence au rayon OF, mais qui s'en approche constamment : en d'autres termes, $\frac{P}{OF}$ a une limite finie ; EF est plus petit que AF : il converge donc vers zéro, puisque AF converge vers zéro (125). Le produit qui représente $P - p$ a donc lui-même pour limite zéro.

133. Les explications dans lesquelles nous venons d'entrer nous permettent d'énoncer cette proposition (126) :

Deux circonférences quelconques sont proportionnelles à leurs rayons ou à leurs diamètres.

En désignant par R et R′ les rayons des deux circonférences données, par D et D′ leurs diamètres, on aura donc

$$\frac{\text{circ } R}{\text{circ } R'} = \frac{R}{R'} = \frac{D}{D'}.$$

On peut écrire cette relation fondamentale comme il suit :

$$\frac{\text{circ } R}{D} = \frac{\text{circ } R'}{D'}.$$

On en conclut que *le rapport d'une circonférence à son diamètre est un nombre constant.*

Ce rapport constant, qui est la longueur de la circonférence qui a pour diamètre l'unité, est toujours représenté par π.

On posera donc d'une manière générale

$$\frac{\text{circ } R}{2R} = \pi,$$

d'où

$$\text{circ R} = 2\pi R \quad \text{et} \quad R = \frac{\text{circ R}}{2\pi}.$$

Connaissant le nombre abstrait π, on n'aura donc, pour trouver la longueur d'une circonférence, qu'à mesurer son rayon. La première formule donne la circonférence en fonction de son rayon, la seconde donne le rayon en fonction de la circonférence correspondante.

Si l'on veut calculer la longueur l d'un arc de n degrés dans la circonférence de rayon R, on remarquera que l'arc de 1° est égal à

$$\frac{2\pi R}{360}.$$

On aura donc

$$l = \frac{2\pi R n}{360} = \frac{\pi R n}{180}.$$

Cette formule, qui sert à calculer l'une des trois quantités l, R, n, lorsque les deux autres sont données, est d'un usage continuel dans les applications.

134. *Deux arcs semblables sont proportionnels à leurs rayons.*

On entend par *arcs semblables* des arcs qui comprennent le même nombre de degrés dans des circonférences de rayons différents.

Soient l et l' les longueurs des deux arcs semblables, R et R' les rayons correspondants, n le nombre de degrés de chacun d'eux; on aura (133)

$$l = \frac{\pi R n}{180}, \quad l' = \frac{\pi R' n}{180},$$

d'où

$$\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'}.$$

Il est bon de remarquer que lorsqu'un angle est donné, la longueur de l'arc qui lui sert de mesure change avec le rayon choisi, mais que le rapport $\frac{l}{R}$ demeure invariable pour le même angle. Aussi emploie-t-on souvent ce rapport pour désigner l'angle considéré. L'angle est alors mesuré par l'arc qu'il intercepte sur la circonférence de rayon 1, son sommet étant supposé au centre de cette circonférence. Dans ce cas, l'angle droit est représenté par $\frac{\pi}{2}$. Un angle étant mesuré ainsi

par le nombre abstrait A, son nombre de degrés sera évidemment $\frac{180 A}{\pi}$, puisque π correspond à un angle de 180°.

135. *Calcul de* π. Il s'agit surtout ici de démontrer la possibilité de calculer π. La solution complète et pratique de cette question appartient aux mathématiques supérieures.

Nous avons $\pi = \frac{\text{circ R}}{2 R}$. Par conséquent, pour trouver π, on peut : 1° *se donner le rayon d'une circonférence et chercher à calculer sa longueur;* 2° *se donner au contraire la longueur d'une certaine circonférence et chercher à calculer son rayon.* C'est la première méthode que nous suivrons.

Nous allons chercher la longueur de la circonférence dont le rayon est pris pour unité. En prenant la moitié de cette longueur, nous aurons le nombre π.

J'inscris dans la circonférence proposée les polygones réguliers de 4, 8, 16, 32,..., côtés, et je calcule leurs périmètres. Je désigne par c, c_1, c_2, c_3,..., les côtés de ces polygones; par d, d_1, d_2, d_3,..., les diamètres des cercles inscrits dans ces polygones; et je fais usage des formules trouvées (130) :

$$c_1 = \sqrt{R(2R - d)}, \qquad d = \sqrt{4R^2 - c^2}.$$

Le rayon R étant supposé égal à 1, ces formules deviendront :

$$d = \sqrt{4 - c^2}, \qquad c_1 = \sqrt{2 - d}.$$

Le côté du carré inscrit étant égal à $R\sqrt{2}$ (127), on devra remplacer c par $\sqrt{2}$. On aura successivement :

$$d_1 = \sqrt{4 - c_1^2}, \qquad c_2 = \sqrt{2 - d_1},$$
$$d_2 = \sqrt{4 - c_2^2}, \qquad c_3 = \sqrt{2 - d_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d_5 = \sqrt{4 - c_5^2}, \qquad c_6 = \sqrt{2 - d_5},$$
$$d_6 = \sqrt{4 - c_6^2}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Supposons qu'on s'arrête au polygone régulier dont le côté est représenté par c_6, c'est-à-dire au polygone de 256 côtés. Désignons par p le périmètre de ce polygone : il aura pour expression $p = 256 c_6$; la longueur de la circonférence considérée est supérieure à p.

Cherchons le périmètre P du polygone régulier circonscrit

de 256 côtés. Nous aurons (126) :

$$\frac{P}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot d_6}, \quad \text{d'où} \quad P = \frac{2p}{d_6}.$$

La longueur de la circonférence est inférieure à P.

La circonférence tombant entre P *et* p, *toutes les décimales communes aux expressions de ces deux périmètres appartiendront nécessairement à l'expression de la circonférence.* On obtiendra donc ainsi la longueur de la circonférence, et l'on pourra juger en même temps du degré d'approximation atteint. En divisant par 2 le nombre trouvé, on aura, en divisant aussi par 2 l'erreur commise, la valeur de π.

On peut réduire le calcul à la recherche des diamètres $d, d_1, d_2, \ldots, d_6$, *et du dernier côté* c_6. En effet, si l'on remplace dans la formule $d_1 = \sqrt{4 - c_1^2}$, c_1 par sa valeur $\sqrt{2-d}$, il viendra

$$d_1 = \sqrt{2+d}.$$

Chaque diamètre peut donc être calculé au moyen du précédent. Il suffira donc d'exprimer en décimales, jusqu'à l'ordre indiqué, les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{ll}
d = \sqrt{2}, & c_6 = \sqrt{2 - d_5}, \\
d_1 = \sqrt{2+d}, & \\
d_2 = \sqrt{2+d_1}, & \\
d_3 = \sqrt{2+d_2}, & p = 256\, c_6, \\
d_4 = \sqrt{2+d_3}, & \\
d_5 = \sqrt{2+d_4}, & \\
d_6 = \sqrt{2+d_5}, & P = \dfrac{2p}{d_6}.
\end{array}$$

En allant jusqu'à la huitième décimale, on trouve :

$$\begin{array}{ll}
d = 1{,}41421352, & c_6 = 0{,}02454302 \\
d_1 = 1{,}84775905, & \\
d_2 = 1{,}96157055, & \\
d_3 = 1{,}99036945, & p = 6{,}28301, \\
d_4 = 1{,}99759091, & \\
d_5 = 1{,}99939764, & \\
d_6 = 1{,}99984940, & P = 6{,}28349.
\end{array}$$

On remarque que, d'après les théories d'approximation exposées en Arithmétique, on ne peut pas compter sur plus

de cinq décimales exactes en calculant les valeurs de p et de P. La longueur de la circonférence qui a pour rayon l'unité sera, d'après les valeurs trouvées, 6,283 à un demi-millimètre près. La valeur de π sera donc 3,1415 à un quart de millimètre près. En comparant cette valeur aux expressions connues, on voit que le chiffre des dix-millièmes est lui-même exact.

Archimède est le premier géomètre qui ait indiqué deux limites de π : ces limites sont $3\frac{10}{70}$ et $3\frac{10}{71}$. On emploie souvent la première $\frac{22}{7}$ qui ne surpasse pas π de 2 millièmes.

Métius a donné pour valeur approchée de π l'expression fractionnaire $\frac{355}{113}$, facile à retenir. Pour la former, on écrit deux fois de suite les trois premiers nombres impairs ; on obtient ainsi 113355 : les trois premiers chiffres forment le dénominateur, les trois derniers forment le numérateur.

L'expression fractionnaire $\frac{355}{113}$ est exacte jusqu'au chiffre des millioniémes.

Lambert a prouvé que π était un nombre incommensurable. En voici une valeur approchée jusqu'à la 14e décimale :

$$\pi = 3,14159265358979.....$$

Les dernières formules indiquées conduisent à une expression remarquable de π.

De $d = \sqrt{2}$, on déduit

$$d_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad d_2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \text{ etc.},$$

$$d_{k-2} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}},$$

le nombre des radicaux superposés étant égal à $k-1$. On aura alors

$$c_{k-1} = \sqrt{2 - d_{k-2}},$$

c'est-à-dire

$$c_{k-1} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}},$$

le nombre des radicaux superposés étant k. L'indice $k-1$ correspond à un nombre de côtés représenté par 2^{k+1}. On aura donc

$$p = 2^{k+1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}},$$

ou, en prenant la moitié,

$$\pi = \lim 2^k \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}}},$$

le nombre des radicaux superposés étant k.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Chapitre I. — 1° Si, par les sommets d'un triangle, on trace des parallèles aux côtés opposés, on forme un triangle quadruple du premier : les côtés parallèles sont doubles l'un de l'autre.

2° Faire usage du théorème précédent pour démontrer que les trois *hauteurs* d'un triangle se rencontrent en un même point.

3° Toute droite qui passe par le point de rencontre des diagonales d'un parallélogramme, est divisée en ce point en deux parties égales; la droite considérée divise le parallélogramme en deux quadrilatères égaux. C'est à cause de ces propriétés que le point de rencontre des diagonales d'un parallélogramme est appelé centre de ce parallélogramme.

4° Les diagonales de deux parallélogrammes inscrits l'un dans l'autre ont le même point de rencontre.

5° On peut inscrire dans un rectangle des parallélogrammes dont les côtés soient parallèles aux diagonales du rectangle. Se servir de cette propriété pour résoudre le problème suivant :

On donne une table de billard; dans quelle direction faut-il lancer la bille pour qu'elle revienne au point de départ, après avoir successivement frappé les quatre côtés du billard. On admet que, la bande étant parfaitement élastique, la bille se relève toujours de manière que l'angle de *réflexion* soit égal à l'angle d'*incidence*.

6° Les bissectrices des angles d'un quadrilatère forment un autre quadrilatère, dont les angles opposés sont supplémentaires.

7° Les bissectrices des angles formés en prolongeant les côtés d'un quadrilatère se coupent sous un angle égal à la demi-somme de deux angles opposés du quadrilatère.

Chapitre II. — 1° Trouver le lieu des milieux des cordes d'une circonférence, qui sont égales à une droite donnée.

2° Lieu des centres des circonférences qui, décrites avec un même rayon, coupent une circonférence donnée sous un angle donné. — On entend par angle de deux courbes l'angle de leurs tangentes au point d'intersection.

3° Décrire une circonférence qui passe par un point donné et touche une circonférence donnée en un point donné.

4° Décrire une circonférence tangente à une droite donnée et qui touche une circonférence donnée en un point donné.

5° Lorsqu'on mène deux sécantes quelconques par le point de contact de deux circonférences tangentes, les cordes qu'elles déterminent sont parallèles.

6° Si d'un point quelconque de la circonférence circonscrite à un

triangle, on abaisse des perpendiculaires sur ses côtés, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite.

7° Construire un triangle connaissant un côté, l'un des angles adjacents, et la somme ou la différence des deux autres côtés.

8° Démontrer que le diamètre du cercle inscrit dans un triangle rectangle est égal à l'excès de la somme des deux côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse.

9° Lorsque deux circonférences se coupent, la corde commune prolongée est le lieu des points de rencontre des tangentes égales menées à ces deux circonférences.

10° Décrire une circonférence qui intercepte sur deux parallèles des cordes de longueur donnée.

11° Si l'on mène une sécante par l'un des points communs à deux circonférences qui se coupent, les tangentes menées par les autres points d'intersection de la sécante avec les deux circonférences, font un angle constant.

12° Par un point A extérieur à une circonférence O, on mène une sécante ACD dont la partie extérieure AC est égale au rayon; si l'on mène le diamètre AOB, l'angle COA est le tiers de l'angle DOB.

13° Soit une circonférence. Si, du point A milieu d'un arc BAC, on mène deux cordes quelconques AD et AE qui coupent la corde BC aux points F et G, les quatre points D, F, G, E, appartiennent à une même circonférence.

Chapitre III. — 1° Inscrire un carré dans un demi-cercle ou dans un triangle.

2° Les trois médianes d'un triangle concourent en un même point qui divise chacune de ces lignes dans le rapport de 2 à 1 à partir du sommet correspondant.

3° Si, par un point pris dans l'intérieur d'un cercle, on mène deux cordes perpendiculaires entre elles, les deux arcs non contigus qu'elles déterminent valent en somme une demi-circonférence; la somme des carrés des quatre segments des deux cordes est égale au carré du diamètre; si l'on fait varier la position des cordes, toujours perpendiculaires entre elles et passant toujours par le même point, la somme de leurs carrés demeure constante : trouver l'expression de cette somme.

4° Calculer les hauteurs, les médianes et les bissectrices d'un triangle, dont on connaît les trois côtés.

5° Dans tout trapèze, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés non parallèles, augmentée du double produit des bases parallèles.

6° Inscrire dans un triangle donné un triangle équilatéral, dont un côté soit dirigé parallèlement à une droite donnée.

7° Construire un polygone de périmètre donné et semblable à un polygone donné.

8° Tracer deux cercles tangents l'un à l'autre et touchant une droite donnée en deux points donnés, connaissant la somme ou la différence de leurs rayons.

9° Trouver le lieu du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont les deux autres sommets glissent sur deux axes rectangulaires donnés.

Chapitre IV. — 1° Calculer à moins de $0^{M},001$ la circonférence qui a pour rayon la diagonale d'un carré dont le côté est égal $3^{M}.25$.

2° Calculer à moins d'une seconde le nombre de degrés de l'arc égal à son rayon.

3° Si l'on fait rouler un cercle à l'intérieur d'un cercle fixe de rayon double, de manière qu'ils soient toujours tangents, un point quelconque de la circonférence du cercle mobile décrit un diamètre du cercle fixe.

4° Démontrer que π est compris entre 3 et 4, par la considération des périmètres de l'hexagone régulier inscrit et du carré circonscrit.

5° Étant donnés le rayon et l'apothème d'un polygone régulier inscrit, calculer le rayon et l'apothème du polygone régulier isopérimètre qui a deux fois plus de côtés que le polygone donné. — C'est sur ce théorème qu'est basée la seconde méthode pour calculer π.

6° Si la distance des centres de deux cercles qui se coupent à angle droit est égale au double de l'un des rayons, la corde commune est à la fois le côté de l'hexagone régulier inscrit dans l'un des cercles et le côté du triangle équilatéral inscrit dans l'autre.

7° Si deux circonférences sont tangentes intérieurement à une troisième circonférence, et si la somme de leurs rayons est égale à celui de cette troisième circonférence, l'arc compris entre les points de contact sur la grande circonférence est égal à la somme des arcs compris sur les circonférences intérieures, entre leur premier point de rencontre et les mêmes points de contact.

8° Deux diagonales d'un pentagone régulier, qui n'aboutissent pas au même sommet, se coupent en moyenne et extrême raison.

9° Étant donnés les périmètres de deux polygones réguliers inscrit et circonscrit semblables, calculer les périmètres des deux polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double.

LIVRE DEUXIÈME.

LES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

MESURE DES AIRES.

136. L'*aire* d'une figure est la mesure de son étendue superficielle.

Deux figures *équivalentes* ont la même aire sans avoir la même forme.

On prend pour *base* d'un triangle le côté qu'on veut, la *hauteur* du triangle est la perpendiculaire abaissée du sommet opposé sur la base.

La *base* d'un parallélogramme est un côté quelconque de ce parallélogramme; sa *hauteur* est la distance qui existe entre la base et le côté opposé qui lui est parallèle.

Dans un trapèze, les *bases* sont les deux côtés parallèles; la *hauteur* est la distance des deux bases.

Dans le rectangle, *mais seulement dans le rectangle*, on donne aussi à la base et à la hauteur le nom de *dimensions* du rectangle.

L'unité de surface est le carré construit sur l'unité de longueur, c'est-à-dire le mètre carré. *Chercher l'aire d'une figure, c'est donc chercher combien elle renferme de mètres carrés et de parties du mètre carré.*

Nous commencerons par chercher l'expression de l'aire du rectangle, et nous en déduirons ensuite facilement, par des considérations d'équivalence, la mesure de la surface des autres figures planes.

137. *La mesure du rectangle est représentée par le produit des mesures de ses deux dimensions.*

L'aire d'un rectangle dépend évidemment de sa base et de sa hauteur. Cherchons quelle influence la variation de la hauteur, par exemple, peut avoir sur la variation de la surface.

Soient deux rectangles de même base, je dis qu'ils seront entre eux comme leurs hauteurs (fig. 135).

Fig. 135.

A D L M I K E F G H B C

Deux rectangles de même base et de même hauteur sont égaux, puisqu'ils peuvent coïncider. Ceci posé, soient deux rectangles ayant une même base BC et des hauteurs différentes BA et BE. On peut toujours les supposer placés l'un dans l'autre, comme l'indique la figure. Admettons l'existence d'une commune mesure entre les deux hauteurs BA et BE. Si cette commune mesure est contenue cinq fois dans BA et deux fois dans BE, on pourra poser

$$\frac{BA}{BE}=\frac{5}{2}.$$

Par tous les points de division G, I, L, menons des parallèles à la base BC. Nous partagerons le rectangle ABCD en cinq rectangles partiels, et le rectangle BCFE en deux rectangles partiels : tous ces rectangles partiels seront égaux entre eux comme ayant même base et même hauteur. On pourra prendre l'un de ces rectangles partiels comme commune mesure entre les deux rectangles proposés. On aura alors

$$\frac{ABCD}{BCFE}=\frac{5}{2}.$$

Le rapport des deux rectangles est donc égal à celui de leurs hauteurs. Et comme on peut prendre, au contraire, pour base du premier rectangle le côté BA et pour base du second le côté BE, de sorte qu'ils ont alors BC pour hauteur commune, on peut dire aussi que *deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Il en résulte *immédiatement*, d'après la théorie des grandeurs proportionnelles (*Alg. élém.*, 58), *que deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs deux dimensions.*

Prenons alors deux rectangles quelconques, dont nous désignerons les aires par R et r; soient B et H la base et la hauteur du premier rectangle, b et h la base et la hauteur du second rectangle. Nous aurons

$$\frac{R}{r}=\frac{B\times H}{b\times h}=\frac{B}{b}\times\frac{H}{h}.$$

Si r représente l'unité de surface, c'est-à-dire le mètre carré, b et h représenteront l'unité de longueur, c'est-à-dire le mètre. L'égalité précédente deviendra

$$\frac{R}{1^{Mq}}=\frac{B}{1^{M}}\times\frac{H}{1^{M}}.$$

Mais $\frac{R}{1^{mq}}$, rapport de R à son unité, est la mesure de la surface du premier rectangle; de même $\frac{B}{1^m}$ et $\frac{H}{1^m}$ représentent les mesures des deux dimensions de ce rectangle. Ainsi le même nombre abstrait correspond à la mesure du rectangle proposé, exprimée en mètres carrés, et au produit des mesures de la hauteur et de la base du rectangle, exprimées en mètres.

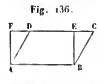
C'est ce qu'on énonce d'une manière rapide, mais inexacte, en disant : *un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.* Cette abréviation n'a pas d'ailleurs d'inconvénient, lorsqu'on a bien saisi les explications précédentes.

Si la commune mesure supposée entre les hauteurs BA et BE n'existait pas, on se reporterait aux indications déjà données à ce sujet (63).

On voit que *l'aire d'un carré est représentée par la seconde puissance du nombre qui mesure son côté.* C'est de là que vient le nom de carré, donné en arithmétique à la seconde puissance d'un nombre.

138. *L'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur* (*fig.* 136).

Fig. 136.



Soit le parallélogramme ABCD. Par les extrémités de la base AB, je mène à AB et à sa parallèle CD les perpendiculaires AF et BE. Je forme ainsi un rectangle ABEF qui a même base AB et même hauteur AF que le parallélogramme proposé. Je dis que ce rectangle est équivalent au parallélogramme donné.

En effet, ces deux figures ont une partie commune ABED et ne diffèrent que par les triangles ADF, BCE; si l'on démontre que ces triangles sont égaux, on aura prouvé l'équivalence des deux figures. Or les triangles rectangles ADF, BCE, sont égaux, parce que leurs hypoténuses AD et BC sont égales comme parallèles comprises entre parallèles, et que leurs côtés AF et BE sont égaux pour la même raison.

Mais le rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur (137); telle sera donc aussi la mesure du parallélogramme.

Soient deux parallélogrammes P, P'; désignons leurs bases par B, B', leurs hauteurs par H, H'. On aura

$$P = B \times H, \quad P' = B' \times H'.$$

Il en résulte

$$\frac{P}{P'} = \frac{B \times H}{B' \times H'}.$$

Par conséquent, *deux parallélogrammes quelconques sont entre eux comme les produits respectifs de leurs bases par leurs hauteurs; deux parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; deux parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

139. *L'aire d'un triangle a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur (fig. 137).*

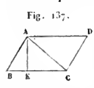


Fig. 137.

Soit le triangle ABC. Par le point A, je mène AD, parallèle à BC; par le point C, je mène CD parallèle à AB. Je forme ainsi le parallélogramme ABCD. Le triangle ABC est évidemment la moitié de ce parallélogramme, qui a même base et même hauteur que lui, puisque les deux triangles ABC et ACD sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

Le parallélogramme ayant pour mesure le produit de sa base BC par sa hauteur AE (138), le triangle aura pour mesure la moitié de ce produit.

Soient T et T′ deux triangles quelconques; désignons leurs bases par B et B′, leurs hauteurs par H et H′. On aura

$$T = \frac{B \times H}{2}, \quad T' = \frac{B' \times H'}{2}.$$

Il en résulte

$$\frac{T}{T'} = \frac{B \times H}{B' \times H'}.$$

Par conséquent, *deux triangles quelconques sont entre eux comme les produits respectifs de leurs bases par leurs hauteurs; le rapport de deux triangles de même base est égal à celui de leurs hauteurs; le rapport de deux triangles de même hauteur est égal à celui de leurs bases.*

On peut exprimer la surface d'un triangle équilatéral en fonction de son côté. Désignons ce côté par a. La hauteur du triangle sera évidemment égale à $\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$ ou à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; par suite, sa surface aura pour expression $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Désignons par a, b, c, les trois côtés d'un triangle quelconque ABC, le côté a correspondant au sommet A, le côté b au sommet B, le côté c au sommet C. En joignant le centre O du cercle inscrit dans le triangle (*fig.* 123) à ses trois sommets, on décomposera ce triangle en trois triangles partiels dont les bases seront les côtés a, b, c, et dont la hauteur commune sera le rayon r du cercle inscrit. On pourra donc exprimer l'aire du

triangle ABC par la somme

$$\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2} \quad \text{ou} \quad r\left(\frac{a+b+c}{2}\right).$$

On désigne ordinairement par $2p$ le périmètre d'un triangle.

En représentant par S la surface du triangle, on aura donc la formule générale

$$S = pr.$$

Nous avons vu (110) que le produit de deux côtés a et b d'un triangle était égal à la hauteur h correspondante au troisième côté c, multipliée par le diamètre 2 R du cercle circonscrit au triangle. On a donc

$$ab = h \cdot 2\,\mathrm{R}.$$

Multiplions par c les deux membres de cette égalité, il viendra

$$abc = hc \cdot 2\,\mathrm{R}.$$

Mais hc représente le double 2 S de la surface du triangle. On aura donc $abc = 4\,\mathrm{S}\,\mathrm{R}$, d'où la formule générale

$$S = \frac{abc}{4\,\mathrm{R}}.$$

140. *L'aire d'un trapèze a pour mesure le produit de la demi-somme de ses bases par sa hauteur* (*fig.* 138).

Je partage le trapèze donné en deux triangles par la diagonale BC. Le triangle ACB aura pour mesure (139) $\frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{EF}}{2}$, le triangle BCD aura pour mesure $\frac{\mathrm{CD}\times\mathrm{EF}}{2}$.

Fig. 138.

Le trapèze ABCD, qui est la somme de ces deux triangles, aura donc pour mesure la somme de ces deux mesures, c'est-à-dire, en mettant la hauteur commune EF en facteur : $\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{CD}}{2}\times\mathrm{EF}$.

Si par le point G, milieu de AC, on mène GH parallèle aux deux bases, le point H sera aussi le milieu de BD (87). La similitude des triangles ABC, GLC, prouve que GL est la moitié de AB; de même, la similitude des triangles CDB, LHB, prouve que LH est la moitié de CD. GH, somme des deux segments GL et LH, représente donc la demi-somme des bases du trapèze. On peut donc dire encore que *l'aire d'un trapèze a pour mesure le produit de sa hauteur par la droite qui joint les milieux de ses côtés non parallèles.*

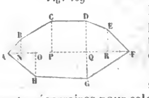
141. *Mesure de la surface d'un polygone quelconque.*

Pour évaluer l'aire d'un polygone quelconque, on peut le décomposer en triangles, soit en menant toutes les diagonales qui aboutissent à un même sommet, soit en choisissant un point dans son intérieur et en le joignant à tous ses sommets. On calcule alors l'aire de chaque triangle formé, on fait la somme des résultats obtenus, et on a la mesure demandée.

Lorsque le polygone est tracé sur le terrain, on suit ordinairement une autre méthode (*fig.* 139).

On mène la plus grande diagonale AF du polygone proposé, et l'on abaisse, des sommets extérieurs sur cette diagonale, les perpendiculaires BN, CP, DQ, ER, HO, GQ. Ces perpendiculaires partagent la figure en triangles et trapèzes rectangles. En mesurant les différents segments déterminés sur AF et les perpendiculaires abaissées sur cette droite, on a tous les éléments nécessaires pour calculer les aires des différentes parties du polygone et, par suite, l'aire de ce polygone lui-même.

Fig. 139

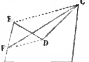


Lorsque le polygone proposé est tracé sur le papier, on peut le transformer en un triangle équivalent dont on cherche ensuite la surface (*fig.* 140).

Fig. 140.

Soit le pentagone ABCDE. Je mène la diagonale DB. Par le sommet C, compris entre les sommets D et B, je mène une parallèle à DB, et je prolonge cette parallèle CL jusqu'à la rencontre du côté AB prolongé. En joignant DL, je remplace le sommet C par le sommet L situé sur AB, c'est-à-dire je remplace le pentagone ABCDE par le quadrilatère ALDE. En effet, ces deux figures ont une partie commune ABDE; elles ne diffèrent que par les deux triangles DCB, DLB. Ces deux triangles sont équivalents, comme ayant même base DB et leurs sommets C et L situés sur une même parallèle à cette base commune, de sorte qu'ils ont même hauteur. Par conséquent, la construction indiquée a bien transformé le polygone proposé en un polygone équivalent, mais ayant un côté de moins. En opérant de même sur le quadrilatère ALDE, on le transformera en un triangle équivalent LDK, qui pourra alors être mesuré à la place du polygone ABCDE.

Fig. 141.



La construction resterait identique, lors même que le polygone considéré ne serait pas convexe. Seulement, dans le cas de la *fig.* 141, on obtient le pentagone donné

ABCDE et le quadrilatère ABCF, en *retranchant* successivement de la figure totale ABCE les triangles équivalents EDC, EFC.

142. *Construire un carré équivalent à un polygone donné.*
Construire un carré équivalent à une figure donnée, c'est opérer la *quadrature* de cette figure.

Supposons d'abord qu'on veuille construire un carré équivalent à un triangle donné. Désignons par X le côté de ce carré, par B la base et par H la hauteur du triangle proposé. Il faudra qu'on ait

$$X^2 = \frac{B.H}{2} = \frac{B}{2} \cdot H.$$

Le côté du carré cherché s'obtiendra donc en cherchant la moyenne proportionnelle à la moitié de la base du triangle et à sa hauteur.

Si l'on veut opérer la quadrature d'un parallélogramme ou d'un trapèze et, en général, d'une figure dont la surface soit mesurée par le produit de deux lignes données, il faudra chercher la moyenne proportionnelle à ces deux lignes : cette moyenne sera le côté du carré équivalent.

S'il s'agit d'un polygone quelconque, on le transformera d'abord en un triangle équivalent; puis on fera la quadrature de ce triangle.

143. *L'aire d'un polygone régulier est égale à la moitié du produit de son périmètre par son apothème (fig. 142).*

Soit O le centre du polygone régulier ABCDEF, joignons-le à tous les sommets du polygone ; nous le partagerons ainsi en autant de triangles qu'il a de côtés, et tous ces triangles seront égaux entre eux. Considérons en particulier le triangle AOB; si AB est sa base, l'apothème OG du polygone sera sa hauteur, et la mesure de la surface du triangle sera égale à $\frac{AB \times OG}{2}$. Si le polygone proposé a n côtés, il faudra multiplier la mesure précédente par n pour avoir l'aire du polygone : cette aire aura donc pour expression $\frac{n\,AB \times OG}{2}$ ou $\frac{P \times a}{2}$, en désignant par P le périmètre du polygone et par a son apothème.

Fig. 142.

144. *L'aire d'un cercle est égale à la moitié du produit de sa circonférence par son rayon.*

Si l'on considère la circonférence comme le périmètre d'un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits (131), on peut appliquer immédiatement à la mesure du cercle la formule précédente (143).

On peut aussi remarquer que la circonférence étant la limite des périmètres des polygones réguliers qui y sont inscrits, en supposant qu'on double indéfiniment le nombre de leurs côtés (132), le cercle est en même temps la limite des aires de ces polygones. De plus, le rayon de la circonférence est la limite des apothèmes de ces mêmes polygones (125), puisque la longueur de leur côté tend vers zéro. Soient S, P, a, l'aire, le périmètre et l'apothème de l'un quelconque des polygones considérés : on aura constamment entre ces variables la relation

$$S = \frac{P \times a}{2} \quad (143).$$

Donc elle aura aussi lieu entre les limites des deux membres de l'égalité posée (132). On aura, par conséquent, en désignant par R le rayon du cercle,

$$\text{cercle } R = \frac{\text{circ } R \times R}{2}.$$

Nous avons trouvé (133)

$$\text{circ } R = 2\pi R :$$

il viendra, en substituant,

$$\text{cercle } R = \pi R^2.$$

Pour calculer l'aire d'un cercle, il faut multiplier le carré de son rayon par le nombre constant π.

145. *L'aire d'un secteur est égale à la moitié du produit de l'arc qui lui sert de base par le rayon du cercle dont le secteur fait partie* (*fig.* 143).

Fig. 143.

Un *secteur* est la portion de cercle comprise entre deux rayons; l'arc qui correspond aux extrémités de ces rayons est la *base* du secteur.

En suivant une marche identique à celle indiquée pour les angles au centre (63), on prouve que *deux secteurs quelconques sont entre eux comme les arcs qui leur servent de bases.*

On peut donc écrire, en considérant le secteur AOB et le cercle AO tout entier,

$$\frac{\text{secteur AOB}}{\text{cercle AO}} = \frac{\text{arc AB}}{\text{circ AO}}.$$

Il en résulte

$$\text{secteur AOB} = \frac{\text{arc AB} \times \text{cercle AO}}{\text{circ AO}} = \frac{\text{arc AB} \times \text{AO}}{2}.$$

Si l'on veut introduire le nombre de degrés n de l'arc AB, on se rappellera la formule

$$\text{arc AB} = \frac{\pi R n}{180} \quad (133).$$

Il viendra alors

$$\text{secteur AOB} = \frac{\pi R^2 n}{360},$$

en remplaçant AO par R.

Cette expression est facile à retenir : $\frac{\pi R^2}{360}$ représente le *secteur d'un degré*, celui qui a pour base l'arc de 1°, $\frac{\pi R^2 n}{360}$ représentera donc le secteur de $n°$.

Nous savons déjà ce que c'est qu'un *segment* (65). Cherchons l'aire du segment AFB (*fig.* 143). Il est la différence du secteur correspondant AOB et du triangle isocèle AOB.

Si l'arc AB correspond au côté d'un polygone régulier et si l'on sait calculer le côté et l'apothème de ce polygone, on aura immédiatement

$$\text{sect.AOB} = \frac{\text{arc AB} \times \text{AO}}{2},$$

$$\text{tr.AOB} = \frac{\text{AB} \times \text{OH}}{2}.$$

Par suite, on pourra écrire

$$\text{segment AFB} = \frac{\text{arc AB.AO} - \text{AB.OH}}{2}.$$

S'il n'en est pas ainsi, on posera

$$\text{tr.AOB} = \frac{\text{AO} \times \text{BG}}{2},$$

BG étant la perpendiculaire abaissée de l'extrémité B sur AO. Il en résultera

$$\text{segment AFB} = \frac{\text{AO (arc AB} - \text{BG)}}{2}.$$

La *trigonométrie* permet dans tous les cas de calculer la perpendiculaire BG, quand on connaît le nombre de degrés n de l'arc AB.

Lorsqu'on aura à calculer des formules où il entrera un nombre n de degrés, minutes et secondes, le mieux sera de convertir les minutes et les secondes en parties décimales de degré (voir l'*Arith.*, 254).

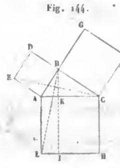
Remarque relative au Chapitre III du Livre premier.

146. Nous avons démontré dans le chapitre III du livre Ier un grand nombre de relations numériques entre les diverses parties d'un triangle, rapportées à une même unité. Dans ces relations il entre le produit de deux lignes ou le carré d'une ligne (103) : ces relations reposent presque toutes sur la première démontrée, savoir : *le carré du nombre qui représente l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des nombres qui représentent les deux côtés de l'angle droit.* Nous savons que l'aire d'un carré est représentée par le carré du nombre qui exprime son côté (137). On pourrait donc énoncer le théorème qu'on vient de rappeler, en disant : *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.* Et aucune démonstration spéciale n'est réellement nécessaire pour exprimer ainsi ce théorème, et pour passer du point de vue algébrique ou métrique au point de vue géométrique ou matériel. La même remarque s'applique à toutes les propositions déduites du théorème du carré de l'hypoténuse.

Cependant, pour donner un exemple du genre de démonstration directe, employé par *Euclide*, nous établirons de nouveau ce théorème fondamental en comparant entre elles les aires formées.

Soit le triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse est AC (*fig.* 144) : je construis des carrés sur ses trois côtés. Je remarque avant tout que l'angle B du triangle étant droit, le côté BD du carré construit sur AB est le prolongement du côté BC, et le côté BG du carré construit sur BC le prolongement du côté AB. J'abaisse du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse la perpendiculaire BK et je la prolonge jusqu'en I. Je mène les droites BL et EC. Le triangle BAL a la même base AL que le rectangle ALIK, il a la même hauteur puisque son sommet B appartient au prolongement de IK : le triangle BAL est donc la moitié du rectangle ALIK (139). On prouverait de même que le triangle EAC est la moitié du carré ABDE : il a la même base AE et son sommet C appartient au prolongement de DB. Les deux triangles BAL, EAC, sont d'ailleurs égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun : AL = AC, comme côtés d'un même carré; AB = AE pour la même raison; l'angle BAL, composé d'un

Fig. 144.



angle droit et de l'angle BAC, est égal à l'angle EAC composé aussi d'un angle droit et de l'angle BAC. L'égalité des deux triangles BAL, EAC, entraîne l'équivalence du rectangle ALIK et du carré ABDE. On démontrerait de même que le rectangle CHIK est équivalent au carré CBGF, en menant les droites BH et AF. Le carré ALHC, somme des deux rectangles ALIK, CHIK, est donc bien équivalent à la somme des carrés ABDE, CBGF.

Les deux rectangles ALIK et CHIK ont même hauteur, leur rapport est donc égal à celui de leurs bases (137) : en remplaçant les rectangles par les carrés qui leur sont équivalents, on aura donc

$$\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AK}{CK}.$$

Ainsi, *les carrés des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont proportionnels aux projections de ces côtés sur l'hypoténuse.*

Le rectangle ALIK et le carré ALHC ont même hauteur, leur rapport est donc égal à celui de leurs bases : en remplaçant le rectangle ALIK par le carré qui lui est équivalent, on aura

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AK}{AC}.$$

C'est-à-dire que *le carré de l'un des côtés de l'angle droit et le carré de l'hypoténuse sont proportionnels à la projection du côté considéré sur l'hypoténuse et à l'hypoténuse elle-même.*

Le lecteur pourra interpréter de la même manière, comme simple exercice, les théorèmes qui s'appuient sur celui que nous venons de développer, notamment ceux qui sont relatifs au carré du côté opposé dans un triangle à un angle aigu ou à un angle obtus.

CHAPITRE II.

RAPPORTS DES AIRES SEMBLABLES.

147. *Les aires de deux triangles semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues* (*fig.* 145).

Fig. 145.

Soient les deux triangles semblables ABC, A'B'C', soient CD et C'D' les hauteurs de ces triangles. On aura (139)

$$ABC = \frac{AB \times CD}{2},$$

$$A'B'C' = \frac{A'B' \times C'D'}{2},$$

d'où

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB \times CD}{A'B' \times C'D'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{CD}{C'D'}.$$

Les deux triangles rectangles ACD, A'C'D', sont semblables puisque l'angle A est égal à l'angle A' (95). On pourra donc écrire

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$$

d'après la similitude des triangles proposés. En remplaçant le rapport $\frac{CD}{C'D'}$ par son égal $\frac{AB}{A'B'}$, il viendra

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AB}{A'B'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}.$$

Si les triangles considérés n'étaient pas semblables, mais si l'angle A était toujours égal à l'angle A', on remplacerait le rapport $\frac{CD}{C'D'}$ par son égal $\frac{AC}{A'C'}$, et il viendrait

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB \times AC}{A'B' \times A'C'};$$

d'où ce théorème : *Les aires de deux triangles qui ont un angle égal, sont proportionnelles aux produits respectifs des côtés qui comprennent cet angle.*

148. *Les aires de deux polygones semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues* (*fig.* 146).

Fig. 146.

Décomposons les deux polygones proposés en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés, en menant les diagonales qui correspondent aux sommets homologues C et *c*. Ces triangles étant semblables, on aura (147)

$$\frac{BCA}{bca} = \frac{BA^2}{ba^2}, \quad \frac{ACE}{ace} = \frac{AE^2}{ae^2}, \quad \frac{ECD}{ecd} = \frac{ED^2}{ed^2}.$$

La similitude des polygones donne d'ailleurs

$$\frac{BA}{ba} = \frac{AE}{ae} = \frac{ED}{ed} \quad \text{ou} \quad \frac{BA^2}{ba^2} = \frac{AE^2}{ae^2} = \frac{ED^2}{ed^2}.$$

On en déduira

$$\frac{BCA}{bca} = \frac{ACE}{ace} = \frac{ECD}{ecd}.$$

En appliquant alors un théorème connu, on aura

$$\frac{BCA + ACE + ECD}{bca + ace + ecd} = \frac{BCA}{bca} = \frac{BA^2}{ba^2} \quad \text{ou} \quad \frac{CBAED}{cbaed} = \frac{BA^2}{ba^2}.$$

Si l'on désigne par S et s les surfaces des deux polygones, par A et a deux de leurs côtés homologues, on aura

$$\frac{S}{s} = \frac{A^2}{a^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{A}{a} = \sqrt{\frac{S}{s}}.$$

Par conséquent, lorsqu'on veut *amplifier* ou *réduire* un polygone dans un rapport donné, l'*échelle* à employer pour les côtés homologues est égale à la racine carrée du rapport des surfaces des deux polygones, c'est-à-dire à la racine carrée du rapport donné.

149. *Le rapport des aires de deux polygones réguliers semblables est égal à celui des carrés de leurs rayons ou de leurs apothèmes.*

Désignons par S et s les aires des deux polygones, par P et p leurs périmètres, par R et r leurs rayons, par A et a leurs apothèmes. On aura

$$S = \frac{P.A}{2} \quad \text{et} \quad s = \frac{p.a}{2} \ (143),$$

d'où

$$\frac{S}{s} = \frac{P.A}{p.a} = \frac{P}{p} \times \frac{A}{a}.$$

Nous savons d'ailleurs (126) qu'on a

$$\frac{P}{p} = \frac{A}{a} = \frac{R}{r}.$$

Si l'on remplace $\frac{P}{p}$ par le rapport égal $\frac{A}{a}$, il viendra

$$\frac{S}{s} = \frac{A}{a} \times \frac{A}{a} = \frac{A^2}{a^2} = \frac{R^2}{r^2}.$$

150. *Deux cercles sont proportionnels aux carrés de leurs rayons.*

Soient deux cercles quelconques dont les rayons sont R et R'. On aura (144)

$$\text{cercle } R = \pi R^2, \quad \text{cercle } R' = \pi R'^2,$$

d'où

$$\frac{\text{cercle } R}{\text{cercle } R'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Les aires de deux secteurs semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.

On entend par secteurs *semblables* ceux qui ont pour bases des arcs semblables, c'est-à-dire d'un même nombre de degrés.

Désignons les aires de ces secteurs par S et S', par R et R' leurs rayons, par n le nombre de degrés de leurs bases. Nous aurons (145)

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}, \quad S' = \frac{\pi R'^2 n}{360}, \quad \text{d'où} \quad \frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Les aires de deux segments semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.

On entend par segments *semblables* ceux qui correspondent à des secteurs semblables. Désignons par S et T les aires du secteur et du triangle dont le premier segment est la différence, par S' et T' les aires du secteur et du triangle dont le second segment est la différence. Les deux secteurs et les deux triangles étant semblables, on aura, en appelant R et R' les rayons des cercles dont font partie les deux segments,

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}, \quad \frac{T}{T'} = \frac{R^2}{R'^2},$$

d'où

$$\frac{S}{S'} = \frac{T}{T'} \quad \text{et} \quad \frac{S-T}{S'-T'} = \frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

En général, *les aires de deux surfaces quelconques semblables sont proportionnelles aux carrés de deux lignes homologues tracées d'une manière quelconque dans les deux surfaces.*

Problèmes relatifs aux aires semblables.

151. *Construire un polygone semblable à un polygone donné et tel, que les aires des deux polygones soient dans un rapport donné* (*fig.* 147).

Fig. 147.

A, M, N, E, B, D, I, C, G, H

Supposons d'abord que le polygone donné soit un carré. Il faudra construire un carré qui soit au carré donné comme deux lignes données M et N sont entre elles. Soit A le côté du carré donné, X le côté du carré cherché. On devra déterminer X de manière à satisfaire à la condition

$$\frac{X^2}{A^2} = \frac{M}{N}.$$

Sur une droite indéfinie, prenons BC = M, CD = N. Sur BD comme diamètre, décrivons une demi-circonférence et menons à BD la perpendiculaire CE. Joignons le point E aux extrémités B et D, et prolongeons, s'il est nécessaire, les droites EB et ED. Portons sur ED une longueur EG égale au côté A et, par le point G, menons GF parallèle à BD. Le triangle rectangle FEG donnera

$$\frac{\mathrm{EF}^2}{\mathrm{EG}^2}=\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{HG}}\ (146).$$

Nous aurons d'ailleurs, à cause des parallèles BD et FG (98),

$$\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{HG}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}}.$$

Il en résulte

$$\frac{\mathrm{EF}^2}{\mathrm{EG}^2}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{EF}^2}{\mathrm{A}^2}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}.$$

EF est donc le côté du carré cherché.

Si les deux carrés devaient être proportionnels à des nombres donnés, on remplacerait ces nombres par des lignes ayant entre elles le même rapport, et l'on opérerait comme nous venons de le dire.

Supposons maintenant un polygone quelconque P. Je représente par a l'un de ses côtés, et je désigne par x le côté homologue du polygone X. On devra avoir, d'après l'énoncé,

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}.$$

Mais les deux polygones devant être semblables, on aura aussi

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}}=\frac{x^2}{a^2}.$$

Il en résulte

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}.$$

La question se trouve donc ramenée à trouver le côté d'un carré qui soit à un carré donné comme deux lignes données sont entre elles, problème que nous venons de résoudre. Quand on aura trouvé le côté x homologue de a, il restera à construire sur ce côté un polygone semblable au polygone P (121).

La recherche d'une échelle de réduction (122) revient à ce qui précède. Supposons que l'aire du plan doive être la millionième partie de l'aire du terrain. On aura $\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{1000000}$,

d'où $\frac{x}{a} = \frac{1}{1000}$. Chaque ligne du plan doit donc être la millième partie de la ligne qui lui correspond sur le terrain; en d'autres termes, 1^{M} doit y être représenté par $0^{M},001$. Telle sera l'échelle à adopter.

152. *Deux figures semblables étant données, construire une figure semblable égale à leur somme ou à leur différence.*

Soient A et B les deux polygones donnés, X le polygone cherché; soient a et b deux côtés homologues des polygones A et B, x le coté homologue du polygone X.

On aura

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{et} \quad \frac{X}{A} = \frac{x^2}{a^2} \ (148).$$

On déduit de la première égalité

$$\frac{A \pm B}{A} = \frac{a^2 \pm b^2}{a^2}.$$

Si l'on compare alors ce dernier résultat à la relation $\frac{X}{A} = \frac{x^2}{a^2}$, on voit que X étant supposé égal à $A \pm B$, il faut qu'on ait $x^2 = a^2 \pm b^2$. La question sera donc ramenée à trouver l'un des côtés d'un triangle rectangle, quand on connaît les deux autres. Lorsqu'on aura trouvé x, on construira sur ce côté, homologue du côté a ou du côté b, un polygone semblable au polygone A ou au polygone B.

153. *Construire un polygone semblable à un polygone donné et équivalent à un autre polygone donné.*

Il s'agit ici de transformer un polygone P donné en un polygone équivalent Q, semblable à un autre polygone donné A. Désignons par a un côté quelconque du polygone A, par x le côté homologue du polygone cherché Q. On devra avoir $\frac{A}{Q} = \frac{a^2}{x^2}$. Les deux polygones P et Q devant être équivalents, cette relation revient à

$$\frac{A}{P} = \frac{a^2}{x^2}.$$

Remplaçons les polygones A et P par les carrés équivalents M^2 et N^2; il viendra

$$\frac{M^2}{N^2} = \frac{a^2}{x^2},$$

d'où

$$\frac{M}{N} = \frac{a}{x}.$$

Le côté x est donc une quatrième proportionnelle aux trois lignes M, N, a. Il restera à construire sur le côté x un polygone semblable au polygone A.

154. *Trouver deux longueurs proportionnelles à deux polygones donnés quelconques.*

On peut toujours remplacer les polygones considérés par les carrés équivalents. Désignons les côtés de ces carrés par a et a', représentons les longueurs cherchées par x et y. On doit avoir $\frac{a'^2}{a^2} = \frac{y}{x}$. On peut choisir arbitrairement l'une des longueurs, y par exemple, et la prendre égale à a'. Il viendra alors $\frac{a'^2}{a^2} = \frac{a'}{x}$, d'où $x = \frac{a^2}{a'}$, ce qui équivaut à $\frac{a'}{a} = \frac{a}{x}$. x sera donc une troisième proportionnelle aux côtés a' et a.

QUESTIONS PROPOSÉES.

CHAPITRE I. — 1° Transformer un triangle rectangle en un triangle isocèle équivalent, les deux triangles devant avoir un angle commun.

2° Inscrire dans un cercle un trapèze de hauteur et de surface données.

3° Par un point donné dans le plan d'un angle, mener une sécante telle, que l'aire du triangle obtenu ait une valeur donnée.

4° Par un sommet d'un quadrilatère, mener une droite qui divise sa surface en deux parties équivalentes.

5° Calculer la surface d'un trapèze en fonction de ses côtés.

6° Chercher l'aire d'un dodécagone régulier en fonction de son rayon.

7° Diviser un cercle en moyenne et extrême raison par une circonférence concentrique.

8° Partager une longueur donnée en trois parties telles, que l'aire du triangle correspondant soit un maximum.

CHAPITRE II. — 1° Construire un triangle équilatéral équivalent à la somme ou à la différence de deux polygones donnés.

2° Par un point donné, mener une droite qui divise la surface d'un trapèze en parties proportionnelles à deux lignes données.

3° Chercher le rapport des aires de deux hexagones réguliers, l'un inscrit et l'autre circonscrit au même cercle.

4° Mener une parallèle à la base d'un triangle, de manière que l'aire du trapèze formé soit moyenne proportionnelle entre les aires des deux triangles dont il est la différence.

5° Diviser un trapèze en un nombre quelconque de parties équivalentes par des parallèles à ses bases.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE TROISIÈME.

LES PLANS.

CHAPITRE PREMIER.

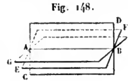
PROPRIÉTÉS DES PLANS.

I. — Notions préliminaires.

155. Nous savons déjà que le *plan* est une surface telle, qu'une ligne droite y est contenue tout entière dès qu'elle y a deux points.

Lorsqu'un plan n'est astreint qu'à passer par une droite donnée, sa position dans l'espace n'est pas déterminée. On peut, en effet, lui faire occuper une infinité de positions dans l'espace en le faisant tourner autour de cette droite comme axe (*fig.* 148). Mais on conçoit que sa position sera fixée d'une manière précise, s'il doit passer, en outre, par un point donné hors de la droite AB. Nous le démontrerons d'ailleurs directement.

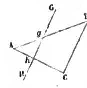
Fig. 148.



Lorsqu'une droite et un plan se coupent, leur intersection est un point, sans quoi la droite coïnciderait avec le plan. Dans ce cas, la droite *traverse* le plan; elle est partie au-dessus, partie au-dessous. Le point d'intersection de la droite et du plan s'appelle le *pied* de la droite dans le plan.

156. *Par trois points donnés non en ligne droite, on peut toujours faire passer un plan, mais on n'en peut faire passer qu'un seul* (*fig.* 149).

Fig. 149.



Soient A, B, C, les trois points donnés; menons les droites AB et AC. On pourra toujours, d'après ce qui précède, faire passer un plan que je désignerai par G, par la droite AB et le point C. Je dis que tout autre plan H satisfaisant aux mêmes conditions coïncidera avec le plan G. En effet, je prends dans le plan G un point quelconque G, et je mène par ce point une droite *gh* coupant les deux droites AB, AC.

Ces deux droites étant aussi par hypothèse dans le plan H, la droite *gh* y aura deux points et y sera contenue tout entière; de sorte que tout point G de l'un des deux plans appartient à l'autre. Ces deux plans coïncident donc dans toute leur étendue.

Deux droites qui se coupent étant déterminées par trois points non en ligne droite, *deux droites qui se coupent déterminent aussi un plan.*

De même, comme nous l'avons déjà dit, *une droite et un point hors de cette droite déterminent un plan.*

Deux droites parallèles déterminent un plan; car deux droites parallèles étant dans un même plan par définition, tout plan passant par l'une d'elles et un point de l'autre contient cette autre tout entière.

On voit qu'on peut regarder un plan comme *engendré* par le mouvement d'une droite qui, passant par un même point de l'espace, s'appuie constamment sur une droite donnée. En effet, la droite mobile sera toujours dans le plan déterminé par la droite et le point donnés.

De même, une droite glissant parallèlement à elle-même en s'appuyant sur une droite donnée engendre un plan. En effet, la droite mobile sera toujours dans le plan déterminé par l'une quelconque de ses positions et la droite donnée.

Un triangle est toujours dans un même plan déterminé par ses trois sommets. Il n'en est pas toujours ainsi d'un quadrilatère, dont les quatre sommets peuvent n'être pas situés dans un même plan. Dans ce cas, le quadrilatère considéré est un *quadrilatère gauche.* Même remarque pour un polygone.

On représente ordinairement un plan par un quadrilatère tracé dans ce plan; mais comme il s'agit d'une surface illimitée et, par conséquent, sans forme déterminée, il faut concevoir le plan prolongé au delà du contour du polygone qui sert à le figurer.

157. *L'intersection de deux plans est une ligne droite.* En effet, si l'on pouvait trouver sur l'intersection des deux plans considérés trois points non en ligne droite, ces deux plans coïncideraient (156) et ne se couperaient pas.

L'intersection de trois plans est un point; car cette intersection est le pied de l'intersection des deux premiers plans dans le troisième plan.

II. — Des droites et des plans perpendiculaires.

158. Lorsqu'une droite et un plan se rencontrent, on dit qu'ils sont *perpendiculaires* l'un à l'autre lorsque la droite est perpendiculaire à toutes les droites qu'on peut mener par son pied dans le plan. Une droite est *oblique* à un plan lorsqu'elle ne remplit pas cette condition.

Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites qui passent par son pied dans ce plan (*fig.* 150).

Fig. 150.

Soit la droite AB perpendiculaire à deux droites BC et BD qui passent par son pied B dans le plan P. Je dis qu'elle sera perpendiculaire à toute autre droite BE menée par son pied dans ce plan.

Traçons une droite quelconque qui rencontre les droites BC, BD, BE, aux points C, D, E. Prolongeons AB au-dessous du plan d'une longueur BA′ = AB. Joignons les points C, D, E, aux points A et A′. Les deux triangles ACD, A′CD, sont égaux : ils ont le côté CD commun; le côté AC est égal au côté A′C, car dans le plan ACA′, les deux obliques AC et A′C s'écartent également du pied de la perpendiculaire CB élevée sur AA′; le côté AD est égal au côté A′D pour une raison analogue. L'égalité des deux triangles ACD, A′CD, entraîne celle des deux angles ACE, A′CE. Les deux triangles ACE, A′CE, sont alors égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Par suite, AE = A′E. La droite BE ayant alors, dans le plan AEA′, deux de ses points à égale distance des extrémités A et A′, est perpendiculaire sur AA′ ou sur AB (25). AB est donc perpendiculaire à une droite quelconque BE du plan P, c'est-à-dire perpendiculaire à ce plan.

La figure précédente donne un exemple de deux droites AB et CD qui, *sans être parallèles, ne peuvent jamais se rencontrer.* Mais alors les deux droites AB et CD *ne sont pas situées dans un même plan,* puisque CD est dans un plan que AB ne fait que traverser au point B. Lorsque deux droites ne sont pas situées dans un même plan, leur *angle* est l'angle formé par la première droite avec une parallèle menée à la seconde droite par un point quelconque de la première (175).

159. Par une droite AB (*fig.* 151), on peut faire passer une infinité de plans, et par le point B, on peut élever *dans chacun de ces plans* une perpendiculaire à la droite AB. Ainsi, *dans l'espace, on peut élever en un même point d'une droite une infinité de perpendiculaires : je dis que toutes ces droites seront dans un seul et même plan.*

Fig. 151.

Par les deux perpendiculaires BC, BD, élevées à AB au point B, dans les plans ABC, ABD, je fais passer un plan P. Par AB, je fais passer un plan quelconque ABE qui coupera le plan P suivant BE. AB étant perpendiculaire au plan P (158), sera perpendiculaire à BE. BE est donc la per-

pendiculaire élevée à AB au point B, dans le plan ABE. *Le lieu des perpendiculaires considérées est donc le plan P élevé perpendiculairement à AB au point B.*

Ce théorème conduit à un nouveau mode de génération du plan. On peut le regarder comme engendré par le mouvement d'une droite qui reste constamment perpendiculaire à une droite donnée en un point donné.

160. *Par un point donné, on peut toujours mener un plan perpendiculaire à une droite, mais on n'en peut mener qu'un seul.*

Si le point donné était sur la droite donnée, en B par exemple, sur AB (*fig.* 151), on mènerait à AB dans les deux plans ABC, ABD, les deux perpendiculaires BC, BD, et l'on ferait passer un plan P par les deux droites obtenues. Ce plan serait perpendiculaire à AB au point B, et il n'y en a qu'un qui puisse remplir cette condition (159).

Supposons le point donné O situé hors de la droite AB (*fig.* 152). Le point O et la droite AB déterminent un plan (156).

Fig. 152.

Dans ce plan, j'abaisse OC perpendiculaire sur AB. J'élève au point C, dans le plan ABD, la perpendiculaire CD à AB, et je fais passer un plan P par les deux droites CO et CD. Ce plan sera perpendiculaire à AB au point C et passera par le point O; et il n'y en a qu'un qui puisse remplir ces deux conditions, puisqu'on ne peut abaisser du point O sur AB que la perpendiculaire OC.

161. *Par un point donné, on peut toujours mener une perpendiculaire à un plan, mais on n'en peut mener qu'une seule.*

Supposons le point O donné dans le plan P (*fig.* 153). Je

Fig. 153.

mène par ce point une droite AB dans le plan P; par le même point, je fais passer un plan Q perpendiculaire à AB : ce plan coupe le plan P suivant une droite CD (157). Au point O, dans le plan Q, je trace OH perpendiculaire à CD : c'est la perpendiculaire demandée.

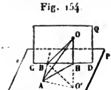
En effet, OH est déjà perpendiculaire à CD; AB étant perpendiculaire au plan Q est perpendiculaire à OH, OH est donc perpendiculaire à AB : OH étant perpendiculaire à deux droites qui passent par son pied dans le plan P, est perpendiculaire à ce plan.

Toute autre droite que OH, passant par le point O, est oblique au plan P; car si la droite considérée est dans le plan Q,

elle est oblique à CD, et si cette droite est hors du plan Q, elle est oblique à AB (159).

Supposons le point O donné hors du plan P (*fig.* 154). Je mène dans le plan P une droite AB; par le point O, je fais passer un plan Q perpendiculaire à AB : ce plan coupe le plan P suivant une droite CD. Dans le plan Q, je trace OH perpendiculaire sur CD : c'est la perpendiculaire demandée.

Fig. 154

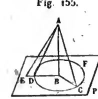


En effet, OH est déjà perpendiculaire à CD. Menons dans le plan P la droite quelconque HA. Prolongeons OH au-dessous du plan d'une longueur HO' = OH ; joignons les points B et A aux points O et O'. Les deux triangles ABO, ABO', sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. La droite AB étant perpendiculaire au plan Q, l'angle ABO est droit, ainsi que l'angle ABO'; le côté AB est commun ; le côté BO est égal au côté BO', car dans le plan OBO' les deux obliques BO, BO', s'écartent également du pied de la perpendiculaire BH élevée sur OO'. L'égalité des deux triangles ABO, ABO' entraîne l'égalité des droites AO et AO'. La droite AH ayant deux de ses points à égale distance des extrémités O et O', dans le plan OAO', est perpendiculaire sur OO' ou sur OH. OH, à son tour, est perpendiculaire à HA, c'est-à-dire à une droite quelconque du plan P; par conséquent, OH est bien perpendiculaire au plan P.

Toute autre droite, telle que OA, menée du point O au plan P, est oblique à ce plan ; car le triangle OHA étant rectangle en H, l'angle A est aigu.

162. *Si d'un point pris hors d'un plan, on lui mène une perpendiculaire et plusieurs obliques : la perpendiculaire est plus courte que toute oblique ; deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales ; de deux obliques inégalement distantes du pied de la perpendiculaire, celle qui s'écarte le plus est la plus grande* (*fig.* 155).

Fig. 155.



Soient le point A et le plan P, la perpendiculaire AB et les obliques AC, AD, AE.

Dans le plan ABC, la perpendiculaire est plus courte que l'oblique quelconque AC.

Supposons BC = BD. Les deux triangles rectangles ABC, ABD, seront égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Par suite, les deux obliques AC, AD, sont égales.

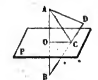
Supposons $BE > BC$. On pourra prendre $BD = BC$; on aura alors $AD = AC$. Mais, dans le plan ABE, on a $AE > AD$ (24). On aura donc aussi $AE > AC$.

Les réciproques de ces propositions sont évidentes. En particulier, lorsqu'une droite représente la plus courte distance d'un point à un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.

Le lieu des pieds des obliques qui, passant par le point A, sont égales à AC, est la circonférence décrite du point B comme centre avec BC pour rayon. Il en résulte que si, du point A, avec une longueur convenable, on marque sur le plan P trois points C, D, F, également éloignés du point A, le centre B de la circonférence déterminée par les trois points C, D, F, sera le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan P.

163. *Le lieu géométrique de tous les points de l'espace à égale distance des extrémités d'une droite donnée, est le plan mené perpendiculairement à cette droite par son milieu* (*fig.* 156).

Fig. 156.

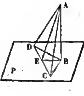


Soient la droite AB et le plan P, perpendiculaire à AB au point O, milieu de AB. Soit C un point quelconque du plan P : dans le plan ACB, les deux obliques CA et CB seront égales comme s'écartant également du pied de la perpendiculaire OC. Tout point du plan est donc à égale distance des extrémités de la droite. Soit D un point quelconque extérieur au plan P : dans le plan ADB, les distances DA et DB seront inégales, parce que le point D est hors de la perpendiculaire OC élevée sur le milieu de AB. Tout point extérieur au plan est donc inégalement distant des extrémités de la droite. Le plan P est donc bien le lieu géométrique indiqué.

Trois points non en ligne droite suffisant pour déterminer un plan (156), *dès qu'un plan aura trois de ses points non en ligne droite à égale distance des extrémités d'une droite donnée, il sera perpendiculaire sur le milieu de cette droite.*

164. *Soient la droite* AB *perpendiculaire au plan* P *et la droite* CD *quelconque dans le plan* P ; *si l'on abaisse* BE *perpendiculaire sur* CD *et si l'on joint* AE, AE *sera perpendiculaire sur* CD (*fig.* 157).

Fig. 157.



Je prends $EC = ED$. Je joins les points C et D aux points B et A. Les droites BC et BD seront égales comme s'écartant également du pied de la perpendiculaire BE dans le plan P. Dès lors les droites AC et AD seront égales comme obliques s'écartant également du pied de la per-

pendiculaire AB. Le triangle CAD étant isocèle, la droite AE qui joint son sommet A au milieu de la base CD sera perpendiculaire sur cette base.

La proposition qu'on vient de démontrer est connue sous le nom de *Théorème des trois perpendiculaires.*

III. — Des droites et des plans parallèles.

165. *Lorsque deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre* (*fig.* 158).

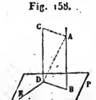


Fig. 158.

Soient les deux droites parallèles AB, CD, et le plan P perpendiculaire à AB. Les deux droites AB et CD détermineront un plan qui coupera le plan P suivant BD. AB étant perpendiculaire à BD, il en sera de même de sa parallèle CD. Au point D, dans le plan P, menons DE perpendiculaire à BD. Si l'on joint AD, la droite AD sera perpendiculaire à DE d'après le théorème des trois perpendiculaires (164). DE étant perpendiculaire à deux droites du plan ABCD sera perpendiculaire à ce plan et, par suite, à CD, CD, à son tour, étant perpendiculaire à deux droites qui passent par son pied dans le plan P, sera perpendiculaire au plan P.

166. La *réciproque* du théorème précédent est vraie. *Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles* (*fig.* 158).

Si les droites AB et CD sont perpendiculaires au plan P, elles sont parallèles. En effet, si l'on menait par le point D une parallèle à AB, elle serait perpendiculaire au plan P (165): cette parallèle se confond donc avec CD (161).

Il résulte de là que *deux droites parallèles à une troisième dans l'espace sont parallèles entre elles.* Car le plan perpendiculaire à la troisième droite le sera aux deux premières, qui dès lors seront parallèles.

167. Une droite et un plan sont *parallèles*, lorsqu'ils ne se rencontrent pas, quelque loin qu'on les prolonge.

Toute droite parallèle à une droite d'un plan est parallèle à ce plan (*fig.* 159).

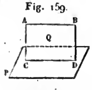


Fig. 159.

Soit la droite AB parallèle à la droite CD du plan P. Les deux parallèles AB et CD détermineront un plan Q dont l'intersection avec le plan P sera la droite CD. La droite AB étant dans le plan Q, ne pourrait rencontrer le plan P qu'en coupant CD : la droite AB et le plan P sont donc parallèles.

Il suit de là qu'*une droite et un plan sont parallèles, lorsqu'ils sont perpendiculaires à une même droite.* Si le plan P

et la droite AB sont perpendiculaires à la droite AC (*fig.* 159), le plan BAC coupera le plan P suivant une droite CD perpendiculaire à AC, et par suite parallèle à AB.

168. *Si la droite* AB *est parallèle au plan* P, *tout plan* ABCD *conduit par* AB *coupe le plan* P *suivant une parallèle* CD *à* AB (*fig.* 159).

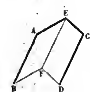
En effet, les deux droites AB et CD sont dans un même plan, et AB ne peut pas rencontrer CD, droite du plan P (167).

Il en résulte que *toute parallèle menée par un point* C *du plan* P *à la droite* AB, *elle-même parallèle au plan* P, *est tout entière dans le plan* P (*fig.* 159).

En effet, la droite AB et le point C suffisent pour déterminer le plan ABCD, dont l'intersection CD avec le plan P est parallèle à AB.

Si par deux droites parallèles on mène deux plans qui se coupent, leur intersection sera parallèle aux deux droites données (*fig.* 160). Car, quel que soit le plan mené par AB, le plan conduit par CD viendra le couper suivant une droite EF parallèle à CD, et par conséquent à AB, puisque CD est parallèle à AB.

Fig. 160.



169. *Les portions de droites parallèles, comprises entre une droite et un plan parallèles, sont égales.*

Soient (*fig.* 159) les parallèles AC et BD comprises entre la droite AB et le plan P qui sont parallèles. Le plan ABCD coupera le plan P suivant la droite CD parallèle à AB (168). La figure ABCD sera donc un parallélogramme, et l'on en conclura AC = BD.

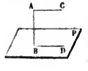
Les droites AC et BD pourraient être perpendiculaires au plan P : elles mesureraient alors les distances de deux points quelconques de la parallèle AB au plan P. On voit donc qu'*une droite et un plan parallèles sont partout également distants.*

170. Deux plans sont *parallèles*, lorsqu'ils ne se rencontrent pas quelque loin qu'on les prolonge.

Deux plans perpendiculaires à une même droite sont évidemment *parallèles* (160).

Le lieu géométrique de toutes les parallèles menées par un point donné à un plan donné, est le plan mené parallèlement par le point donné au plan donné (*fig.* 161).

Fig. 161.



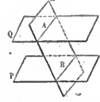
Soient le point A et le plan P. Menons AC, droite quelconque parallèle au plan P. Du point A, abaissons AB perpendiculaire sur le plan P. Le plan CAB coupera le plan P suivant la droite BD parallèle à AC (168).

AB étant perpendiculaire à BD, le sera aussi à sa parallèle AC. Ainsi, toutes les parallèles menées par le point A au plan P sont perpendiculaires à la droite AB au point A. Ces parallèles déterminent donc le plan perpendiculaire à AB au point A (159), c'est-à-dire un plan passant par le point A parallèlement au plan P.

Deux droites qui se coupent suffisent pour déterminer un plan (156). Par conséquent, *un plan est parallèle à un autre, lorsqu'il contient deux droites qui se coupent, respectivement parallèles à deux droites du premier plan* (167).

171. *Les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan, sont parallèles* (*fig.* 162).

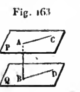
Fig. 162.



Soient les deux plans P et Q, coupés par le plan R suivant les droites A et B. Ces droites sont dans un même plan et ne peuvent se rencontrer, puisque les plans P et Q ne peuvent avoir aucun point commun : elles sont donc parallèles.

172. ***Si deux plans sont parallèles, toute perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre*** **(*fig.* 163).**

Fig. 163



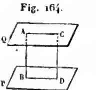
Soient les deux plans parallèles P et Q, et soit AB perpendiculaire au plan P. Je trace par le point A, pied de AB dans le plan P, une droite *quelconque* AC. Le plan CAB coupera le plan Q suivant une droite BD, et les droites AC et BD seront parallèles (171). AB étant perpendiculaire à AC, le sera aussi à BD. AB est donc perpendiculaire à une droite *quelconque* du plan Q, c'est-à-dire perpendiculaire au plan Q.

Il résulte du théorème qu'on vient de démontrer que, *par un point donné, on ne peut mener qu'un seul plan parallèle à un plan donné* (160).

De même, *deux plans parallèles à un troisième sont parallèles entre eux*. En effet, si l'on mène au troisième plan une droite perpendiculaire, les deux autres plans seront perpendiculaires à la même droite, et dès lors parallèles entre eux (170).

173. ***Les portions de droites parallèles comprises entre deux plans parallèles sont égales*** **(*fig.* 164).**

Fig. 164.



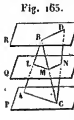
Soient les parallèles AB et CD comprises entre les plans parallèles P et Q. Ces parallèles détermineront un plan ABDC qui coupera les plans P et Q suivant les parallèles AC et BD (171). La figure ABDC étant un parallélogramme, on en conclut

$$AB = CD.$$

Les droites AB et CD pourraient être perpendiculaires au plan P : elles mesureraient alors les distances de deux points quelconques du plan Q au plan P. *Deux plans parallèles sont donc partout également distants.*

174. *Deux droites quelconques sont coupées en parties proportionnelles par trois plans parallèles* (*fig.* 165).

Fig. 165.



Soient les deux droites quelconques AB, CD, situées ou non dans le même plan (158), coupées par les trois plans parallèles P, Q, R. Je joins BC. J'ai ainsi le plan ABC qui coupe les deux plans P et Q suivant les droites parallèles AC et LM, et le plan BCD qui coupe les plans Q et R suivant les droites parallèles MN et BD (171). J'aurai donc

$$\frac{BL}{LA} = \frac{BM}{MC}, \quad \frac{BM}{MC} = \frac{DN}{NC}, \quad \text{d'où} \quad \frac{BL}{LA} = \frac{DN}{NC}.$$

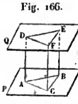
Il viendra aussi, en composant les termes de ces rapports,

$$\frac{BA}{BL} = \frac{DC}{DN} \quad \text{ou} \quad \frac{BA}{LA} = \frac{DC}{NC}.$$

On peut remarquer que les droites BA et BC partant du même point et étant coupées par les deux plans parallèles P et Q, on a immédiatement $\frac{BL}{LA} = \frac{BM}{MC}$.

175. *Deux angles qui, dans l'espace, ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, sont égaux et leurs plans sont parallèles* (*fig.* 166).

Fig. 166.



Soient les deux angles CAB, FDE. Je prends sur les côtés parallèles AC et DF des longueurs égales AC et DF, et sur les côtés parallèles AB et DE, des longueurs égales AB et DE. J'achève les triangles ACB et DFE, puis je mène les droites AD, CF, BE. Les côtés AC et DF étant égaux et parallèles, la figure ACFD est un parallélogramme, et les droites AD et CF sont égales et parallèles. Les côtés AB et DE étant égaux et parallèles, la figure ABED est un parallélogramme, et les droites AD et BE sont égales et parallèles. Les deux droites CF et BE, égales et parallèles à la droite AD, sont donc égales et parallèles entre elles (166) : la figure CBEF est un parallélogramme, et l'on a CB = FE. Les deux triangles ACB, DFE, étant égaux comme ayant leur trois côtés égaux chacun à chacun, l'angle CAB est égal à l'angle FDE.

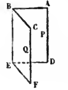
Les plans P et Q de ces deux angles sont parallèles, car

les deux droites FD et ED sont parallèles aux deux droites CA et BA (170).

IV. — Des angles dièdres.

176. On appelle *angle dièdre* la figure formée par deux plans qui se coupent (*fig.* 167). L'intersection BE de ces plans P et Q est *l'arête* de l'angle dièdre ; les plans P et Q sont ses *faces*.

Fig. 167.

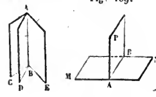


On désigne un angle dièdre par son arête : on dit l'angle dièdre BE. Lorsque plusieurs angles dièdres ont la même arête, on les désigne au moyen de quatre lettres, deux pour l'arête et une pour chaque face ; on a soin d'énoncer au milieu les deux lettres qui marquent alors l'arête : on dit l'angle dièdre ABEF.

Pour avoir une idée exacte de la grandeur d'un angle dièdre, il faut supposer que le plan Q était d'abord confondu avec le plan P, puis qu'il s'en est écarté en tournant autour de l'arête BE comme axe, de manière à prendre sa position actuelle. L'amplitude de ce mouvement de rotation correspond à la grandeur de l'angle dièdre.

Deux angles dièdres sont *adjacents* (*fig.* 168), lorsqu'ils ont la même arête, une face commune et les deux autres faces situées de part et d'autre de la face commune.

Fig. 168. Fig. 169.



Deux plans qui se coupent forment deux angles dièdres adjacents (*fig.* 169). Si ces deux angles dièdres PABM, PABN sont égaux, le plan P est *perpendiculaire* sur le plan MN, et les angles dièdres formés sont des *angles dièdres droits*. Dans tout autre cas, le plan P est *oblique* au plan MN.

177. Soit un angle dièdre BE (*fig.* 167). Élevons à l'arête BE, dans chaque face, au point B les perpendiculaires BA et BC, au point E les perpendiculaires ED et EF. Les angles ABC, DEF, seront égaux comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens (175). *L'angle constant ainsi formé par deux perpendiculaires élevées dans chaque face en un même point de l'arête d'un angle dièdre, s'appelle l'angle rectiligne de l'angle dièdre considéré.*

On appelle souvent l'angle rectiligne d'un angle dièdre *l'angle plan correspondant à l'angle dièdre* donné.

Lorsque deux angles dièdres sont égaux, c'est-à-dire peuvent coïncider, *leurs angles rectilignes sont* évidemment *égaux*.

Réciproquement, *lorsque les angles rectilignes de deux angles dièdres sont égaux, ces angles dièdres sont égaux* (*fig.* 170).

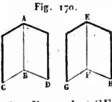


Fig. 170.

Soient les dièdres AB, EF, dont les angles rectilignes CBD, GFH, sont supposés égaux. Portons le second dièdre sur le premier, de manière que l'angle GFH coïncide avec son égal CBD : l'arête FE perpendiculaire au point F au plan GFH, prendra alors la direction de l'arête BA perpendiculaire au point B au plan CBD. Les deux plans ABC, EFG, auront donc deux droites communes et coïncideront (156) ; il en sera de même des plans ABD, EFH. Les deux angles dièdres AB et EF coïncidant, seront égaux.

Lorsque l'angle rectiligne d'un angle dièdre est droit, cet angle dièdre est droit (176).

Soit le dièdre PEFM (*fig.* 171) dont l'angle rectiligne ABC est droit. Je prolonge la face MEF, de manière à former un second angle dièdre PEFN. Les deux angles dièdres PEFM, PEFN, sont adjacents et déterminés par deux plans qui se coupent. L'angle rectiligne du second dièdre s'obtiendra en prolongeant CB suivant BD. L'angle rectiligne ABC étant droit, son supplément ABD sera aussi droit. Les angles rectilignes ABC, ABD, étant égaux, il en sera de même des angles dièdres correspondants PEFM, PEFN, qui seront alors droits.

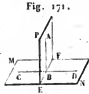


Fig. 171.

178. *Le rapport de deux angles dièdres quelconques est égal au rapport de leurs angles rectilignes* (*fig.* 172).

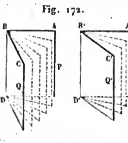


Fig. 172.

J'admets que le rapport des deux angles rectilignes ABC, A'B'C', est égal à $\frac{5}{3}$, c'est-à-dire que ces deux angles rectilignes ont une commune mesure contenue 5 fois dans ABC et 3 fois dans A'B'C'. Si par chaque rayon de division et par chaque arête correspondante on fait passer des plans, on partagera l'angle ABDC en cinq angles dièdres partiels et l'angle A'B'D'C' en trois angles dièdres partiels. Ces angles dièdres partiels seront tous égaux entre eux, parce qu'ils correspondront à des angles rectilignes égaux (177), et l'un d'eux sera une commune mesure des angles dièdres ABDC, A'B'D'C'. Le

rapport des deux angles dièdres sera donc égal à $\frac{5}{3}$, comme celui de leurs angles rectilignes. Si les deux angles rectilignes n'avaient pas de commune mesure, on suivrait la marche déjà indiquée (63).

179. *Lorsqu'on fait correspondre l'unité d'angle dièdre à l'unité d'angle rectiligne, le même nombre abstrait représente la mesure de l'angle dièdre et celle de son angle rectiligne.*

L'angle droit étant l'unité d'angle rectiligne, on prendra pour unité d'angle dièdre, l'angle dièdre droit (177). Si l'on suppose dans la figure précédente, l'angle A′ B′ C′ droit, on aura donc

$$\frac{\text{ABDC}}{1^{\text{D.d.}}} = \frac{\text{ABC}}{1^{\text{d}}}.$$

Le rapport de ABDC à un dièdre droit est la mesure de l'angle dièdre ABDC, le rapport de ABC à un droit est la mesure de l'angle rectiligne ABC (64) : les deux mesures sont donc bien exprimées par le même nombre abstrait.

En ayant toujours présentes les explications qui précèdent, on pourra employer sans inconvénient la locution plus rapide, mais inexacte : *tout angle dièdre a pour mesure son angle rectiligne.*

Lorsqu'on dira qu'un angle dièdre est un angle de 27° 30′, cela voudra dire que son angle rectiligne est un angle de 27° 30′ (64).

180. On dit que deux angles dièdres sont *opposés par l'arête*, lorsque les faces de l'un sont les prolongements des faces de l'autre.

Lorsque deux plans se rencontrent, les angles dièdres adjacents formés sont supplémentaires, les angles dièdres opposés par l'arête sont égaux (fig. 173).

Fig. 173.

Je mène, par un point O de leur intersection AB, dans chacun des plans donnés, les perpendiculaires CD et EF à cette intersection. Les angles rectilignes EOC, EOD, étant supplémentaires, il en sera de même des angles dièdres adjacents PABQ, PABQ′. Les angles rectilignes EOC, FOD, étant égaux comme opposés par le sommet, il en sera de même des angles dièdres opposés par l'arête PABQ, Q′ABP′.

181. Les réciproques des deux propositions précédentes sont vraies (14) ; nous démontrerons seulement la première.

Si deux angles dièdres PABQ, PABQ', *qui sont dans la position d'adjacents* (176), *sont supplémentaires, leurs faces non communes forment un seul et même plan* (*fig.* 173).

La somme des angles dièdres proposés étant égale à deux droits, la somme de leurs angles rectilignes EOC, EOD, sera aussi égale à deux droits : OD sera donc le prolongement de OC. Par suite, les deux faces Q et Q' ayant deux droites communes AB et CD, se confondront (156).

On démontrerait facilement, en s'appuyant sur les théorèmes de la Géométrie plane qui concernent les propriétés correspondantes des lignes droites, que : *si un plan rencontre deux plans parallèles, les angles dièdres alternes-internes, alternes-externes ou correspondants, sont égaux ; les angles dièdres, intérieurs ou extérieurs d'un même coté, sont supplémentaires.* Les réciproques de ces propositions sont vraies, pourvu que les arêtes des angles dièdres considérés soient parallèles. De même, *deux angles dièdres dont les arêtes sont parallèles, sont égaux ou supplémentaires, lorsque leurs faces sont parallèles ou perpendiculaires chacune à chacune.*

V. — Des plans perpendiculaires.

182. *Si la droite* AB *est perpendiculaire au plan* Q, *tout plan* P *passant par* AB *est perpendiculaire au plan* Q (*fig.* 174).

Fig. 174.

Menons dans le plan Q, à l'intersection CD des plans P et Q, la perpendiculaire BE. L'angle rectiligne de l'angle dièdre formé par les plans P et Q sera l'angle ABE, et cet angle est droit puisque la droite AB est perpendiculaire au plan Q. Le plan P est donc perpendiculaire au plan Q (176).

183. *Lorsque deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute droite menée dans l'un d'eux perpendiculairement à leur intersection commune, est perpendiculaire à l'autre plan* (*fig.* 174).

Les deux plans P et Q étant perpendiculaires, je mène dans le plan P la perpendiculaire AB à l'intersection CD des deux plans. Je trace, dans le plan Q, BE perpendiculaire à CD. L'angle ABE, étant l'angle rectiligne de l'angle dièdre formé par les plans P et Q, sera droit ; et la droite AB, perpendiculaire aux deux droites CD et BE qui passent par son pied dans le plan Q, sera perpendiculaire à ce plan.

Il résulte du théorème qu'on vient de démontrer que *si, d'un point quelconque du plan* P *perpendiculaire au plan* Q, *on abaisse une perpendiculaire sur le plan* Q, *elle sera tout entière dans le plan* P (*fig.* 174).

En effet, la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan Q,

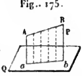
se confondra avec la perpendiculaire AB abaissée du point A sur l'intersection CD (161).

Le plan P perpendiculaire au plan Q, peut donc être regardé comme le lieu des perpendiculaires élevées au plan Q par les différents points de l'intersection CD.

On appelle *projection d'un point* sur un plan le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan. *La projection d'une ligne* quelconque sur un plan est l'ensemble des projections de tous ses points sur ce plan. Il résulte de ce qui précède que *lorsqu'une droite est oblique à un plan, sa projection sur ce plan est une droite.*

Soient la droite AB et le plan Q (*fig.* 175). Je projette le point A en *a*. Les deux droites AB et A*a* détermineront un plan P perpendiculaire au plan Q (182). Toutes les perpendiculaires abaissées des différents points de AB sur le plan Q seront contenues dans le plan P, et leurs pieds se trouveront distribués sur l'intersection *ab* des deux plans.

Fig. 175.

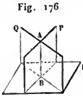


On voit en même temps que, *par une droite donnée, on ne peut mener qu'un plan perpendiculaire à un plan donné*, pourvu que la droite et le plan donnés ne soient pas perpendiculaires entre eux.

184. *Lorsque deux plans qui se coupent sont perpendiculaires à un troisième plan, leur intersection l'est aussi* (*fig.* 176).

Soient les deux plans P et Q, qui se coupent suivant AB et sont perpendiculaires au plan R. Si par le point A on mène une perpendiculaire au plan R, elle sera à la fois tout entière dans le plan P et tout entière dans le plan Q (183) : elle se confondra donc avec leur intersection AB.

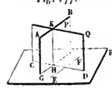
Fig. 176



185. *Lorsque deux droites ne sont pas situées dans un même plan, on peut toujours leur mener une perpendiculaire commune, cette perpendiculaire représente leur plus courte distance* (*fig.* 177).

Soient les deux droites AB et CD non situées dans un même plan. Par un point de CD, je mène EF parallèle à AB : le plan des droites CD et EF sera parallèle à la droite AB (167). Une droite et un plan parallèles étant partout également distants (169), la plus courte distance des droites AB et CD est nécessairement égale à la distance d'un point quelconque de AB au plan R des droites CD et EF. Pour

Fig. 177.



déterminer cette plus courte distance, je mène par AB un plan P perpendiculaire au plan R et par CD un plan Q perpendiculaire au plan R. Ces deux plans se couperont suivant une droite KH qui joindra un point de AB à un point de CD et qui, étant perpendiculaire au plan R (184), sera à la fois perpendiculaire aux droites CD et HG ou CD et AB, puisque HG est parallèle à AB (168); c'est-à-dire que KH sera à la fois la perpendiculaire commune aux deux droites données et leur plus courte distance.

186. *Lorsqu'une droite est oblique à un plan, l'angle qu'elle forme avec sa projection sur ce plan est le plus petit de tous les angles qu'elle forme avec toutes les droites menées par son pied dans le plan donné (fig. 178).*

Soient la droite AB et le plan P. D'un point quelconque B de la droite AB, j'abaisse sur le plan P la perpendiculaire B*b*.

Fig. 178.

A*b* représentera la projection de la droite AB sur le plan P (183). Menons dans le plan P la droite quelconque AC, prenons AC = A*b* et joignons BC. Les deux triangles AB*b*, ABC, auront deux côtés égaux; mais le troisième côté B*b* du premier triangle sera plus petit que le troisième côté BC du second triangle, parce que la perpendiculaire B*b* est plus courte que l'oblique BC. L'angle BA*b* sera donc moindre que l'angle BAC.

La propriété qu'on vient de démontrer, conduit à mesurer l'inclinaison d'une droite sur un plan, par l'angle que forme cette droite avec sa projection sur ce plan.

CHAPITRE II.

DES ANGLES POLYÈDRES ET, EN PARTICULIER, DES ANGLES TRIÈDRES.

187. On appelle *angle polyèdre* la figure formée par plusieurs plans qui passent par le même point S (*fig.* 179) et sont terminés à leurs intersections. Le point S est le *sommet* de l'angle polyèdre, les intersections successives SA, SB, SC, etc., en sont les *arêtes*. Les plans qui constituent l'angle polyèdre sont les *faces* de cet angle. On donne aussi le nom de faces ou d'*angles plans* de l'angle polyèdre aux angles formés par deux arêtes consécutives quelconques. L'angle polyèdre considéré a pour faces les angles ASB, BSC, CSD, etc.

Fig. 179.

On désigne un angle polyèdre par la lettre qui marque son sommet ou bien par cette

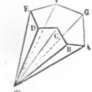
lettre suivie des lettres qui marquent les arêtes successives. On dira l'angle polyèdre S ou l'angle polyèdre SABCDE.

Lorsqu'un angle polyèdre n'a que trois faces, ce qui est le plus petit nombre possible, il prend le nom d'angle *trièdre*.

Les angles dièdres formés par les faces d'un angle polyèdre sont les angles dièdres de cet angle polyèdre. Lorsqu'un angle trièdre contient un angle dièdre droit, il est rectangle ; il est *bi-rectangle* ou *tri-rectangle*, s'il renferme deux ou trois angles dièdres droits. Le plafond et les murs d'un appartement forment, en se rencontrant, des angles trièdres tri-rectangles.

On dit qu'un angle polyèdre est *convexe*, lorsqu'il est tout entier d'un même côté par rapport à chacune de ses faces indéfiniment prolongées. Il est *concave* dans le cas contraire (*fig.* 180).

Fig. 180.



Tout plan qui rencontre un angle polyèdre convexe en coupant toutes les arêtes d'un même côté du sommet S (*fig.* 179) donne évidemment comme intersection un polygone convexe ABCDE.

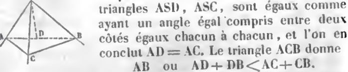
Si l'on prolonge au delà du sommet les arêtes d'un angle polyèdre, on obtient (*fig.* 179) un autre angle polyèdre SA′B′C′D′E′ dont tous les éléments sont égaux à ceux du premier angle polyèdre : les faces sont égales comme opposées par le sommet, les angles dièdres sont égaux comme opposés par l'arête. Mais on voit que la disposition des parties égales n'est pas la même dans les deux angles polyèdres, de sorte qu'ils ne sont pas superposables. On a donné à ces angles polyèdres le nom d'angles polyèdres *symétriques*. Nous reviendrons sur ce cas particulier.

188. *Dans tout angle polyèdre, une face quelconque est plus petite que la somme de toutes les autres.*

En particulier, *dans tout angle trièdre, la plus grande face est plus petite que la somme des deux autres* (*fig.* 181).

Je forme, dans la face ASB que je suppose la plus grande, un angle ASD égal à la face ASC, et je prends SD = SC. Par le point D, je mène une droite ADB qui coupe les deux arêtes SA, SB, et je joins le point C aux points A et B. Les deux triangles ASD, ASC, sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, et l'on en conclut AD = AC. Le triangle ACB donne

Fig. 181.



$$AB \quad \text{ou} \quad AD + DB < AC + CB.$$

Le segment DB est donc plus petit que CB. Les deux triangles DSB, CSB, ont alors deux côtés égaux, mais le troisième côté DB du premier est plus petit que le troisième côté CB du second.

Par suite, l'angle DSB est plus petit que l'angle CSB, et la face ASB est plus petite que la somme des deux faces ASC, CSB.

Pour étendre le théorème au cas d'un angle polyèdre quelconque, on n'a qu'à le décomposer en angles trièdres, en menant par l'une de ses arêtes SA et les arêtes opposées, SC, SD, les plans *diagonaux* ASC, ASD (*fig.* 179). La démonstration est évidente.

189. *Dans tout angle polyèdre convexe, la somme de toutes les faces est inférieure à quatre angles droits* (*fig.* 182).

Fig. 182.

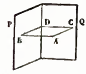
Je coupe l'angle polyèdre par un plan qui rencontre toutes les arêtes au-dessous du sommet S, j'obtiens comme section le polygone convexe ABCDE. Je prends un point O quelconque dans l'intérieur de ce polygone, et je le joins aux sommets A, B, C, D, E. J'ai au point A un angle trièdre formé par les faces SAB, SAE, BAE. D'après le théorème précédent, je pourrai écrire : BAE ou $BAO + OAE < SAB + SAE$. J'aurai de même, en considérant les angles trièdres formés en B, en C, en D et en E :

$$ABO + OBC < SBA + SBC,$$
$$BCO + OCD < SCB + SCD,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on ajoute toutes ces inégalités membre à membre, on trouvera que la somme des angles à la base des triangles dont le sommet est en O, est inférieure à la somme des angles à la base des triangles dont le sommet est en S. Comme ces deux séries de triangles sont en même nombre, il faut, par compensation, que la somme des angles au sommet soit plus grande dans les premiers triangles que dans les seconds. Or, la somme des angles formés autour du point O est égale à quatre angles droits; la somme des angles formés autour du point S, c'est-à-dire la somme des faces de l'angle polyèdre, est donc inférieure à quatre angles droits.

190. *Étant donné un angle dièdre, si l'on abaisse d'un point pris dans l'intérieur de cet angle une perpendiculaire sur chacune de ses faces, l'angle ainsi formé est le supplément de l'angle rectiligne de l'angle dièdre considéré* (*fig.* 183).

Fig. 183.



Soient le point A, la perpendiculaire AB abaissée sur la face P, la perpendiculaire AC abaissée sur la face Q. Les deux perpendiculaires AB et AC détermineront un plan perpendiculaire aux deux faces de l'angle

dièdre (182) et, par conséquent, à son arête (184). L'angle BDC sera donc l'angle rectiligne du dièdre (P, Q). Le quadrilatère ACDB étant inscriptible à cause des angles droits en B et en C, l'angle BAC est bien le supplément de l'angle BDC.

Le point A pourrait être situé sur l'arête de l'angle dièdre; dans ce cas, les perpendiculaires seraient *élevées* sur les faces. L'angle ainsi construit serait égal au précédent; car ces deux angles auraient leurs côtés parallèles et dirigés en sens contraires.

Le lemme que nous venons d'établir va nous conduire à une propriété importante des angles trièdres.

Étant donné un angle trièdre, si d'un point pris dans l'intérieur de cet angle on abaisse des perpendiculaires sur ses trois faces, ces perpendiculaires formeront un angle trièdre dont les faces seront les suppléments des angles dièdres du trièdre proposé; réciproquement, les faces du premier trièdre seront les suppléments des angles dièdres du second trièdre (*fig.* 184).

Fig. 184.

Les deux droites S'A' et S'C' étant perpendiculaires sur les deux faces BSC, ASB, de l'angle dièdre dont l'arête est SB, l'angle A'S'C' sera le supplément de l'angle rectiligne du dièdre SB ou de ce dièdre lui-même. De même, la face B'S'C' sera le supplément du dièdre SA, et la face A'S'B' sera le supplément du dièdre SC.

Réciproquement, les droites S'A' et S'C' étant perpendiculaires aux faces BSC, ASB, leur plan A'S'C' est perpendiculaire à la fois à ces deux faces, et par suite à l'arête SB. On prouverait de même que l'arête SA est perpendiculaire à la face B'S'C', et l'arête SC à la face A'S'B'. L'angle trièdre SABC présente donc, par rapport à l'angle trièdre S'A'B'C', une disposition analogue à celle du second angle trièdre par rapport au premier. Leurs propriétés mutuelles sont donc nécessairement réciproques, c'est-à-dire que les faces du premier trièdre sont les suppléments des dièdres du second trièdre.

Les deux angles trièdres considérés ont reçu le nom d'*angles trièdres supplémentaires*. La considération des angles trièdres supplémentaires a une grande importance.

Le point S' pourrait être confondu avec le point S; dans ce cas, les perpendiculaires seraient *élevées* sur les faces : la conclusion resterait la même.

Si l'on désigne par a, b, c, les faces d'un trièdre, par A, B, C, ses angles dièdres, les faces du trièdre supplémentaire auront pour expressions

$$180^\circ - A, \quad 180^\circ - B, \quad 180^\circ - C,$$

et les angles dièdres de ce même trièdre,

$$180^\circ - a, \quad 180^\circ - b, \quad 180^\circ - c.$$

191. Nous allons parcourir les différents cas d'égalité des angles trièdres.

1° *Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées* (*fig.* 185).

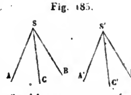


Fig. 185.

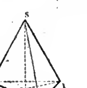
Supposons l'angle dièdre SA égal à l'angle dièdre S' A', la face ASB égale à la face A'S'B', la face ASC égale à la face A'S'C'. Je transporte le trièdre S'A'B'C' sur le trièdre SABC, de manière que la face A'S'B' coïncide avec son égale ASB. Le dièdre S'A' étant égal au dièdre SA, la face A'S'C' tombera sur la face ASC, et comme elles sont égales, l'arête SC prendra la direction de l'arête S'C' : les deux angles trièdres ayant les mêmes arêtes, coïncideront.

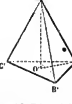
2° *Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont une face égale comprise entre deux angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés* (*fig.* 185).

Supposons la face ASB égale à la face A'S'B', le dièdre SA égal au dièdre S'A', le dièdre SB égal au dièdre S'B'. Je transporte le trièdre S'A'B'C' sur le trièdre SABC, de manière que la face A'S'B' coïncide avec son égale ASB. Le dièdre S'A' étant égal au dièdre SA, la face A'S'C' tombera sur la face ASC; le dièdre S'B' étant égal au dièdre SB, la face B'S'C' tombera sur la face BSC. L'arête S'C' tombant à la fois dans les deux faces ASC, BSC, se confondra avec leur intersection SC, et les deux angles trièdres ayant les mêmes arêtes, coïncideront.

3° *Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont leurs trois faces égales chacune à chacune et semblablement disposées* (*fig.* 186).

Fig. 186.





Je prends sur les arêtes du premier trièdre des longueurs SA = SB = SC. Je prends aussi sur les arêtes du second trièdre des longueurs S'A', S'B', S'C', égales entre elles et à SA. Je forme ensuite les triangles ABC, A'B'C'. Les six triangles isocèles déterminés ASB, A'S'B', ASC, A'S'C', BSC, B'S'C', seront égaux *deux à deux* comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux : on en conclura l'égalité des côtés AB et A'B',

AC et A'C', BC et B'C', c'est-à-dire l'égalité des triangles ABC, A'B'C'. Abaissons du point S la perpendiculaire SO sur le plan ABC; les trois obliques SA, SB, SC, étant égales, le point O sera le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Si l'on abaisse de même S'O', perpendiculaire sur le plan A'B'C', le point O' sera le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C' (162). Si l'on transporte alors le triangle A'B'C' sur son égal ABC, le point O' tombera au point O et la droite O'S' prendra la direction OS. Mais les deux triangles rectangles SAO, S'A'O' sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit $OA = O'A'$. Il en résulte $O'S' = OS$ et le sommet S' se confond avec le sommet S. Les deux angles trièdres ayant les mêmes arêtes, coïncideront.

4° *Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont leurs trois angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

Je désigne par S et S' les trièdres proposés, par T et T' leurs trièdres supplémentaires. Les trièdres S et S' ayant leurs dièdres égaux et semblablement disposés, les trièdres T et T' auront leurs faces égales et semblablement disposées : les trièdres T et T' seront donc égaux, d'après ce qu'on vient de démontrer. Les trièdres T et T' étant égaux, leurs angles dièdres seront égaux, c'est-à-dire que les faces des trièdres S et S' seront égales et semblablement disposées (190) : on rentre donc dans le cas précédent.

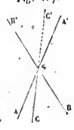
Dans deux trièdres égaux, on voit que les faces égales sont toujours opposées à des dièdres égaux, et réciproquement.

Deux angles polyèdres qui ont toutes leurs faces égales chacune à chacune, ainsi que tous leurs angles dièdres égaux chacun à chacun, et disposés dans le même ordre, sont évidemment égaux.

192. Il est utile de remarquer que la superposition des angles trièdres considérés ne peut avoir lieu qu'autant que les parties égales des deux trièdres sont disposées dans le même ordre, comme nous l'avons expressément supposé.

Si les parties égales des deux angles trièdres ne sont pas disposées dans le même ordre, le second angle trièdre sera en effet égal à l'angle trièdre symétrique du premier (187).

Fig. 187.



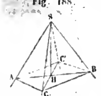
Nous sommes ainsi ramené à la considération des angles trièdres symétriques (*fig.* 187).

Soient les deux trièdres symétriques SABC, SA'B'C'. Si l'arête SC est au-dessus du plan ASB, l'arête SC' sera au-dessous de ce plan. Si l'on essayait la superposition des deux angles trièdres, en faisant tourner le second trièdre autour du sommet S, de manière que la face

A′SB′ vînt coïncider avec son égale ASB, on voit que la coïncidence des deux trièdres n'aurait pas lieu, puisque les deux arêtes SC, SC′ se trouveraient de côtés différents par rapport au plan commun ASB. Si l'on essayait alors la superposition des deux angles trièdres en faisant tourner l'angle trièdre SA′B′C′ tout entier autour du sommet S, c'est-à-dire en enlevant la face A′SB′ du plan ASB, l'arête SC′ serait ainsi amenée au-dessus du plan ASB comme l'arête SC; mais, dans ce mouvement, c'est l'arête SB′ qui tomberait sur l'arête SA, et l'arête SA′ sur l'arête SB. Le dièdre SB′ n'étant pas supposé égal au dièdre SA, la face B′SC′ ne tomberait pas sur la face ASC, et le dièdre SA′ n'étant pas supposé égal au dièdre SB, la face A′SC′ ne tomberait pas sur la face BSC. La coïncidence sera donc encore impossible, et elle sera impossible parce que l'ordre des parties égales est inverse dans les deux angles trièdres.

Pour ne rien négliger, examinons la disposition de la figure obtenue lorsqu'on fait coïncider la face A′SB′ avec la face ASB, de manière que les deux arêtes SC′, SC, restent de côtés différents par rapport au plan commun ASB (*fig.* 188).

Fig. 188.



Prenons SC′ = SC. Joignons les points C, C′. La droite CC′ coupe le plan ASB en un point H. La droite SH sera l'intersection des plans ASB, CSC′. Par le point H, dans le plan ASB, je mène la droite quelconque AHB, et je joins les points C et C′ aux points d'intersection A et B. Les triangles ASC, ASC′, sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux; les triangles BSC, BSC′, sont égaux pour la même raison. On a donc

$$AC = AC', \quad BC = BC'.$$

La droite AB est dès lors perpendiculaire sur le milieu de CC′. Le point H étant le milieu de CC′, les deux triangles CSH, C′SH, sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux. Les angles CSH, C′SH, sont donc égaux, et les angles SHC, SHC′, sont droits. La droite CC′, perpendiculaire à la fois sur deux droites qui passent par son pied dans le plan ASB, est perpendiculaire à ce plan qui la coupe en deux parties égales. Les arêtes SC, SC′, sont par conséquent également inclinées sur le plan ASB, et les points C et C′ sont *symétriques* par rapport à ce plan (*).

193. Il est essentiel de prouver que la superposition de

(*) On dit que deux points sont symétriques par rapport à un plan lorsqu'ils sont situés sur une même perpendiculaire à ce plan, à égale distance de ce plan l'un au-dessus, l'autre au-dessous.

deux angles trièdres symétriques est possible dans un cas : *lorsque l'angle trièdre proposé est isocèle*, c'est-à-dire lorsqu'il a deux faces égales.

Supposons (*fig.* 187) la face ASC égale à la face BSC. Le dièdre SC' étant égal au dièdre SC, on pourra faire coïncider ces deux dièdres en faisant tomber SC' sur SC. La face B'SC' tombe alors sur la face ASC et coïncide avec elle, puisqu'on a ASC = BSC = B'SC'. De même, la face A'SC' tombe sur la face BSC et coïncide avec elle. Dans ce cas particulier, les deux trièdres symétriques coïncident donc.

On voit par là que le dièdre SB' égal au dièdre SB coïncidant avec le dièdre SA, le dièdre SA est égal au dièdre SB. On a donc ce théorème :

Dans tout angle trièdre isocèle, aux faces égales sont opposés des dièdres égaux.

La *réciproque* de ce théorème est vraie. Si le trièdre SABC (*fig.* 187) a deux dièdres égaux, le dièdre SA égal au dièdre SB, on fera coïncider la face A'SB' avec la face ASB, l'arête SB' tombant sur l'arête SA et l'arête SA' sur l'arête SB. Le dièdre SB', égal au dièdre SB, sera égal au dièdre SA, et la face B'SC' tombera sur la face ASC. De même, la face A'SC' tombera sur la face BSC, et les deux trièdres coïncideront. La face B'SC', égale à la face BSC, sera donc égale à la face ASC.

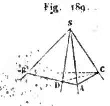
Par conséquent, *lorsqu'un angle trièdre a deux angles dièdres égaux, à ces angles dièdres sont opposées des faces égales, et l'angle trièdre est isocèle.*

On voit que, si les trois faces d'un angle trièdre sont égales, il en est de même de ses trois angles dièdres, et réciproquement.

194. *Dans tout angle trièdre, à un plus grand angle dièdre est opposée une plus grande face.*

Soit l'angle trièdre SABC (*fig.* 189). Supposons le dièdre SC plus grand que le dièdre SB, je dis que la face ASB sera plus grande que la face ASC. En effet, menons par l'arête SC un plan CSD qui fasse avec le plan BSC un angle DSCB égal au dièdre SB. Dans le trièdre SBCD ainsi formé, la face DSC sera égale à la face BSD (193). L'angle trièdre SACD donne d'ailleurs

Fig. 189.



$$ASC < ASD + DSC \quad (188).$$

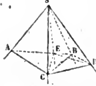
Si l'on remplace DSC par son égale BSD, il viendra

$$ASC < ASB.$$

La *réciproque* de cette proposition est évidente.

195. *Lorsque deux angles trièdres ont deux faces égales chacune à chacune comprenant un angle dièdre inégal, au plus grand angle dièdre est opposée une plus grande face (fig. 190).*

Fig. 190.



Soient les deux angles trièdres SABC, SBCD, placés de manière à avoir une face BSC commune, les deux autres faces égales ASC et CSD tombant dans les deux trièdres de part et d'autre de la face commune. Si le dièdre ASCB est plus grand que le dièdre DSCB, je dis que la face ASB sera plus grande que la face BSD. Menons par l'arête SC un plan CSE qui partage le dièdre total ASCD en deux parties égales : le plan CSE tombera forcément dans l'intérieur du dièdre ASCB et coupera la face ASB suivant la droite SE. Les deux angles trièdres SACE, SCED, seront égaux comme ayant un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune (191), et la face ASE sera par suite égale à la face ESD. Mais le trièdre SEBD donne

$$BSD < BSE + ESD.$$

Si l'on remplace ESD par son égale ASE, il viendra

$$BSD < ASB.$$

La *réciproque* de cette proposition est évidente.

On remarquera l'analogie de plusieurs des théorèmes précédents avec ceux démontrés sur les triangles dans la géométrie plane.

196. *Dans tout angle trièdre, la somme des trois angles dièdres est comprise entre deux et six dièdres droits; chaque angle dièdre augmenté de deux dièdres droits est plus grand que la somme des deux autres angles dièdres.*

Désignons par a, b, c, les faces du trièdre supplémentaire du trièdre proposé. Les angles dièdres de ce dernier trièdre auront pour expressions :

$$2^d - a,\ 2^d - b,\ 2^d - c \quad (190);$$

leur somme sera donc égale à

$$6^d - (a + b + c).$$

Or la somme $a + b + c$ des faces d'un trièdre quelconque est plus grande que zéro et inférieure à 4 droits (189); la somme des trois dièdres d'un trièdre quelconque sera donc plus petite que 6 droits et plus grande que 2 droits.

Désignons par A, B, C, les angles dièdres du trièdre consi-

déré ; les faces du trièdre supplémentaire auront pour expressions

$$2^d - A,\ 2^d - B,\ 2^d - C.$$

Dans tout trièdre, une face quelconque étant plus petite que la somme des deux autres, on pourra écrire :

$$2^d - A < 2^d - B + 2^d - C, \quad \text{d'où} \quad A + 2^d > B + C.$$

197. *On peut toujours former un angle trièdre avec trois faces données, lorsque la plus grande est plus petite que la somme des deux autres, et leur somme entière plus petite que 4 droits* (*fig.* 191).

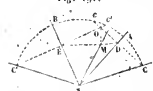


Fig. 191.

Ces conditions sont nécessaires, puisqu'elles sont remplies toutes les fois qu'un angle trièdre est formé (188, 189) ; il faut prouver qu'elles sont suffisantes.

Je suppose les trois faces données ASC, ASB, BSC, développées dans le plan de la plus grande, les deux autres de part et d'autre de la plus grande. J'indique le dédoublement de l'arête SC en la désignant par SC dans la face ASC, par SC′ dans la face BSC. Je décris du point S, comme centre, avec un rayon arbitraire SC un arc de cercle CC′, et cet arc de cercle sera moindre qu'une circonférence puisque la somme des trois faces données est inférieure à 4 droits. Des points C et C′, j'abaisse sur les arêtes SA et SB les perpendiculaires Cc, $C'c'$. On aura

$$AC = Ac \quad \text{et} \quad BC' = Bc'.$$

On a d'ailleurs

$$AB < AC + BC',$$

puisque la face ASB est plus petite que la somme des deux faces ASC, BSC′. On aura donc aussi

$$AB < Ac + Bc'.$$

Le point c doit donc être situé entre les points B et c', comme le point c' entre les points A et c. Les points C et C′ étant d'ailleurs placés de côtés différents par rapport aux arêtes SA et SB, les deux cordes Cc et $C'c'$ se couperont en un point O situé dans l'intérieur de la circonférence.

Élevons au point O une perpendiculaire OM au plan ASB, et dans le plan COM construisons le triangle rectangle DOM dont l'hypoténuse DM est égale à DG. Joignons le point S au point M ainsi déterminé, je dis que le trièdre SABM a pour faces les trois faces données. En effet, les deux triangles SDC, SDM, sont rectangles en D, car, d'après le théorème des trois per-

pendiculaires, MD est perpendiculaire sur SA : et ils ont les deux côtés de l'angle droit égaux, puisque DM = DC. La face ASM sera donc égale à la face ASC. De même, si l'on joint ME, les deux triangles rectangles SEC', SEM, seront égaux : l'hypoténuse SC' est égale à l'hypoténuse SM, puisqu'on a SM = SC d'après l'égalité des triangles précédents, et le côté SE est commun. La face BSM sera donc aussi égale à la face BSC' ou BSC.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Chapitre I. — 1° Tracer par un point donné une droite qui en rencontre deux autres non situées dans un même plan.

2° Mener à une droite donnée une parallèle qui rencontre deux autres droites non situées dans un même plan.

3° Trouver le lieu des points de l'espace également éloignés de trois points donnés non en ligne droite.

4° Lorsque deux plans qui se coupent sont parallèles à une même droite, leur intersection l'est aussi.

5° Deux plans menés perpendiculairement à un même plan par deux droites parallèles sont parallèles; il en résulte que les projections de deux droites parallèles sur un même plan sont parallèles.

6° Si une droite est perpendiculaire à un plan, l'intersection de ce plan avec un plan quelconque et la projection de la droite sur le même plan, sont perpendiculaires.

7° Une droite est également inclinée sur deux plans qui se coupent, lorsqu'elle les perce en deux points également distants de leur intersection. Examiner la réciproque de cette proposition.

Chapitre II. — 1° Toute section faite dans un angle trièdre rectangle par un plan perpendiculaire à l'une de ses arêtes, est un triangle rectangle.

2° Si l'on coupe un angle trièdre tri-rectangle par un plan quelconque, le point de rencontre des hauteurs du triangle déterminé est la projection du sommet de l'angle trièdre sur le plan du triangle.

3°. Couper un angle polyèdre à quatre faces par un plan, de manière que la section soit un parallélogramme.

LIVRE QUATRIÈME.

LES SURFACES ET LES VOLUMES DES CORPS.

CHAPITRE PREMIER.

LES PRISMES ET LES CYLINDRES.

198. Un corps terminé de toutes parts par des plans est un *polyèdre*. Les angles polyèdres et les angles dièdres formés par ces plans en se coupant sont les *angles polyèdres* et les *angles dièdres* du polyèdre. Les polygones limités par les intersections de ces plans sont les *faces* du polyèdre, et ces intersections en sont les *arêtes*. Les *sommets* d'un polyèdre sont les sommets de ses angles polyèdres, et ses *diagonales* sont les droites qui joignent deux sommets non situés sur une même face.

Un polyèdre est *régulier* lorsque ses angles polyèdres sont égaux, et ses faces des polygones réguliers égaux. Il n'existe que *cinq* polyèdres réguliers.

En effet, si les faces sont des triangles équilatéraux égaux, on ne peut assembler autour d'un même point, pour former un angle polyèdre, que *trois* ou *quatre* ou *cinq* de ces triangles. L'angle du triangle équilatéral étant égal à $\frac{2}{3}$ d'angle droit, *six* de ces triangles assemblés autour d'un même point donneraient six angles plans dont la somme serait égale à $\frac{2}{3} \times 6$ ou à 4 angles droits; il n'y aurait plus d'angle polyèdre, les six triangles se trouveraient développés dans un même plan.

On forme donc trois polyèdres réguliers avec des triangles équilatéraux : le *tétraèdre* régulier, compris sous *quatre* triangles équilatéraux; l'*octaèdre* régulier, compris sous *huit* triangles équilatéraux; l'*icosaèdre* régulier, compris sous *vingt* triangles équilatéraux.

Autour d'un même point, on ne peut pas assembler plus de *trois* carrés égaux. Avec des carrés, on ne pourra donc former qu'un seul polyèdre, qui sera l'*hexaèdre* régulier ou cube, compris sous *six* carrés égaux.

Enfin, on ne peut non plus assembler plus de *trois* pentagones réguliers autour d'un même point, puisque l'angle d'un pentagone régulier est égal à $\frac{6}{5}$ d'angle droit. Avec des pentagones réguliers, on ne pourra donc former qu'un seul polyèdre, qui sera le *dodécaèdre* régulier, compris sous *douze* pentagones réguliers.

Au delà, aucun polyèdre régulier n'est plus possible, puisque l'angle d'un hexagone régulier est égal à $\frac{4}{3}$ d'angle droit, et que trois angles d'hexagone régulier donnent une somme égale à quatre angles droits (*).

Un polyèdre est *convexe* lorsqu'il est tout entier d'un même côté de chacune de ses faces indéfiniment prolongées; il est *concave* dans le cas contraire. Un polyèdre convexe ne peut être rencontré par une droite en plus de deux points, et tout plan le coupe suivant un polygone convexe.

199. Parmi les polyèdres, on distingue les *prismes* et les *pyramides*. Nous considérerons d'abord les prismes.

Un prisme est un polyèdre compris sous deux plans polygones égaux et parallèles, réunis entre eux par une série de parallélogrammes. Les deux plans polygones forment les *bases* du prisme; la distance qui les sépare est la *hauteur* du prisme. Les parallélogrammes sont les *faces latérales* du prisme, leurs intersections successives en sont les *arêtes latérales*, et leur ensemble constitue la *surface latérale* du prisme.

Pour construire un prisme, on prend un polygone quelconque FGHIK. Par ses différents sommets, on mène d'un même côté les droites FA, GB, HC, ID, KE, égales et parallèles entre elles. Les extrémités de ces parallèles déterminent le polygone ABCDE, et je dis que le polyèdre ABCDEFGHIK est un prisme (*fig.* 192). En effet, les faces ABFG, BCGH, etc., sont des parallélogrammes, puisqu'elles ont deux côtés opposés égaux et parallèles. Par suite, les deux polygones ABCDE, FGHIK, ont leurs côtés égaux et parallèles; ils sont donc égaux et parallèles, et la figure obtenue est un prisme.

Fig. 192.

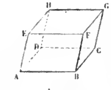


(*) Pour plus de détails sur les polyèdres réguliers et leur construction, voir ci-après le *Complément de Géométrie*.

Un prisme prend le nom de sa base, c'est-à-dire qu'il est *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, etc., suivant que sa base est un *triangle*, un *quadrilatère*, un *pentagone*, etc.

Un prisme est *droit* ou *oblique*, suivant que ses arêtes latérales sont perpendiculaires ou obliques aux plans des bases.

Fig. 193.

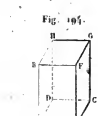


Les faces latérales d'un prisme droit sont des rectangles.

Un prisme *droit* est *régulier* lorsqu'il a pour base un polygone régulier.

Lorsqu'un prisme a pour bases des parallélogrammes, on lui donne le nom de *parallélipipède*. On voit qu'un parallélipipède est un polyèdre compris sous six parallélogrammes (*fig.* 193).

Fig. 194.



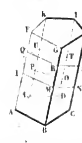
Lorsqu'un parallélipipède droit a pour bases des rectangles, on lui donne le nom de *parallélipipède rectangle :* ce polyèdre est compris sous six rectangles. Un parallelipipède rectangle a pour *dimensions* les longueurs des trois arêtes qui partent d'un même sommet (*fig.* 194).

Lorsque les faces d'un parallélipipède rectangle sont des *carrés*, on est ramené au *cube* ou hexaèdre régulier (198).

I. — Théorèmes généraux sur les prismes.

200. *Les sections faites dans un prisme par des plans parallèles qui rencontrent toutes les faces latérales, sont des polygones égaux* (*fig.* 195).

Fig. 195.



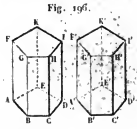
Soit le prisme AH, soient les deux sections parallèles LMNOP, QRSTU. Les côtés de ces sections seront parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième, et ces côtés seront égaux comme portions de parallèles comprises entre parallèles.

Les deux polygones obtenus seront donc égaux, car ils auront leurs côtés égaux et leurs angles égaux, comme formés par des droites parallèles et dirigées dans le même sens.

Lorsque la section est déterminée par un plan perpendiculaire aux arêtes latérales du prisme, elle prend le nom de *section droite* du prisme.



201. *Deux prismes sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal, compris entre une base et une face égales chacune à chacune et semblablement disposées* (*fig.* 196).


Fig. 196.

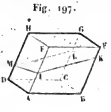
Supposons les deux prismes AH, A'H'. Soient le dièdre AB égal au dièdre A'B', la base ABCDE égale à la base A'B'C'D'E', la face ABGF égale à la face A'B'G'F'. Portons les deux prismes l'un sur l'autre, de manière que les bases égales coïncident. Le dièdre A'B' étant égal au dièdre AB, la face A'B'G'F' tombera dans le plan de la face ABGF. D'après l'égalité de ces deux faces, l'angle ABG est égal à l'angle A'B'G' : l'arête B'G' prendra donc la direction de l'arête BG, et le sommet G' coïncidera avec le sommet G, puisqu'on a $B'G' = BG$.

Une fois la coïncidence des deux bases inférieures établie, ainsi que celle de deux arêtes latérales BG, B'G', il résulte de la régle indiquée pour la construction d'un prisme (199), que tous les autres sommets des deux bases supérieures des prismes considérés devront aussi coïncider. Ces deux prismes eux-mêmes se confondront donc et seront égaux.

L'égalité des deux bases inférieures exige $2n - 3$ conditions (40); comme AB est alors égal à A'B', l'égalité des deux faces latérales n'exige plus que deux conditions, puisque ces faces sont des parallélogrammes; enfin l'égalité des deux angles dièdres compte pour une condition. L'égalité de deux prismes AH, A'H', exige donc $2n$ conditions, en désignant par n le nombre des côtés de l'une des bases.

Deux prismes droits sont égaux lorsqu'ils ont des bases et des hauteurs égales. En effet, toutes les conditions d'égalité indiquées dans l'énoncé du théorème précédent sont remplies : tous les angles dièdres formés par les faces latérales avec les bases sont droits, toutes les faces latérales homologues des deux prismes sont des rectangles égaux comme ayant même base et même hauteur.

202. *Dans tout parallélipipède, les faces opposées sont égales et parallèles* (*fig.* 197).


Fig. 197.

Considérons les deux faces opposées ADHE, BCGF. Les deux côtés AE, BF, sont égaux et parallèles, comme côtés opposés d'un même parallélogramme ABFE ; les deux côtés AD, BC, sont aussi égaux et parallèles comme côtés opposés d'un même parallélogramme ABCD; les deux angles DAE, CBF, sont

par suite égaux comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, et les plans de ces angles sont parallèles (175). Les deux parallélogrammes ADHE, BCGF, ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux (48), et leurs plans sont parallèles.

Cette propriété est importante : *elle permet de prendre pour bases d'un parallélipipède deux faces opposées quelconques*, puisque ces faces remplissent les conditions imposées aux bases d'un prisme, et que les autres faces formant alors la surface latérale du polyèdre, réunissent toujours ses deux bases en restant des parallélogrammes (199).

Toute section faite dans un parallélipipède par un plan qui rencontre deux faces opposées est un parallélogramme. En effet, si l'on considère la section IKLM, on voit que dans ce quadrilatère les côtés opposés sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième.

203. *Dans tout parallélipipède, les diagonales se divisent mutuellement en parties égales.*

Je considère le parallélipipède AG, et les deux diagonales BH et DF (*fig.* 198). Les arêtes latérales BF, DH étant égales et parallèles, la figure BDHF est un parallélogramme dont les diagonales BH et DF sont inégales et se coupent mutuellement en parties égales au point O (43). Considérons les deux diagonales DF et AG. Les arêtes AD et FG, étant égales et parallèles, la figure ADGF est un parallélogramme dont les diagonales DF et AG se coupent mutuellement en parties égales : le point O étant déjà le milieu de DF est aussi le milieu de AG ; on prouverait de même qu'il est le milieu de la quatrième diagonale CE du parallélipipède.

Fig. 198.

Si le parallélipipède devient rectangle, les parallélogrammes que nous venons de considérer se transforment en rectangles, et leurs diagonales deviennent égales. *Les quatre diagonales d'un parallélipipède rectangle sont donc égales.*

Le point O est appelé le *centre* du parallélipipède AG, parce que toute droite limitée à la surface du parallélipipède et passant par ce point y est partagée en deux parties égales : c'est ce que les deux triangles AOK, GOL, prouvent immédiatement.

204. *Dans tout parallélipipède, la somme des carrés des quatre diagonales est égale à la somme des carrés des douze arêtes* (*fig.* 198).

Les parallélogrammes ACGE, BDHF, permettent de poser (108) :

$$AG^2 + CE^2 = 2AE^2 + 2AC^2,$$
$$BH^2 + DF^2 = 2BF^2 + 2BD^2.$$

Si l'on ajoute ces deux égalités membre à membre, et si l'on remarque que BF = AE, il viendra

$$AG^2 + BH^2 + CE^2 + DF^2 = 4AE^2 + 2(AC^2 + BD^2).$$

Mais le parallélogramme ABCD donne

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2.$$

En substituant, on aura donc

$$AG^2 + BH^2 + CE^2 + DF^2 = 4AE^2 + 4AB^2 + 4AD^2.$$

Si le parallélipipède est rectangle, ses diagonales sont égales (203) et le premier membre se réduit à $4AG^2$. En divisant par 4, on obtient donc

$$AG^2 = AE^2 + AB^2 + AD^2.$$

Ainsi, *dans tout parallélipipède rectangle, le carré d'une diagonale est égal à la somme des carrés des trois arêtes qui partent d'un même sommet*. Cette relation est facile à démontrer directement.

Si le parallélipipède rectangle devient un cube, toutes les arêtes sont égales, et l'on a $AG^2 = 3AE^2$ ou $AG = AE\sqrt{3}$. Ainsi *le carré de la diagonale d'un cube est égal au triple carré de son arête*. La diagonale d'un cube est le côté du triangle équilatéral inscrit dans un cercle ayant pour rayon l'arête du cube.

II. — Surface et volume du prisme.

205. *La surface latérale d'un prisme droit a pour mesure le produit du périmètre de sa base par sa hauteur* (*fig.* 199).

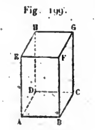
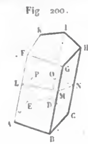


Fig. 199.

En effet, cette surface latérale est la somme des rectangles ABFE, BCGF, etc.; ces rectangles ont pour hauteur commune la hauteur du prisme, et leurs bases sont les côtés AB, BC, etc., de la base du prisme. La somme de tous ces rectangles aura donc pour expression $(AB + BC + \ldots).AE$ ou $P.H$, en désignant par P le périmètre de la base du prisme et par H sa hauteur.

S'il s'agit d'un prisme oblique (*fig.* 200), *sa surface latérale sera égale au produit du périmètre de sa section droite par l'une de ses arêtes latérales*. En effet, les côtés de la section droite LMNOP sont les hauteurs des différents parallélogrammes qui constituent la surface latérale du prisme, et ces parallélogrammes ont des bases égales puisque toutes les arêtes latérales d'un prisme sont égales. La somme de tous ces parallélogrammes aura donc pour expression (LM + MN + ...). AF ou p . A, en désignant par p le périmètre de la section droite du prisme et par A son arête latérale.

Fig 200.



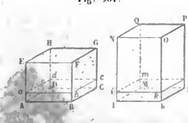
206. Nous ramènerons la mesure du volume d'un prisme quelconque à celle du volume d'un parallélipipède, et la mesure du volume d'un parallélipipède quelconque à celle du volume d'un parallélipipède rectangle.

Pour obtenir l'expression du volume d'un parallélipipède rectangle, nous chercherons quelle influence la variation de la hauteur ou la variation de la base a sur celle du volume.

207. *Deux parallélipipèdes rectangles qui ont même base ont des volumes proportionnels à leurs hauteurs* (*fig.* 201).

Soient les deux parallélipipèdes rectangles AG et IP, dont les bases ABCD, IKLM sont égales. Supposons une commune mesure $Aa = Ii$ entre les deux hauteurs AE, IN, et admettons que cette commune mesure soit contenue 5 fois dans AE et 7 fois dans IN, de sorte qu'on aura $\frac{AE}{IN} = \frac{5}{7}$. Par tous les points de division des hauteurs, menons dans les deux parallélipipèdes des plans parallèles aux bases. Nous déterminerons ainsi, dans le parallélipipède AG cinq parallélipipèdes rectangles partiels, et dans le parallélipipède IP sept parallélipipèdes rectangles partiels; ces parallélipipèdes partiels seront tous égaux entre eux comme prismes droits ayant même base et même hauteur (201), de sorte que l'un d'eux pourra servir de commune mesure entre les deux parallélipipèdes AG et IN et qu'on aura aussi $\frac{\text{par. AG}}{\text{par. IN}} = \frac{5}{7}$. Les volumes de ces deux parallélipipèdes seront donc bien proportionnels à leurs hauteurs.

Fig. 201.



Si les deux hauteurs AE, IN, étaient incommensurables, on emploierait le raisonnement connu (63).

208. *Deux parallélipipèdes rectangles qui ont même hauteur ont des volumes proportionnels à leurs bases.*

Soient P et P′ les deux parallélipipèdes considérés. Désignons par a leur hauteur commune, par b et c les dimensions de la base B du parallélipipède P, par b' et c' les dimensions de la base B′ du parallélipipède P′. Prenons un troisième parallélipipède rectangle P″ dont les dimensions (199) soient a, b', c.

Comparons les parallélipipèdes P et P″. On peut prendre pour base d'un parallélipipède l'une quelconque de ses faces (202) : si l'on prend pour bases des parallélipipèdes considérés les faces qui, dans ces parallélipipèdes, ont pour dimensions a et c, on pourra dire que ces deux parallélipipèdes ont même base et qu'ils sont proportionnels à leurs hauteurs b et b'. On aura donc (207) :

$$\frac{P}{P''} = \frac{b}{b'}.$$

Comparons les parallélipipèdes P″ et P′, et prenons pour bases de ces parallélipipèdes les faces qui ont pour dimensions a et b'. Ces deux parallélipipèdes ayant alors même base, seront proportionnels à leurs hauteurs c et c'. On aura donc

$$\frac{P''}{P'} = \frac{c}{c'}.$$

Multiplions membre à membre les deux égalités obtenues. Il viendra

$$\frac{PP''}{P''P'} = \frac{bc}{b'c'} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{P'} = \frac{bc}{b'c'} = \frac{B}{B'}.$$

On énonce encore le théorème qu'on vient de démontrer, en disant que *deux parallélipipèdes rectangles qui ont une dimension commune, sont proportionnels aux produits de leurs deux autres dimensions.*

209. *Le volume d'un parallélipipède rectangle a pour mesure le produit des mesures de sa base et de sa hauteur.*

Soient deux parallélipipèdes rectangles P et P′ ; désignons leurs bases par B et B′, leurs hauteurs par H et H′. Les volumes de ces parallélipipèdes étant *proportionnels* à leurs hauteurs et *proportionnels* à leurs bases, seront aussi *proportionnels* aux produits des bases par les hauteurs (*Alg. élém.*, 58). On aura donc immédiatement

$$\frac{P}{P'} = \frac{BH}{B'H'} = \frac{B}{B'} \cdot \frac{H}{H'}.$$

Mesurer un volume, c'est chercher son rapport à l'unité de volume. On prend toujours pour unité de volume le *cube* construit sur l'unité de longueur. Si P′ devient le mètre cube, B′ deviendra le mètre carré et H′ le mètre. On aura, par conséquent :

$$\frac{P}{1^{Mc}} = \frac{B}{1^{Mq}} \cdot \frac{H}{1^{M}}.$$

$\frac{P}{1^{Mc}}$ représente la *mesure* du volume du parallélipipède rectangle P, $\frac{B}{1^{Mq}}$ représente la *mesure* du rectangle qui lui sert de base (137) et $\frac{H}{1^{M}}$ représente la *mesure* de sa hauteur. On voit donc que le même nombre abstrait représente la mesure du volume du parallélipipède et le produit des mesures de sa base et de sa hauteur. C'est ce qu'on exprime plus rapidement, en employant la locution inexacte : *Tout parallélipipède rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Si l'on avait désigné par a, b, c les dimensions du parallélipipède P et par a', b', c' celles du parallélipipède P′, on aurait pu écrire

$$\frac{P}{P'} = \frac{a.b.c}{a'.b'.c'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}.$$

P′ devenant le mètre cube, on aurait eu

$$a' = b' = c' = 1^{M},$$

c'est-à-dire

$$\frac{P}{1^{Mc}} = \frac{a}{1^{M}} \cdot \frac{b}{1^{M}} \cdot \frac{c}{1^{M}}.$$

On aurait donc pu énoncer les résultats précédents en disant : *Deux parallélipipèdes rectangles quelconques sont proportionnels aux produits de leurs trois dimensions ; Tout parallélipipède rectangle a pour mesure le produit de ses trois dimensions.* Mais cette forme n'est applicable qu'aux parallélipipèdes rectangles, tandis que celle que nous avons adoptée est applicable, comme nous allons le voir, à tous les prismes.

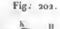
Le volume d'un cube est, d'après ce que nous venons de dire, *égal à la troisième puissance de son arête.* On comprend maintenant la synonymie des mots *cube* et *troisième puissance* employés en arithmétique.

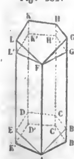
210. Pour passer au volume d'un *parallélipipède droit* et ensuite à celui d'un *parallélipipède oblique*, nous nous appuierons sur le théorème suivant.

Tout prisme oblique est équivalent au prisme droit qui a

pour base la section droite du prisme oblique et pour hauteur l'une de ses arêtes latérales (*fig.* 202).

Soit le prisme oblique AK qui a pour bases les polygones ABCDE, FGHKL. Menons, par les extrémités de l'arête AF, les sections droites AB′C′D′E′, FG′H′K′L′. Dans le cas de la figure, ces sections sont inférieures aux bases correspondantes, de sorte qu'il faut prolonger les arêtes latérales du prisme jusqu'à la rencontre de la section menée par le sommet A. Le volume compris entre les deux sections parallèles AB′C′D′E′, FG′H′K′L′, forme évidemment le prisme droit AK′; et ce prisme a pour base la section droite du prisme oblique et, pour hauteur, son arête latérale AF.


Fig. 202.



Le prisme oblique AK et le prisme droit AK′ ont une partie commune : cette partie commune est le volume compris entre la base inférieure ABCDE du prisme oblique et la base supérieure FG′H′K′L′ du prisme droit. Pour prouver l'équivalence des deux prismes, il suffit donc de prouver l'égalité du polyèdre inférieur AB′C′D′E′BCDE et du polyèdre supérieur FG′H′K′L′GHKL. Portons le premier polyèdre sur le second, de manière que les sections égales (200) AB′C′D′E′, FG′H′K′L′, coïncident. Les arêtes B′B et G′G, alors perpendiculaires au même plan, se confondront en direction. Ces arêtes sont d'ailleurs égales, car les arêtes du prisme oblique étant égales à celles du prisme droit à cause de l'arête commune AF, on a

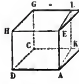
$$BG = B'G', \quad \text{d'où} \quad BB' = GG'.$$

Le sommet B coïncidera donc avec le sommet G. De même, les autres sommets C et H, D et K, etc., se confondront, et les deux polyèdres coïncidant, seront égaux.

211. *Un parallélipipède quelconque a pour mesure de son volume le produit de sa base par sa hauteur.*

Considérons d'abord un *parallélipipède droit* (*fig.* 203). Soit ABCD la base de ce parallélipipède, soit AE sa hauteur. Nous pourrons regarder ABFE comme base de ce parallélipipède (202), dont les arêtes latérales seront alors parallèles à AD. Menons par l'arête AE, perpendiculaire à AD, la section droite AKLE. Cette section, qui, en général, est un parallélogramme (202), sera ici un rectangle, puisque AE est perpendiculaire au plan ABCD. Le parallélipipède considéré est donc équivalent au pa-

Fig. 203.



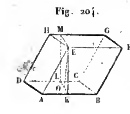
rallélipipède rectangle qui a pour base le rectangle AKLE et pour hauteur l'arête AD (210). Mais ce parallélipipède a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur (209), c'est-à-dire

$$AE \times AK \times AD;$$

telle sera donc aussi la mesure du parallélipipède droit proposé. AE représente sa hauteur, $AK \times AD$ est la mesure du parallélogramme ABCD qui lui sert de base. *Tout parallélipipède droit a* donc aussi *pour mesure de son volume le produit de sa base par sa hauteur.*

Supposons maintenant un *parallélipipède oblique* tout à fait quelconque (*fig.* 204). Soient ABCD la base de ce parallélipipède et AE son arête latérale. On prendra la face AEHD pour base de ce parallélipipède, et ses arêtes latérales seront alors dirigées suivant EF. Menons par le point E la section droite EKLM. Cette section sera un parallélogramme, EK étant perpendiculaire à l'arête AB sans l'être au plan ABCD. Le parallélipipède considéré sera donc équivalent au parallélipipède droit dont la base est EKLM et dont la hauteur est AB (210). Mais ce parallélipipède, d'après ce qu'on vient de dire, a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur; ce qui revient à

Fig. 204.



$$AB \times LK \times EO,$$

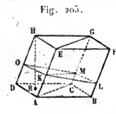
EO étant la perpendiculaire abaissée du point E, sur LK dans le plan EKLM. EO est la hauteur même du parallélipipède proposé, car le plan EKLM étant perpendiculaire à AB est perpendiculaire au plan ABCD (182), et la droite EO, menée dans le plan EKLM perpendiculairement à l'intersection commune LK, est perpendiculaire au plan ABCD (183); ainsi EO représente la distance des deux bases du parallélipipède oblique ou sa hauteur. $AB \times LK$ est la mesure du parallélogramme ABCD. *Tout parallélipipède oblique a,* par conséquent, *pour mesure le produit de sa base par sa hauteur* (*).

212. *Le plan mené par deux arêtes opposées d'un parallélipipède le divise en deux prismes triangulaires équivalents.*

(*) Ce théorème a été démontré, pour la première fois, de cette manière, par M. A. Amiot. Voir ses excellentes *Leçons nouvelles de Géométrie*, 1850.

Soit le parallélipipède AG (*fig.* 205). Je mène un plan par les arêtes opposées AE, CG. Ces arêtes étant égales et parallèles, la figure AEGC sera un parallélogramme. Les deux triangles ABC, EFG, ont leurs côtés égaux et parallèles, et il en est de même des triangles ACD, EGH. Les deux polyèdres ABCEFG, ACDEGH, seront donc des prismes triangulaires (199), et ces prismes auront des bases égales comme moitiés d'un même parallélogramme, et leur hauteur commune sera celle du parallélipipède AG. Il faut prouver l'équivalence des deux prismes : elle est évidente si le parallélipipède proposé est *droit*, puisque deux prismes *droits* qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont égaux (201).

Fig. 205.

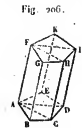


Si le parallélipipède AG est oblique, je mène sa section droite KLMO. Cette section droite est partagée par le plan diagonal AEGC en deux triangles égaux KML, KMO, qui sont les sections droites des deux prismes triangulaires. Le prisme triangulaire ABCEFG est équivalent au prisme droit qui a pour base KML et pour hauteur AE (210); le prisme triangulaire ACDEGH est équivalent au prisme droit qui a pour base KMO et pour hauteur AE. Puisqu'on a KML = KMO, les deux prismes droits sont égaux; les prismes triangulaires obliques qui leur sont respectivement équivalents seront donc équivalents entre eux, de sorte que chacun d'eux sera la moitié du parallélipipède AG.

213. *Le volume d'un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Soit d'abord (*fig.* 205) le prisme triangulaire ABCEFG. Par l'arête AE, je mène un plan parallèle au plan BCGF; par l'arête CG, un plan parallèle au plan ABFE; je prolonge les deux bases du prisme, et j'achève ainsi le parallélipipède AG, double du prisme ABCEFG (212). Ce parallélipipède a pour mesure sa base ABCD ou 2 ABC, multipliée par sa hauteur HR. Le prisme triangulaire ABCEFG aura donc pour mesure la moitié de ce produit, c'est-à-dire le produit de sa base ABC par sa hauteur HR.

Fig. 206.



Soit maintenant un prisme polygonal quelconque AI (*fig.* 206). Je le décompose en prismes triangulaires, en menant des plans diagonaux par l'arête AF et les arêtes CH et DI qui ne sont pas situées dans un même plan. Ces

prismes triangulaires ont la même hauteur que le prisme polygonal, et leurs bases sont les triangles ABC, ACD, ADE, que les plans diagonaux déterminent dans sa base ABCDE. Si l'on désigne par H la hauteur du prisme proposé, on aura d'après ce qui précède :

$$\text{pr.}ABC = ABC \times H,$$
$$\text{pr.}ACD = ACD \times H,$$
$$\text{pr.}ADE = ADE \times H.$$

Le volume du prisme AI aura donc pour expression

$$(ABC + ACD + ADE) \times H = B.H,$$

en désignant par B le polygone ABCDE, base du prisme AI.

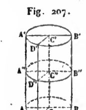
En désignant par P et P′ deux prismes quelconques, par B et B′ leurs bases, par H et H′ leurs hauteurs, on aura $P = BH$, $P' = B'H'$. On voit donc que *les volumes de deux prismes quelconques sont proportionnels aux produits de leurs bases par leurs hauteurs*; que *deux prismes qui ont des bases équivalentes sont proportionnels à leurs hauteurs*; que *deux prismes qui ont même hauteur sont proportionnels à leurs bases*.

III. — Surface et volume du cylindre.

214. Si le rectangle ACC′A′ tourne autour de l'un de ses côtés CC′ comme axe, il engendrera un *cylindre droit à base circulaire*. Les deux côtés CA et C′A′ décriront, dans deux plans perpendiculaires à l'axe CC′ (159), deux cercles qui seront les *bases* du cylindre et dont les centres seront sur l'axe. Le dernier côté AA′ engendrera une surface courbe qui sera la *surface latérale* ou *convexe* du cylindre droit. La distance CC′ des deux bases sera la *hauteur* du cylindre (*fig.* 207).

Un point quelconque A″ de la droite AA′, décrit une circonférence de cercle dont le centre est sur l'axe et dont le plan est perpendiculaire à l'axe ; car si l'on abaisse du point A″ la perpendiculaire A″C″ sur l'axe CC′, cette droite conservera la même longueur pendant le mouvement du rectangle générateur du cylindre, et restera toujours perpendiculaire à l'axe. En d'autres termes, *tout plan perpendiculaire à l'axe du cylindre y détermine une section égale à sa base*.

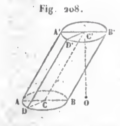
Fig. 207.



Si l'on suppose la droite AA′ astreinte à glisser parallèlement à elle-même tandis que son extrémité A décrit la circonférence ADB, son extrémité A′ décrira une circonférence A′D′B′ parallèle à la circonférence

ADB, et dont le centre sera en C′ à l'extrémité de la parallèle CC′ = AA′, menée par le centre C de la circonférence ADB à la droite AA′ (*fig.* 208). En effet, la droite CC′ et une position quelconque DD′ de la droite AA′ déterminent un parallélogramme DCC′D′, dans lequel les deux côtés CD, C′D′, sont égaux et parallèles. Le point A′ restera donc toujours à la même distance du point C′ dans le plan mené par le point C′ parallèlement au plan ADB. Le corps limité par les deux

Fig. 208.



cercles ADB, A′D′B′, et par la surface courbe engendrée par AA′ sera un *cylindre oblique à base circulaire.* Toutes les sections parallèles aux bases de ce cylindre seront évidemment des cercles égaux à ces bases.

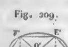
A un point de vue plus général, on appelle *surface cylindrique* toute surface engendrée par une droite astreinte à glisser parallèlement à elle-même, en s'appuyant sur une courbe quelconque, qui est la *directrice* de la surface, tandis que la droite mobile en est la *génératrice.* Le volume compris entre une pareille surface et deux plans sécants parallèles est un *cylindre :* les deux plans sécants en déterminent *les bases,* et leur distance est la *hauteur* du cylindre. On suppose, dans ce cas, que la directrice est une courbe fermée.

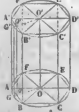
215. *La surface convexe d'un cylindre droit à base circulaire a pour mesure le produit de la circonférence de base du cylindre par sa hauteur.*

La surface totale d'un prisme ou d'un cylindre est égale à sa surface latérale augmentée de la somme de ses deux bases.

Inscrivons dans le cylindre proposé (*fig.* 209) un prisme droit, en inscrivant dans sa base OA un polygone régulier ABCDEF, et en élevant par les sommets de ce polygone des perpendiculaires à la base inférieure du cylindre, jusqu'à la rencontre de sa base supérieure.

Fig. 209.





A mesure qu'on doublera indéfiniment le nombre des côtés du polygone régulier inscrit, son périmètre s'approchera autant qu'on voudra de la circonférence OA, qui sera sa limite (132). La hauteur des prismes droits formés restera toujours égale à celle du cylindre. Il est évident que la surface totale du cylindre est plus grande que la surface totale du prisme, car la surface composée des deux segments AGB, A′G′B′, et de

la portion de surface cylindrique comprise entre les deux génératrices AA′, BB′, surpasse le rectangle correspondant ABB′A′. De plus, la surface totale du cylindre est la limite des surfaces totales des prismes inscrits, puisque les bases de ces prismes ont pour limites les bases du cylindre (144). On peut donc dire, en laissant de côté les bases des prismes et celles du cylindre, que la surface latérale des prismes droits successivement construits a pour limite la surface latérale du cylindre.

La surface latérale d'un prisme droit a toujours pour expression sa hauteur multipliée par le périmètre de sa base (205). Nous avons démontré (132) que toute relation existant constamment entre deux quantités variables, existe aussi entre leurs limites. On pourra donc dire que la surface latérale du cylindre droit, limite des surfaces latérales des prismes droits qui y sont inscrits, est égale à la hauteur du cylindre, qui est la même que celle des prismes, multipliée par la circonférence de sa base, limite des périmètres des bases des prismes inscrits.

Si l'on désigne par H la hauteur du cylindre, et par R le rayon de sa base, l'expression de sa surface convexe sera

$$2\pi RH.$$

L'expression de sa surface totale sera

$$2\pi RH + 2\pi R^2 \quad \text{ou} \quad 2\pi R(H+R).$$

En nous reportant à la mesure de la surface latérale d'un prisme oblique quelconque, et en étendant le raisonnement précédent au cas d'un cylindre oblique à base fermée quelconque, nous verrons que la surface latérale d'un pareil cylindre a pour mesure *le produit du périmètre de sa section droite par sa génératrice.*

216. *Le volume d'un cylindre quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

D'après ce qu'on vient de voir, le volume de ce cylindre sera la limite des volumes des prismes droits ou obliques qu'on y inscrira, en doublant indéfiniment le nombre de leurs faces. Chacun de ces prismes aura pour mesure de son volume le produit de sa base par sa hauteur, qui sera aussi celle du cylindre (213). Le volume du cylindre aura donc pour expression le produit de sa hauteur par la surface de sa base, limite des bases des prismes inscrits.

S'il s'agit d'un cylindre circulaire ayant R pour rayon de sa base et H pour hauteur, son volume sera égal à $\pi R^2 H$.

Deux cylindres quelconques sont proportionnels aux produits de leurs bases par leurs hauteurs. Deux cylindres qui ont même base, sont proportionnels à leurs hauteurs. Deux

cylindres qui ont même hauteur, sont proportionnels à leurs bases.

217. Deux cylindres circulaires droits sont *semblables* lorsqu'ils sont engendrés par des rectangles semblables. *Leurs surfaces convexes sont proportionnelles aux carrés des rayons de leurs bases ou de leurs hauteurs; leurs volumes sont proportionnels aux cubes des mêmes éléments.*

Désignons par S et S' les surfaces latérales des cylindres donnés, par V et V' leurs volumes, par R et R' les rayons de leurs bases, par H et H' leurs hauteurs.

Les rectangles générateurs étant semblables, on aura

$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{H'}.$$

On a d'ailleurs

$$S = 2\pi RH, \quad S' = 2\pi R'H',$$

d'où

$$\frac{S}{S'} = \frac{RH}{R'H'} = \frac{R}{R'} \times \frac{H}{H'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

On a aussi

$$V = \pi R^2 H, \quad V' = \pi R'^2 H',$$

d'où

$$\frac{V}{V'} = \frac{R^2 H}{R'^2 H'} = \frac{R^2}{R'^2} \times \frac{H}{H'} = \frac{R^3}{R'^3}.$$

De

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

on déduit

$$\frac{S}{S'} = \frac{2\pi R^2}{2\pi R'^2}.$$

En appliquant un théorème connu de calcul, on en conclura

$$\frac{S + 2\pi R^2}{S' + 2\pi R'^2} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Les surfaces totales de deux cylindres circulaires droits semblables sont donc aussi proportionnelles aux carrés des rayons de leurs bases.

CHAPITRE II

LES PYRAMIDES ET LES CONES.

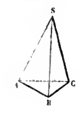
218. On forme une *pyramide*, en coupant un angle polyèdre par un plan qui rencontre toutes ses arêtes d'un même côté du sommet. Une pyramide est donc un polyèdre dont l'une des faces est un polygone quelconque, et dont les autres faces sont des triangles ayant pour bases les différents côtés de ce polygone et pour sommets un même point de l'espace. Ce point est le *sommet* de la pyramide, la face polygonale en est la ***base***, les faces triangulaires sont ses *faces latérales*, et leur ensemble constitue sa *surface latérale* ou *convexe*. La ***hauteur*** de la pyramide est la distance de son sommet à sa base. Ses ***arêtes latérales*** joignent son sommet aux différents sommets de sa base.

Une pyramide est *triangulaire, quadrangulaire, pentagonale*, etc., suivant que sa base est un *triangle*, un *quadrilatère*, un *pentagone*, etc. On donne aussi le nom de *tétraèdre* à toute pyramide triangulaire.

Les tétraèdres jouent, dans la géométrie de l'espace, le même rôle que les triangles dans la géométrie plane. De même qu'on peut fixer la position d'un point dans un plan, en le joignant à deux points donnés, c'est-à-dire en formant un triangle dont il est l'un des sommets; de même, on peut fixer la position d'un point dans l'espace en le joignant à trois points donnés, c'est-à-dire en formant un tétraèdre dont il est l'un des sommets.

Il est important de remarquer que, dans une pyramide triangulaire (*fig.* 210), on peut prendre pour base telle face que l'on veut, puisque toutes les faces du polyèdre sont alors des triangles. Le sommet de la pyramide est le sommet opposé à la face qu'on choisit pour base.

Fig. 210.

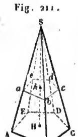


Une pyramide est *régulière*, lorsqu'elle a pour base un polygone régulier et pour hauteur la droite qui joint son sommet au centre de sa base.

I. — Théorèmes généraux sur les pyramides.

219. *Tout plan parallèle à la base d'une pyramide divise sa hauteur et ses arêtes latérales en parties proportionnelles; la*

section obtenue est un polygone semblable à la base de la pyramide (*fig.* 211).



Si nous nous reportons à la remarque qui termine le n° 174, nous pourrons écrire immédiatement, le plan *abcde* étant parallèle au plan ABCDE, et toutes les droites SH, SA, SB, etc., partant d'un même point :

$$\frac{SH}{Sh} = \frac{SA}{Sa} = \frac{SB}{Sb} = \frac{SC}{Sc} = \frac{SD}{Sd} = \frac{SE}{Se}.$$

Si l'on compare les deux polygones ABCDE, *abcde*, on voit qu'ils ont leurs côtés respectivement parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième. Les angles des deux polygones sont donc égaux, puisqu'ils ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens. Le parallélisme de ces mêmes côtés permet d'ailleurs de poser

$$\frac{AB}{ab} = \frac{SB}{Sb}, \quad \frac{BC}{bc} = \frac{SB}{Sb}, \quad \text{d'où} \quad \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}.$$

On prouverait de la même manière qu'on a

$$\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EA}{ea}.$$

Les deux polygones ABCDE, *abcde*, ayant leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels, sont semblables.

La similitude de ces deux polygones donne

$$\frac{ABCDE}{abcde} = \frac{AB^2}{ab^2}.$$

On a, d'après ce qui précède,

$$\frac{AB}{ab} = \frac{SA}{Sa} = \frac{SH}{Sh},$$

d'où

$$\frac{AB^2}{ab^2} = \frac{SA^2}{Sa^2} = \frac{SH^2}{Sh^2}.$$

On aura donc aussi

$$\frac{ABCDE}{abcde} = \frac{SH^2}{Sh^2}.$$

On en conclut que, *dans toute pyramide, les sections parallèles à la base sont proportionnelles aux carrés de leurs distances au sommet.*

220. *Lorsque deux pyramides ont des hauteurs égales, les sections menées dans ces pyramides parallèlement aux bases et à la même distance des sommets, sont proportionnelles aux bases (fig. 212).*

Fig. 212.

Soient les deux pyramides SABCD, S′A′B′C′. Je suppose les deux hauteurs SH, S′H′, égales; je prends $Sh = S'h'$ et, par les points h et h', je mène les sections $abcd$ et $a'b'c'$ parallèles aux bases ABCD et A′B′C′. Nous aurons, d'après la dernière remarque (219),

$$\frac{ABCD}{abcd} = \frac{SH^2}{Sh^2}, \quad \frac{A'B'C'}{a'b'c'} = \frac{S'H'^2}{S'h'^2}.$$

Il en résulte, puisqu'on a $SH = S'H'$ et $Sh = S'h'$,

$$\frac{ABCD}{abcd} = \frac{A'B'C'}{a'b'c'}.$$

Si les bases des deux pyramides sont équivalentes, les sections le seront aussi.

221. *Deux pyramides sont égales, lorsqu'elles ont un angle dièdre égal compris entre une base et une face égales chacune à chacune et semblablement disposées (fig. 213).*

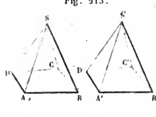


Fig. 213.

Soient l'angle dièdre AB égal à l'angle dièdre A′B′, la base ABCD égale à la base A′B′C′D′, la face ASB égale à la face A′S′B′. Je porte la pyramide S′A′B′C′D′ sur la pyramide SABCD, de manière que les deux bases égales coïncident. L'angle dièdre A′B′ étant égal à l'angle dièdre AB, et les parties égales étant disposées de la même manière dans les deux pyramides, la face A′S′B′ tombera dans le plan de la face ASB. L'angle S′A′B′ étant égal à l'angle SAB, l'arête A′S′ prendra la direction de l'arête AS, et le point S′ tombera au point S puisqu'on a $A'S' = AS$. Les deux pyramides ayant mêmes sommets, coïncideront et seront égales.

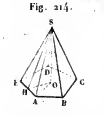
Si l'on désigne par n le nombre des côtés de l'une des bases des deux pyramides, l'égalité des bases de ces pyramides exigera $2n - 3$ conditions (40). L'égalité des angles dièdres AB et A′B′ compte pour une condition. Enfin, l'égalité des triangles SAB, S′A′B′, n'exige plus que deux conditions, puisqu'on

a $AB = A'B'$ d'après l'égalité des bases. Ainsi l'égalité des deux pyramides exige en tout $2n$ conditions.

II. — Surface et volume de la pyramide.

222. *La surface latérale d'une pyramide régulière a pour mesure la moitié du produit du périmètre de la base par l'apothème de la pyramide* (*fig.* 214).

Fig. 214.



On appelle *apothème* d'une pyramide régulière la perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide sur un côté quelconque de sa base.

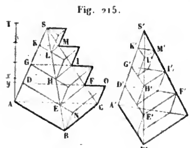
La pyramide SABCDE étant supposée régulière, toutes ses arêtes latérales sont égales comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire SO, hauteur de la pyramide; car le point O étant le centre du polygone régulier ABCDE, toutes les distances OA, OB, etc., sont les rayons d'un même cercle. Les faces latérales de la pyramide sont donc des triangles isocèles égaux, et les hauteurs de ces triangles isocèles, hauteurs qui sont les apothèmes de la pyramide, sont égales. On pourra poser $ASE = \frac{1}{2} \cdot AE.SH$, SH étant l'apothème qui correspond au côté AE. Si la base a n côtés, la surface latérale de la pyramide se composera de n triangles égaux au triangle ASE, c'est-à-dire qu'elle aura pour expression $\frac{1}{2} \cdot n AE.SH$. Mais $n.AE$ représente le périmètre P de la base de la pyramide : sa surface convexe sera, par suite, représentée par $\frac{1}{2}$ P.SH.

223. Pour arriver à l'expression du volume d'une pyramide quelconque, nous nous appuierons sur le théorème suivant :

Deux pyramides triangulaires qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales, sont équivalentes (*fig.* 215).

Je place les bases équivalentes ABC et A'B'C' des deux pyramides SABC, S'A'B'C', sur un même plan : leur hauteur commune est alors égale à la droite AT.

Fig. 215.



Supposons que les pyramides proposées ne soient pas équivalentes et que SABC soit la plus grande. On pourra toujours représenter leur différence quelle qu'elle soit, par le volume d'un prisme ayant pour base ABC et pour hauteur Ax.

Le volume de ce prisme aura pour expression $ABC \times Ax$ (213), et l'on pourra déterminer le facteur Ax de manière à satisfaire à la condition indiquée.

Divisons AT en parties égales, moindres que Ax, et soit Ay l'une de ces parties. Par tous les points de division obtenus, menons des plans parallèles au plan commun des deux bases. Nous déterminerons dans les pyramides des sections deux à deux équivalentes, puisque les bases de ces pyramides sont équivalentes (220).

Sur la base ABC et sur chacune des sections de la pyramide SABC, construisons des prismes *extérieurs* à la pyramide. Pour construire le premier de ces prismes, je mènerai par les points B et C, jusqu'au plan de la section DEF, des parallèles BN et CO à l'arête SA. Toutes les faces latérales du polyèdre ABCDNO seront des parallélogrammes (BN parallèle à SA est dans le plan SAB et coupe le plan DEF en un point N appartenant à l'intersection DE des plans SAB et DEF, etc.), et les deux bases ABC, DNO, seront des triangles égaux et parallèles. Le polyèdre ABCDNO sera donc bien un prisme extérieur à la pyramide SABC : on construira les autres prismes de la même manière.

Sous les sections de la pyramide S′A′B′C′, nous construirons des prismes *intérieurs* à cette pyramide ; le nombre des prismes extérieurs à la pyramide SABC surpassera donc d'une unité le nombre des prismes intérieurs à la pyramide S′A′B′C′. Pour construire le premier prisme intérieur, nous mènerons par les points E′ et F′, jusqu'à la rencontre de la base ABC, des parallèles à l'arête S′A′. Nous construirons les autres prismes de la même manière.

Si l'on compare maintenant les deux séries de prismes, on voit que le *second* prisme extérieur est équivalent au *premier* prisme intérieur, puisque leurs bases DEF, D′E′F′, sont équivalentes, et qu'ils ont la même hauteur. De même, le *troisième* prisme extérieur est équivalent au *second* prisme intérieur, et ainsi de suite jusqu'au dernier prisme extérieur. La différence des deux séries de prismes est donc représentée par le *premier* prisme extérieur, dont le volume a pour expression $ABC \times Ay$. Or la somme des prismes extérieurs surpasse la pyramide SABC, tandis que la pyramide S′A′B′C′ surpasse la somme des prismes intérieurs. Il faudrait donc que la différence des deux pyramides SABC et S′A′B′C′ fût plus petite que la différence des deux sommes de prismes, puisque ces sommes comprennent entre elles les deux pyramides. On devrait donc avoir

$$ABC \times Ay > ABC \times Ax \quad \text{ou} \quad Ay > Ax;$$

ce qui est absurde d'après les hypothèses faites. Il est donc absurde aussi de supposer que les deux pyramides SABC, S'A'B'C', qui ont des hauteurs égales et des bases équivalentes, ne sont pas équivalentes.

224. *Toute pyramide triangulaire est égale au tiers du prisme de même base et de même hauteur* (*fig.* 216).

Soit la pyramide triangulaire EABC. Par les sommets A et C, je mène les droites AD et CF égales et parallèles à l'arête BE, et je trace le triangle DEF. Je construis ainsi un prisme (199) ABCDEF, qui a même base ABC que la pyramide proposée et même hauteur, puisque le sommet E de la pyramide appartient à la base supérieure du prisme.

Fig. 216.

Si j'enlève du prisme la pyramide donnée EABC, il reste une pyramide quadrangulaire EACFD. Si je fais passer un plan par les arêtes EC, ED, de cette pyramide, je la décompose en deux pyramides triangulaires EADC, ECDF; ces deux pyramides ont le même sommet E, et leurs bases ADC, CDF, moitiés du parallélogramme ACFD, sont situées dans un même plan : ces deux pyramides sont donc équivalentes (223). Mais la pyramide ECDF peut être considérée comme ayant son sommet en C et pour la base DEF (218) : on voit alors que cette pyramide a même base et même hauteur que le prisme, c'est-à-dire qu'elle est équivalente à la pyramide EABC. Le prisme ABCDEF se trouve donc composé de trois pyramides équivalentes entre elles et à la pyramide EABC : cette pyramide est donc le tiers du prisme.

Mais un prisme a pour mesure de son volume le produit de sa base par sa hauteur (213); *toute pyramide triangulaire aura* donc *pour mesure de son volume le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

225. *Une pyramide quelconque a pour mesure de son volume le tiers du produit de sa base par sa hauteur* (*fig.* 217).

Fig. 217.

Soit la pyramide polygonale SABCDE. Je la partage en pyramides triangulaires, en faisant passer des plans par l'arête SA et les arêtes opposées SC, SD. Ces pyramides triangulaires auront pour hauteur commune la hauteur SO de la pyramide proposée, et leurs bases ABC, ACD, ADE, composeront la base polygonale ABCDE. Nous au-

rons (224)

$$\text{pyr. SABC} = \frac{\text{ABC} \times \text{SO}}{3},$$

$$\text{pyr. SACD} = \frac{\text{ACD} \times \text{SO}}{3},$$

$$\text{pyr. SADE} = \frac{\text{ADE} \times \text{SO}}{3}.$$

Par suite,

$$\text{pyr. SABCDE} = \frac{(\text{ABC} + \text{ACD} + \text{ADE}) \cdot \text{SO}}{3} = \frac{\text{ABCDE} \cdot \text{SO}}{3}.$$

Ainsi, en désignant par B la base de la pyramide et par H sa hauteur, son volume aura pour expression $\frac{\text{BH}}{3}$.

On conclut de là qu'*une pyramide quelconque est le tiers du prisme de même base et de même hauteur.*

L'expression trouvée prouve aussi immédiatement que : *deux pyramides sont proportionnelles aux produits de leurs bases par leurs hauteurs ; deux pyramides qui ont même hauteur sont proportionnelles à leurs bases ; deux pyramides qui ont même base sont proportionnelles à leurs hauteurs.*

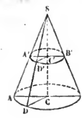
226. *Pour mesurer le volume d'un polyèdre quelconque,* il faut le partager en pyramides ayant pour bases les différentes faces du polyèdre et, pour sommet commun, un point pris dans l'intérieur du polyèdre. En calculant les volumes de ces pyramides et en en faisant la somme, on aura le volume du polyèdre.

S'il existe dans l'intérieur du polyèdre considéré, un point qui soit à égale distance de toutes ses faces, on choisira ce point comme sommet commun des pyramides, de sorte qu'elles auront toutes pour hauteur la distance de ce point à l'une des faces du polyèdre. En faisant la somme des volumes partiels, on pourra mettre en facteur commun cette hauteur commune. Le volume du polyèdre sera alors égal au tiers du produit de la somme de toutes ses faces, c'est-à-dire au tiers du produit de sa surface totale par cette même hauteur.

III. — Surface et volume du cône.

227. Si le triangle rectangle SAC (*fig.* 218) tourne autour de l'un des côtés de l'angle droit SC comme axe, il engendrera *un cône droit à base circulaire.* Le côté CA décrira, dans un plan perpendiculaire à l'axe SC (159), un cercle qui sera la *base* du cône et dont le centre sera sur l'axe. L'hypoténuse SA engendrera une surface courbe qui sera la *surface latérale* ou *convexe* du cône droit. L'axe SC représentera la *hauteur* du cône, et le point S en sera le *sommet.*

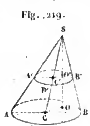
Fig. 218.



Un point quelconque A′ de la droite SA décrit une circonférence de cercle dont le centre est sur l'axe et dont le plan est perpendiculaire à l'axe; car si l'on abaisse du point A′ la perpendiculaire A′C′ sur l'axe SC, cette droite conservera la même longueur pendant le mouvement du triangle qui engendre le cône, et restera toujours perpendiculaire à l'axe. En d'autres termes, *tout plan perpendiculaire à l'axe du cône le coupe suivant un cercle.*

Si l'on suppose une droite SA astreinte à passer toujours par le même point S de l'espace, tandis que son extrémité A décrit la circonférence ADB, on aura un *cône oblique à base circulaire* (*fig.* 219), si la droite SC est oblique au plan de la circonférence ADB, dont le centre est C. Le cercle ADB est la *base* du cône, S en est le *sommet;* la perpendiculaire SO, abaissée du sommet sur la base, en est la *hauteur.*

Fig. 219.



Les sections faites dans un cône oblique par des plans parallèles à la base sont des sections circulaires. En effet, tout plan passant par SC coupera la base et la section suivant des droites parallèles CA, C′A′, la surface du cône suivant SA. Les triangles SCA, SC′A′ étant semblables, le rapport $\frac{CA}{C'A'}$ sera égal au rapport constant $\frac{SC}{SC'}$, et comme CA est constant, C′A′ sera aussi constant. La section sera donc une circonférence dont le centre sera sur SC, *axe* du cône oblique.

A un point de vue plus général, on appelle *surface conique* toute surface engendrée par une droite astreinte à passer constamment par le même point de l'espace en s'appuyant sur une courbe quelconque qui est la *directrice* de la surface, tandis que la droite mobile en est la *génératrice.* Le point par lequel passe constamment la génératrice est le sommet ou le *centre* de la surface conique : il la divise en deux *nappes.* Lorsqu'on coupe une pareille surface par un plan qui rencontre toutes les génératrices d'une même nappe, le volume compris entre le centre de la surface, la surface elle-même et le plan sécant, s'appelle un *cône.* Le plan sécant en détermine la *base,* et la *hauteur* du cône est la perpendiculaire abaissée du centre ou du sommet sur la base. On suppose, dans ce cas, que la directrice est une courbe fermée.

228. *La surface convexe d'un cône droit à base circulaire a pour mesure la moitié du produit de la circonférence de base du cône par son côté.*

On appelle *côté* ou génératrice d'un cône droit à base

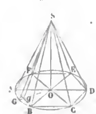


circulaire, l'hypoténuse du triangle rectangle générateur.

La surface totale d'une pyramide ou d'un cône se compose de sa surface latérale augmentée de la surface de sa base.

Inscrivons dans le cône proposé une pyramide régulière, en inscrivant dans sa base OA (*fig.* 220) un polygone régulier et en joignant les sommets de ce polygone au sommet du cône.

Fig. 220.



A mesure qu'on doublera indéfiniment le nombre des côtés du polygone régulier inscrit, son périmètre s'approchera autant qu'on voudra de la circonférence OA, qui sera sa limite (132). La hauteur des pyramides régulières correspondantes restera toujours égale à la hauteur du cône. La surface totale du cône est évidemment plus grande que la surface totale d'une pyramide régulière inscrite, et elle en est la limite puisque la base du cône est la limite des aires des polygones réguliers inscrits successivement obtenus. On peut donc dire aussi que la surface latérale du cône est la limite de la surface latérale des pyramides régulières successivement construites.

La surface latérale d'une pyramide régulière a toujours pour expression la moitié du produit du périmètre de la base de la pyramide par son apothème (222). La limite d'un produit étant égale au produit des limites de ses facteurs (132), on pourra dire que la surface convexe du cône, limite des surfaces latérales des pyramides régulières qui y sont inscrites, est égale à la moitié du produit de la circonférence de base du cône, limite des périmètres des bases des pyramides régulières, par le côté du cône, limite des apothèmes des pyramides.

Le côté du cône est la limite des apothèmes des pyramides, parce que l'apothème Og de la base de la pyramide régulière inscrite a pour limite le rayon OG de la base du cône.

Si l'on désigne par R le rayon de la base du cône et par C son côté, l'expression de la surface latérale du cône circulaire droit sera

$$\frac{1}{2} 2\pi R.C \quad \text{ou} \quad \pi RC.$$

Sa surface totale sera représentée par

$$\pi RC + \pi R^2 \quad \text{ou} \quad \pi R(C + R).$$

229. ***Le volume d'un cône quelconque a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.***

D'après ce qu'on vient de voir, le volume de ce cône sera la limite des volumes des pyramides régulières ou non, qu'on y

inscrira en doublant indéfiniment le nombre de leurs faces. Chacune de ces pyramides aura pour mesure de son volume le tiers du produit de sa base par sa hauteur, qui sera aussi celle du cône (228). Le volume du cône aura donc pour expression le tiers du produit de sa hauteur par la surface de sa base, limite des bases des pyramides inscrites.

S'il s'agit d'un cône circulaire droit ayant R pour rayon de sa base et H pour hauteur, son volume sera égal à $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Tout cône est le tiers du cylindre de même base et de même hauteur. Deux cônes quelconques sont proportionnels aux produits de leurs bases par leurs hauteurs. Deux cônes qui ont même base, sont proportionnels à leurs hauteurs ; deux cônes qui ont même hauteur, sont proportionnels à leurs bases.

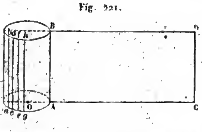
230. Deux cônes circulaires droits sont *semblables*, lorsqu'ils sont engendrés par des triangles rectangles semblables. *Leurs surfaces convexes ou totales sont proportionnelles aux carrés des rayons de leurs bases ou aux carrés de leurs hauteurs ; leurs volumes sont proportionnels aux cubes des mêmes éléments* (même démonstration qu'au n° 217).

IV. — Développement d'un cylindre ou d'un cône circulaire droit.

231. On peut trouver l'expression de la surface latérale d'un cylindre ou d'un cône circulaire droit d'une autre manière qu'il est bon de connaître.

Soit le cylindre AB. Considérons sur sa surface des génératrices *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, etc., assez rapprochées pour qu'on puisse regarder comme planes les portions de surface qu'elles comprennent (*fig.* 221). On pourra faire tourner le plan *abdc* autour de *cd*, de manière à l'amener dans le prolongement du plan *cdfe*. On pourra faire tourner les deux plans réunis autour de *ef*, de manière à les amener ensemble dans le prolongement du plan *efhg* ; et ainsi de suite. On conçoit donc qu'on pourra étendre ou *développer* toute la surface latérale du cylindre sur un même plan sans *déchirure* ni *duplicature*. On obtiendra comme développement un *rectangle*, car les éléments *ac*, *ce*, *eg*, etc., de la circonférence OA se placeront en ligne droite, et les génératrices du cylindre, *perpendiculaires à*

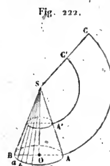
Fig. 221.



ces éléments, seront perpendiculaires à la droite obtenue. De sorte qu'en fendant le cylindre AB suivant la génératrice AB, et en étendant sa surface sur un plan, cette surface deviendra un rectangle ABDC, dont la base AC représentera la circonférence OA *rectifiée*, et dont la hauteur AB sera celle du cylindre.

Soit le cône SA. Considérons sur sa surface des génératrices Sa, Sb, Sc, Sd, etc., assez rapprochées pour qu'on puisse regarder comme planes les portions de surface qu'elles comprennent (*fig.* 222). On pourra faire tourner le plan aSb autour de Sb, de manière à l'amener dans le prolongement du plan bSc. On pourra faire tourner les deux plans réunis autour de Sc, de manière à les amener ensemble dans le prolongement du plan cSd; et ainsi de suite. On conçoit donc qu'on pourra étendre ou *développer* toute la surface latérale du cône sur un même plan, sans déchirure ni duplicature. On obtiendra comme développement un *secteur circulaire*, car tous les points de la circonférence OA resteront, dans le développement, à égale distance du sommet S; c'est-à-dire que cette circonférence se développant suivant un arc de cercle tel que AC, la surface du cône se développera suivant le secteur ASC qui a pour mesure la moitié du produit de l'arc qui lui sert de base par son rayon (145).

Fig. 222.



Toute section déterminée sur la surface conique par un plan parallèle à sa base se développera évidemment de la même manière suivant un arc de cercle ayant pour centre le point S et pour rayon la portion de génératrice interceptée entre le sommet du cône et le plan sécant : cet arc sera d'ailleurs limité aux rayons qui limitent le secteur ASC.

Il est facile de calculer le nombre de degrés de l'arc AC qui représente le développement de la circonférence OA. En désignant ce nombre de degrés par n, on aura $\frac{n}{360} = \frac{AC}{2\pi . SA}$.
Mais on a $AC = 2\pi . OA$. Il viendra donc $n = 360 . \frac{OA}{SA}$. Si OA est égal à la moitié de SA, on a $n = 180°$, et le développement de la surface conique correspond à une demi-circonférence. Quand le diamètre AB de la base du cône est ainsi égal à son côté SA, le triangle SAB devient équilatéral, et le cône est un cône *équilatéral*.

Quand le cône est équilatéral, il est facile d'exprimer sa surface et son volume, en fonction de son côté.

CHAPITRE III.

LES CORPS TRONQUÉS.

232. Si l'on coupe une pyramide par un plan qui rencontre toutes ses faces latérales, le corps compris entre la base de la pyramide et le plan sécant s'appelle *pyramide tronquée* ou *tronc de pyramide.*

Supposons une pyramide *régulière* coupée par un plan *parallèle* à sa base, et cherchons l'expression de la surface du tronc de pyramide obtenu (*fig.* 223).

Fig. 223.



ABCDE et *abcde* seront les deux bases du tronc, sa hauteur sera leur distance.

La section *abcde*, semblable à la base ABCDE (219), sera comme elle un polygone régulier. Les faces latérales de la pyramide régulière SABCDE étant des triangles isocèles égaux, les faces latérales du tronc de pyramide *régulier* seront des trapèzes isocèles égaux (47). La hauteur de tous ces trapèzes sera égale à la partie Hh de l'apothème SH de la pyramide régulière (222), interceptée par les deux bases du tronc.

La face AEea aura pour mesure de sa surface $\frac{AE + ae}{2} \cdot Hh$; si la base du tronc a n côtés, sa surface latérale sera égale à n fois celle du trapèze AEea, c'est-à-dire à $\frac{n.AE + n.ae}{2} \cdot Hh$; mais n.AE et $n.ae$ représentent les périmètres P et p des deux bases du tronc, et l'expression cherchée deviendra $\frac{P + p}{2} \cdot Hh$.

Par conséquent, *la surface latérale d'un tronc de pyramide régulier est égale à la demi-somme des périmètres des deux bases, multipliée par la droite qui joint les milieux de deux côtés homologues des deux bases.* On pourrait appeler cette droite *l'apothème* du tronc de pyramide régulier.

233. Cherchons maintenant le volume d'un tronc de pyramide quelconque, *à bases parallèles*, et considérons d'abord un tronc de pyramide triangulaire.

Un tronc de pyramide à bases parallèles équivaut à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur

du tronc et, pour bases respectives, la base inférieure du tronc, sa base supérieure, la moyenne proportionnelle entre ses deux bases (fig. 224).

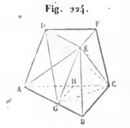


Fig. 224.

Soit le tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles ABCDEF. Je fais passer un plan par les trois sommets A, E, C. Je détache ainsi du tronc la pyramide triangulaire EABC, qui a pour base la base inférieure du tronc et pour hauteur la hauteur du tronc, puisque son sommet E appartient à sa base supérieure.

Il reste la pyramide quadrangulaire EACFD. Je la décompose en deux pyramides triangulaires, en menant le plan DEC. La pyramide EDCF, qui a pour sommet le point E et pour base DCF, peut être regardée comme ayant pour base DEF, c'est-à-dire la base supérieure du tronc, et pour hauteur la hauteur du tronc, puisque son sommet C appartient alors à la base inférieure du tronc.

La seconde pyramide triangulaire EDAC a pour sommet le point E et pour base DAC. Menons la parallèle EG à DA : EG sera dans le plan DAB et coupera AB au point G. La pyramide EDAC sera équivalente à la pyramide GDAC. Ces deux pyramides auront en effet la même base DAC; elles auront aussi la même hauteur, car EG étant parallèle à DA, sera parallèle à la base DAC (167, 223). Mais la pyramide GDAC peut être regardée comme ayant pour sommet le point D et pour base AGC; elle a donc pour hauteur la hauteur du tronc, et il reste à prouver que le triangle AGC est la moyenne proportionnelle des deux bases du tronc.

Menons GH parallèle à BC ou à EF : les deux triangles AGH, DEF, seront égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun : les angles sont égaux par suite du parallélisme de leurs côtés et, dans le parallélogramme ADEG, on a

$$AG = DE.$$

Ceci posé, comparons les triangles ABC et AGC. Ils ont même sommet C, et leurs bases AB, AG, sont en ligne droite : ils ont donc même hauteur et sont proportionnels à leurs bases. On peut donc écrire

$$\frac{ABC}{AGC} = \frac{AB}{AG}.$$

Comparons de même les triangles AGC et AGH. Ils ont même sommet G, et leurs bases AC, AH, sont en ligne droite : ils ont donc même hauteur et sont proportionnels à leurs bases.

On peut donc écrire

$$\frac{AGC}{AGH} = \frac{AC}{AH}.$$

Mais la parallèle GH à BC permet de poser

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AH}.$$

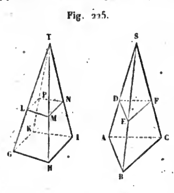
On aura, par suite, en remplaçant AGH par son égal DEF,

$$\frac{ABC}{AGC} = \frac{AGC}{DEF}.$$

Étendons le théorème au cas d'un tronc de pyramide à bases parallèles quelconque (*fig.* 225).

Soit le tronc polygonal GHIKLMNP, obtenu en coupant la pyramide TGHIK par un plan parallèle à sa base. Je construis, dans le plan de la base GHIK, un triangle ABC qui lui soit équivalent (141); et, sur la base ABC, j'élève une pyramide triangulaire SABC ayant même hauteur que la pyramide polygonale. Les deux pyramides SABC, TGHIK, seront équivalentes, puisqu'elles auront la même mesure (225). Si l'on prolonge alors le plan de la section LMNP, ce plan viendra déterminer dans la pyramide SABC une section DEF équivalente à la section LMNP (220); de sorte que les deux pyramides TLMNP et SDEF seront aussi équivalentes. Le tronc polygonal GHIKLMNP, différence des deux pyramides TGHIK et TLMNP, sera donc équivalent au tronc de pyramide triangulaire ABCDEF, différence des deux pyramides SABC et SDEF. Et comme le tronc de pyramide triangulaire est équivalent à la somme de trois pyramides qui ont pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases respectives sa base supérieure, sa base inférieure, la moyenne proportionnelle de ses deux bases, il en sera de même du tronc de pyramide polygonal.

Fig. 225.



Désignons par B la base inférieure d'un tronc de pyramide à bases parallèles quelconque, par b sa base supérieure, par h sa hauteur; son volume V sera égal à la somme

$$\frac{1}{3}Bh + \frac{1}{3}bh + \frac{1}{3}\sqrt{Bb}.h,$$

On aura donc la formule

$$V = \frac{h}{3}\left(B + b + \sqrt{Bb}\right).$$

On peut lui donner une autre forme et éviter l'extraction de la racine carrée.

Les deux bases B et b étant semblables, désignons par A et a deux côtés homologues de ces bases. On aura (148)

$$\frac{B}{b} = \frac{a^2}{A^2}, \quad \text{d'où} \quad b = B.\frac{a^2}{A^2}.$$

Si l'on remplace b par cette valeur, la formule devient

$$V = \frac{h}{3}\left(B + B.\frac{a^2}{A^2} + \sqrt{B.B.\frac{a^2}{A^2}}\right),$$

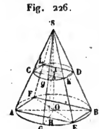
d'où, en simplifiant et en ordonnant,

$$V = \frac{Bh}{3}\left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right).$$

234. Lorsqu'on coupe un cône circulaire droit par un plan parallèle à sa base, le corps compris entre la base du cône et la section obtenue est un *tronc de cône circulaire droit à bases parallèles.*

Les cercles OA et IC (*fig.* 226) sont les *bases* du tronc, OI en est la *hauteur,* AC est son *apothème* ou son *côté.* On voit que le tronc de cône considéré peut être regardé comme engendré par le trapèze rectangle AOIC, tournant autour du côté OI perpendiculaire aux deux bases. OA et IC engendrent les deux bases du tronc, AC engendre sa *surface latérale ou convexe.*

Fig. 226.



Si l'on inscrit une pyramide régulière dans le cône SOA (228), on inscrira en même temps un tronc de pyramide régulier dans le tronc de cône AOIC. Et de même que la surface totale du cône est la limite de la surface totale de la pyramide inscrite, la surface totale du tronc de cône sera la limite de la surface totale du tronc de pyramide inscrit, puisque les deux bases de ce dernier corps ont pour limites respectives et simultanées les deux bases du tronc de cône. Il en résulte que la surface latérale du tronc de cône est la limite de la surface latérale du tronc de pyramide inscrit, à mesure qu'on double indéfiniment le nombre de ses faces; et comme cette surface est égale à la demi-somme des périmètres des bases du tronc de pyramide

multipliée par son apothème (232), *la surface du tronc de cône aura pour expression la demi-somme des circonférences de ses bases, limites des périmètres des bases du tronc de pyramide, multipliée par l'apothème ou le côté du tronc de cône, limite de l'apothème du tronc de pyramide* (125).

Soient R et r les rayons des bases du tronc de cône circulaire droit proposé et L son côté ; sa surface latérale sera égale à

$$\frac{2\pi R + 2\pi r}{2}.L \quad \text{ou à} \quad \pi(R+r).L.$$

Cette surface est susceptible d'autres expressions importantes à connaître.

Soit (*fig.* 227) le trapèze rectangle AOIC qui engendre le tronc de cône ; menons par le point E, milieu de AC, une parallèle aux deux bases du trapèze : cette parallèle EG sera égale à la demi-somme des deux bases OA, IC (140). Par suite, la circonférence de la section menée dans le tronc de cône à égale distance des deux bases est la moyenne arithmétique des circonférences de ces deux bases. On aura donc

$$\text{circ EG} = \pi(R+r),$$

et l'on pourra dire que *la surface latérale du tronc de cône est égale à son côté multiplié par la circonférence de la section menée à égale distance des deux bases.*

Fig. 227.

Ceci posé, considérons toujours le trapèze générateur AOIC (*fig.* 227), et élevons au point E, milieu de AC, la perpendiculaire EM au côté AC ; abaissons du point C la perpendiculaire CK sur AO. Les deux triangles formés EMG et ACK seront semblables, comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun. On aura donc

$$\frac{EG}{EM} = \frac{CK}{AC}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\text{circ EG}}{\text{circ EM}} = \frac{CK}{AC}.$$

On en déduit : circ EG $\times$ AC = circ EM $\times$ CK. Le premier membre de cette égalité représentant la surface du tronc de cône, il en est de même du second membre. On peut donc dire encore que *la surface latérale d'un tronc de cône est égale à sa hauteur, multipliée par la circonférence qui a pour rayon la perpendiculaire élevée sur le milieu du côté, jusqu'à la rencontre de l'axe.*

Toutes ces mesures conviennent aussi à la surface convexe d'un cône circulaire droit, car un cône est un tronc de cône dont la base supérieure se réduit à son centre.

235. *Tout tronc de cône à bases parallèles est équivalent à trois cônes ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases respectives la base inférieure du tronc, sa base supérieure, la moyenne proportionnelle de ses deux bases.*

D'après ce qui précède, le volume du tronc de cône proposé sera la limite des troncs de pyramide, réguliers ou non, qu'on y inscrira en doublant indéfiniment le nombre de leurs faces. En désignant par h la hauteur du tronc de cône, par B' et b' les bases d'un tronc de pyramide inscrit, le volume V' de ce tronc de pyramide aura pour expression (233)

$$V' = \frac{h}{3}(B' + b' + \sqrt{B'b'}).$$

Désignons par V le volume du tronc de cône, par B sa base inférieure, par b sa base supérieure. V' aura pour limite V; h restera constant; B' et b' auront pour limites respectives B et b, de sorte que le produit $B'b'$ aura pour limite le produit Bb. La somme $B' + b' + \sqrt{B'b'}$ aura donc pour limite la somme $B + b + \sqrt{Bb}$ (132), et l'on pourra poser

$$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb}).$$

Désignons par R et par r les rayons des bases du tronc de cône proposé ; on aura

$$B = \pi R^2, \quad b = \pi r^2, \quad \sqrt{Bb} = \sqrt{\pi R^2 . \pi r^2} = \pi R r.$$

Il viendra par suite

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R r).$$

Un tronc de cône à bases parallèles est équivalent à la somme d'un cylindre et d'un cône ayant même hauteur que le tronc, et pour rayons de leurs bases respectives la demi-somme et la demi-différence des rayons des bases du tronc.

On peut, en effet, comme il est facile de le vérifier, remplacer la parenthèse $R^2 + r^2 + R r$ par la somme

$$3\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \left(\frac{R-r}{2}\right)^2.$$

On trouve alors

$$V = \pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 . h + \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^2 . h,$$

ce qui justifie l'énoncé.

Quand la différence des rayons R et r est très-petite, on peut négliger le second terme de l'expression, et regarder le cône tronqué comme équivalent à un cylindre de même hau-

teur, qui a pour base la section faite dans le tronc de cône à égale distance de ses deux bases. C'est la formule ainsi simplifiée : $V = \pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 . h$, qu'on emploie constamment pour le *cubage* des arbres non équarris.

La formule non simplifiée a été employée pour le *jaugeage* des tonneaux. On considère alors le tonneau (*fig.* 228) comme formé de deux troncs de cône identiques opposés par leur grande base. Si r représente le rayon du *fond* du tonneau, R le rayon de la grande base ou de la *bonde*, h la longueur du tonneau, on aura pour la somme des volumes des deux troncs de cône : $V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$. Cette formule donne un résultat trop faible, puisqu'on néglige tout le volume engendré par le segment AMB compris entre la génératrice rectiligne AB et la génératrice curviligne AMB. A plus forte raison, la formule simplifiée $V = \pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 . h$ doit-elle être rejetée.

Fig. 228.

En Angleterre, on emploie la formule suivante proposée par *Oughtred*, et qui consiste à remplacer dans l'expression des deux troncs de cône, R r par R^2 : cette formule est donc

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(2R^2 + r^2\right).$$

En France, on fait usage d'une formule due à *Dez*, qui assimile le tonneau à un cylindre ayant pour hauteur la longueur du tonneau, et pour rayon de sa base l'excès du rayon de la bonde sur les $\frac{3}{8}$ de la différence qui existe entre le rayon de la bonde et celui du fond : cette formule est donc

$$V = \pi\left(R - \frac{3(R-r)}{8}\right)^2 . h.$$

Elle donne un résultat moindre que celui fourni par la formule d'Oughtred.

236. *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire est équivalent à trois pyramides ayant pour base commune la base inférieure du tronc, et pour sommets respectifs, les sommets de sa base supérieure* (*fig.* 229).

Lorsqu'on coupe un prisme par un plan qui rencontre toutes les faces latérales, le corps compris entre la base inférieure du prisme et le plan sécant s'appelle *prisme tronqué*.

ou tronc de prisme. La section qui a déterminé le tronc de prisme, représenté sa base supérieure.

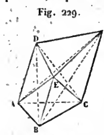


Fig. 229.

Soit le tronc de prisme triangulaire ABCDEF. Je mène un plan par les trois sommets A, C, E, et je détache du tronc la pyramide triangulaire EABC, qui a pour base ABC et pour sommet le point E.

Il reste la pyramide quadrangulaire EACFD. Je la partage en deux pyramides triangulaires, en menant le plan DEC. La pyramide EADC, qui a pour sommet le point E et pour base ADC, est équivalente à la pyramide BADC qui a la même base et la même hauteur, puisque son sommet B est situé sur la parallèle menée à DA ou au plan ADC par le sommet E. Mais la pyramide BADC peut être regardée comme ayant son sommet en D, et sa base est alors ABC.

La pyramide EDCF, qui a pour sommet le point E et pour base CFD, peut être regardée comme ayant son sommet en D et pour base ECF. Elle est équivalente à la pyramide ABCF, qui a pour sommet le point A et pour base BCF. En effet, les deux bases ECF, BCF, sont des triangles équivalents, puisque leurs sommets E et B sont sur un même parallèle à leur base commune CF. Les hauteurs des deux pyramides considérées sont égales, car les deux sommets D et A sont situés sur une parallèle à CF et, par conséquent, au plan commun des deux bases. Les deux pyramides EDCF, ABCF, sont donc bien équivalentes (**223**). Mais la pyramide ABCF peut être regardée comme ayant son sommet en F, et sa base est alors ABC.

Le prisme triangulaire tronqué est donc bien équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour base commune ABC et pour sommets respectifs les points E, D, F.

Si l'on désigne par B la base du tronc de prisme, par h, h', h'', les hauteurs des sommets E, D, F, au-dessus du plan de la base inférieure; le volume V du tronc du prisme sera égal à $\frac{Bh}{3}+\frac{Bh'}{3}+\frac{Bh''}{3}$. On aura donc

$$V = B\left(\frac{h+h'+h''}{3}\right).$$

Si le tronc de prisme est droit, ses hauteurs h, h', h'', se confondent avec ses arêtes latérales a, a', a'', et l'on a

$$V = B\left(\frac{a+a'+a''}{3}\right).$$

Cette formule est applicable à un tronc de prisme oblique,

pourvu qu'on remplace la base B par la section droite S du tronc de prisme. En effet, cette section droite divise le tronc de prisme oblique en deux troncs de prisme droits dont elle est la base commune. Soient v et v_1 les volumes de ces deux troncs; soient a, a', a'', les arêtes du premier, a_1, a'_1, a''_1, les arêtes du second. On aura

$$v = S\left(\frac{a + a' + a''}{3}\right), \quad v_1 = S\left(\frac{a_1 + a'_1 + a''_1}{3}\right).$$

Ajoutons ces deux expressions et désignons par $A = a + a_1$, $A' = a' + a'_1$, $A'' = a'' + a''_1$, les arêtes latérales du tronc de prisme oblique dont le volume est V; nous aurons

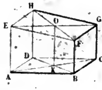
$$V = S\left(\frac{A + A' + A''}{3}\right).$$

Ainsi, d'une manière générale, *le volume d'un tronc de prisme triangulaire est égal au produit de sa section droite par la moyenne arithmétique de ses trois arêtes latérales.*

Les expressions des volumes calculés jusqu'ici reviennent toutes au produit d'une aire par une longueur, c'est-à-dire à un produit de trois facteurs puisque l'évaluation d'une aire en comprend deux. Et ce produit de trois facteurs correspond à la mesure d'un parallélipipède rectangle, équivalent au volume proposé (209).

237. *Tout parallélipipède tronqué a pour mesure le produit de sa section droite par la moyenne arithmétique de deux de ses arêtes latérales opposées ou non consécutives* (*fig.* 230).

Fig. 230.



Je suppose, pour plus de simplicité, que la base ABCD soit la section droite du parallélipipède tronqué proposé. La section EFGH, base supérieure du tronc, sera un parallélogramme (202). Soient K et O les centres des deux bases, la ligne OK sera évidemment parallèle aux arêtes latérales du tronc; en effet, dans le trapèze AEGC, par exemple, elle joint les milieux des côtés non parallèles.

Ceci posé, le plan diagonal AEGC partage le volume considéré en deux troncs de prisme triangulaires ABCEFG, ADCEHG. Le volume du premier (236) sera égal à

$$ABC\left(\frac{AE + BF + CG}{3}\right),$$

le volume du second à

$$ADC\left(\frac{AE + DH + CG}{3}\right).$$

Si l'on ajoute ces deux expressions et si l'on remarque que les deux triangles ABC, ADC, sont égaux, on aura, en appelant V le volume cherché,

$$V = ABC\left(\frac{2AE + 2CG + BF + DH}{3}\right).$$

Mais le trapèze AEGC donne $2(AE + CG) = 4OK$; de même, le trapèze BFHD donne $BF + DH = 2OK$. Par suite,

$$V = ABC \cdot 2OK = 2ABC \cdot OK = ABCD \cdot OK.$$

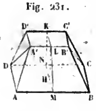
OK étant égale à $\frac{AE + CG}{2}$ ou à $\frac{BF + DH}{2}$, l'énoncé est bien justifié.

238. Les amas de pierres établis de distance en distance le long des routes, les fossés ou cuvettes destinées à rendre plus rapide l'écoulement des eaux de manière à maintenir la chaussée en bon état, les tombereaux, etc., ont la forme de prismes quadrangulaires tronqués aux deux extrémités. Deux des faces latérales sont des rectangles inégaux, les deux autres faces sont des trapèzes isocèles égaux. Les deux troncatures ou les deux bases sont alors deux trapèzes isocèles égaux. Lorsqu'il s'agit d'un amas de pierres, le tronc repose sur le sol par sa plus grande face rectangulaire.

On obtiendrait le volume dont nous nous occupons en coupant un prisme quadrangulaire droit ayant pour bases des trapèzes isocèles, par deux plans menés chacun par la grande base de ces trapèzes et également inclinés, l'un au-dessous de la base supérieure, l'autre au-dessus de la base inférieure du prisme.

Soit à calculer le volume de l'amas ABCDA'B'C'D' (*fig.* 231). Nous décomposerons ce volume en deux prismes triangulaires tronqués, en menant le plan diagonal CDA'B'. Si MNKL est la section droite du tronc de prisme quadrangulaire, MNL sera la section droite du tronc de prisme triangulaire ADA'BCB', et NLK sera la section droite du tronc de prisme triangulaire DA'D'CB'C'. Je désigne par a et b les dimensions du rectangle ABCD, par a' et b' celles du rectangle A'B'C'D'. Je représente par h la distance de ces deux faces du tronc, c'est-à-dire la hauteur LH du triangle MNL ou du triangle NLK; en effet, la section droite MNLK est perpendiculaire aux plans des deux faces latérales considérées (183). Je remarque enfin que MN est égale à b et que KL est égale à b'.

Fig. 231.



Ceci posé, le volume du tronc de prisme triangulaire ADA'BCB', est égal à (236)

$$\frac{bh}{2}\left(\frac{2a+a'}{3}\right).$$

De même, le volume du tronc de prisme triangulaire DA'D'CB'C' est égal à

$$\frac{b'h}{2}\left(\frac{2a'+a}{3}\right).$$

En désignant le volume cherché par V, on aura donc

$$V=\frac{bh}{6}(2a+a')+\frac{b'h}{6}(2a'+a).$$

Si b' devenait nulle, on aurait

$$V=\frac{bh}{6}(2a+a').$$

Cette formule représente le volume d'un prisme triangulaire tronqué à ses deux extrémités, ayant pour faces latérales un rectangle et deux trapèzes isocèles égaux, et pour bases ou troncatures deux triangles isocèles égaux. Certains toits, les piles de boulets dans les parcs d'artillerie, etc., ont cette forme.

Si les rectangles ABCD, A'B'C'D', étaient semblables, les arêtes AA', BB', CC', DD', prolongées, iraient aboutir au même point, et l'on pourrait regarder le volume ABCDA'B'C'D' comme un tronc de pyramide à bases parallèles. On aurait, dans ce cas (233)

$$V=\frac{h}{3}\left(ab+a'b'+\sqrt{aba'b'}\right).$$

Il est facile de prouver l'identité de cette formule et de la précédente, en tenant compte de la condition $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$.

En effet, la formule

$$V=\frac{bh}{6}(2a+a')+\frac{b'h}{6}(2a'+a)$$

peut s'écrire

$$V=\frac{h}{3}\left(ab+\frac{a'b}{2}+a'b'+\frac{ab'}{2}\right).$$

Mais la condition $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ donne $a'b=ab'$. Il viendra donc

$$V=\frac{h}{3}(ab+a'b'+ab').$$

Il reste à prouver que $ab'=\sqrt{aba'b'}$, ce qui est évident, puisqu'on peut remplacer sous le radical $a'b$ par ab'.

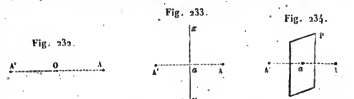
CHAPITRE IV.

DES POLYÈDRES SYMÉTRIQUES.

239. Deux points A et A' (*fig.* 232) sont *symétriques* par rapport à un *point* ou *centre de symétrie* O, lorsque le point O est le milieu de la droite AA'.

Deux points A et A' (*fig.* 233) sont *symétriques* par rapport à une *droite* ou *axe de symétrie* xy, lorsque la droite xy est perpendiculaire sur le milieu de la droite AA'.

Deux points A et A' (*fig.* 234) sont *symétriques* par rapport



à un *plan* P, lorsque le plan P, appelé *plan de symétrie*, est perpendiculaire sur le milieu de la droite AA'.

Deux figures sont dites *symétriques* par rapport à un *centre*, à un *axe* ou à un *plan*, lorsque tous leurs points sont deux à deux symétriques par rapport à ce centre, à cet axe ou à ce plan. Les points symétriques des deux figures sont des points *homologues*. Il est évident que deux droites ou deux plans symétriques par rapport à un centre sont *parallèles*.

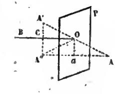
On peut toujours faire coïncider deux figures symétriques par rapport à un axe. En effet, si l'on se reporte à la *fig.* 233, et si l'on fait tourner A'a autour de xy, de manière que A'a reste toujours perpendiculaire à l'axe, le point A' viendra coïncider avec le point A après avoir décrit un angle de 180°. Si deux figures sont symétriques par rapport à un axe, il suffira donc, pour passer de la seconde à la première, de faire tourner la seconde de 180° autour de l'axe, mouvement qui n'altérera en

rien la disposition relative des différentes parties de la figure.

On peut ramener la symétrie par rapport à un centre à la symétrie par rapport à un plan.

Soient, en effet (*fig.* 235), deux points A et A′ symétriques par rapport à un centre O. Je mène par le point O un plan P et une perpendiculaire OB à ce plan. Je construis le point A″ symétrique du point A′ par rapport à l'axe OB, et je dis que les points A et A″ sont symétriques par rapport au plan P.

Fig. 235.



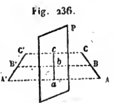
A′A″ rencontre OB au point C, A″A rencontre le plan P au point *a*. Le point C étant le milieu de A′A″ et le point O étant le milieu de A′A, A″A sera parallèle à OB, c'est-à-dire perpendiculaire au plan P (165). De plus, O*a* étant perpendiculaire à OB est parallèle à A′A″, et le point O étant le milieu de A′A, le point *a* est le milieu de A″A. Les points A et A″ sont donc bien symétriques par rapport au plan P.

Ainsi, deux figures P et P′ étant symétriques par rapport à un centre, on peut former d'une infinité de manières (puisque le plan mené par le point O est quelconque) une figure P″ qui soit à la fois symétrique de P′ par rapport à un axe et symétrique de P par rapport à un plan. Les figures P′ et P″ étant alors égales d'après ce qui précède, au lieu de comparer entre elles les figures P et P′, on pourra comparer entre elles les figures P et P″.

On peut donc se borner à étudier les propriétés des figures symétriques par rapport à un plan.

240. *Lorsque trois points* A, B, C, *sont en ligne droite, leurs symétriques* A′, B′, C′, *par rapport à un plan* P *sont aussi en ligne droite* (*fig.* 236).

Fig. 236.



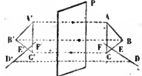
Les perpendiculaires AA′, BB′, CC′, au plan P, étant parallèles, sont dans un même plan, et les trois points *a*, *b*, *c*, sont en ligne droite. Si l'on fait tourner le trapèze A′C′*ca* autour de *ac* (qui est un axe de symétrie pour les points considérés), lorsque l'angle décrit sera devenu égal à 180°, les points A′, B′, C′, coïncideront avec les points A, B, C; et comme ces trois points sont supposés en ligne droite, les points A′, B′, C′, avant ou après le mouvement, sont aussi en ligne droite.

Deux points suffisant pour déterminer une droite, pour que deux droites soient symétriques, il suffit que deux points de l'une aient leurs symétriques sur l'autre.

La démonstration précédente prouve en même temps que *la distance de deux points est égale à la distance de leurs symétriques.*

241. *Lorsque quatre points* A, B, C, D, *sont dans un même plan, leurs symétriques* A′, B′, C′, D′, *par rapport à un plan* P *sont aussi dans un même plan* (*fig.* 237).

Fig. 237.



Je mène la droite DEF qui rencontre les droites BC et AC aux points E et F. Les trois points D, E, F, étant en ligne droite, leurs symétriques D′, E′, F′, seront en ligne droite (240). Mais le point E étant sur BC, le point E′ sera sur B′C′, et le point F étant sur AC, le point F′ sera sur A′C′. La droite D′E′F′ ayant deux de ses points dans le plan A′B′C′ sera tout entière dans ce plan, c'est-à-dire que les quatre points A′, B′, C′, D′, seront dans un même plan.

Trois points non en ligne droite suffisant pour déterminer un plan, pour que deux plans soient symétriques, il suffit que trois points de l'un, non situés en ligne droite, aient leurs symétriques sur l'autre.

Pour que deux polygones ou deux polyèdres soient symétriques, il suffit que tous leurs sommets soient deux à deux symétriques.

Deux triangles symétriques sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux, puisque la distance de deux points est égale à celle de leurs symétriques (240).

Il en résulte que *l'angle formé par deux droites est égal à l'angle formé par leurs symétriques*, puisqu'on peut toujours prendre des longueurs égales sur les côtés des deux angles, de manière à construire deux triangles symétriques.

Un point situé dans le plan de symétrie est à lui-même son propre symétrique, de même pour une droite située dans le plan de symétrie. Donc, *deux droites ou deux plans symétriques rencontrent le plan de symétrie au même point ou suivant la même droite.* De plus, *les deux droites ou les deux plans sont également inclinés sur le plan de symétrie.* En effet, le plan des deux droites est perpendiculaire au plan de symétrie, et l'intersection des deux plans, projection commune de ces droites, étant symétrique à elle-même, forme des angles égaux avec les deux droites symétriques. De même, tout plan perpendiculaire à l'intersection commune des deux plans symétriques avec le plan de symétrie, coupe ces deux plans suivant deux droites symétriques et le plan de symétrie

suivant la projection de ces droites. Les angles rectilignes des angles dièdres formés de part et d'autre du plan de symétrie sont donc égaux.

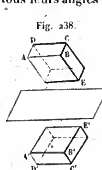
242. *Lorsque deux polyèdres sont symétriques, leurs faces homologues sont égales et également inclinées, leurs angles polyèdres homologues sont symétriques.*

Les deux polyèdres ayant leurs sommets symétriques, ont leurs faces homologues composées d'un même nombre de triangles symétriques, c'est-à-dire égaux (241) : leurs faces homologues sont donc égales.

Si l'on considère trois arêtes symétriques dans les deux polyèdres, elles formeront des angles trièdres dont les angles plans seront égaux deux à deux comme formés par des droites symétriques (241). Ces angles trièdres auront donc leurs angles dièdres homologues égaux (191, 3°); et il en résulte que les faces homologues des deux polyèdres auront des inclinaisons égales dans les deux polyèdres.

Les angles polyèdres des deux polyèdres auront donc à la fois tous leurs angles dièdres égaux chacun à chacun et toutes leurs faces ou tous leurs angles plans égaux chacun à chacun. Mais si, considérant (*fig.* 238) les angles polyèdres B et B', on fait coïncider la face ABE avec son égale A'B'E', on reconnaîtra qu'il est impossible de faire coïncider les autres parties égales des deux angles polyèdres, parce que leur disposition n'est pas la même : ces angles polyèdres sont donc symétriques.

Fig. 238.



Deux polyèdres symétriques ont donc toutes leurs parties égales, sans pouvoir coïncider.

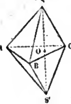
Deux polyèdres P et P' sont égaux, lorsqu'ils ont pour symétrique, par rapport à deux plans de symétrie différents, un même polyèdre P''. En effet, les deux polyèdres P et P'' ont toutes leurs parties égales et leurs angles polyèdres symétriques ; il en est de même des polyèdres P' et P''. Les deux polyèdres P et P' ont donc toutes leurs parties égales et leurs angles polyèdres *égaux* : ils sont donc égaux. On conclut de là qu'*un polyèdre n'a qu'un seul symétrique.*

Si l'on décompose un polyèdre P en pyramides triangulaires ayant pour sommet commun un des sommets du polyèdre, à chacune de ces pyramides correspondra, dans le polyèdre symétrique P'', une pyramide triangulaire symétrique. On voit donc que *deux polyèdres symétriques sont décomposables en un même nombre de tétraèdres symétriques.*

Il faut distinguer la *symétrie de position* et la *symétrie de forme ;* la dernière existe toujours, lorsque les deux polyèdres considérés sont symétriques; la première n'existe que lorsqu'ils sont placés, par rapport au plan de symétrie, comme nous l'avons supposé jusqu'ici.

243. *Deux polyèdres symétriques sont équivalents.* Deux polyèdres symétriques pouvant toujours se décomposer en un même nombre de tétraèdres symétriques (242), il suffira d'établir que deux tétraèdres symétriques sont équivalents.

Fig. 239.



Soit le tétraèdre SABC (*fig.* 239). Je construis son symétrique en prenant pour plan de symétrie la base ABC. Le point S' étant le symétrique du point S, les deux tétraèdres seront équivalents comme ayant même base et des hauteurs égales SO = S'O (223).

CHAPITRE V.

DES POLYÈDRES SEMBLABLES.

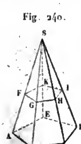
244. Deux polyèdres sont *semblables*, lorsque leurs faces semblables chacune à chacune forment des angles polyèdres égaux.

Les parties qui se correspondent dans deux polyèdres semblables sont appelées *homologues.* Les sommets de deux angles polyèdres égaux sont des points homologues, les arêtes ou les diagonales qui joignent des sommets homologues, sont des arêtes ou des diagonales homologues, les faces semblables sont des faces homologues.

Les arêtes homologues de deux polyèdres semblables sont évidemment *proportionnelles.* Car les faces semblables des deux polyèdres ont le même rapport de similitude (92), puisqu'une même arête appartient toujours, sur chacun des polyèdres, à deux faces adjacentes. Par suite, le rapport de deux arêtes homologues quelconques est constant.

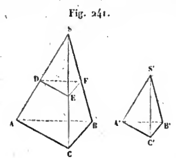
245. *En coupant une pyramide par un plan parallèle à sa base, on détermine une pyramide partielle semblable à la pyramide proposée.*

Soit (*fig.* 240) la pyramide SABCDE dans laquelle un plan parallèle à la base a déterminé une section FGHIK. Je dis que la pyramide SFGHIK est semblable à la pyramide donnée. Les deux bases sont semblables (219), les faces latérales sont semblables à cause des parallèles AB et FG, BC et GH, etc.


Fig. 240.

L'angle polyèdre S est commun. Démontrons l'égalité de deux angles trièdres homologues quelconques A et F. La face BAE est égale à la face GFK, par suite de la similitude des bases des deux pyramides; les faces SAB, SFG, SAE, SFK, sont égales deux à deux par suite de la similitude des faces latérales des deux pyramides. Les deux angles trièdres A et F ayant leurs faces égales chacune à chacune et semblablement disposées, seront égaux (191, 3°). Par suite, les deux pyramides considérées auront leurs faces semblables chacune à chacune, leurs angles polyèdres homologues égaux : elles seront donc semblables.

246. ***Deux pyramides triangulaires sont semblables, lorsqu'elles ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées*** (*fig.* 241).


Fig. 241.

Soient les pyramides SABC, S'A'B'C', dans lesquelles les faces SAC, ABC, sont semblables aux faces S'A'C', A'B'C', et le dièdre AC égal au dièdre A'C'.

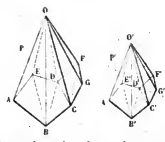
Je prends SD = S'A', et par le point D je mène la section DEF, parallèle à la base ABC. La pyramide SDEF sera semblable à la pyramide SABC (245). La face SDE, semblable à la face SAC, sera donc aussi semblable à la face S'A'C'; mais le côté SD ayant été pris égal au côté S'A', cette similitude se changera en égalité. On aura par suite DE = A'C', et les deux faces DEF, A'B'C', toutes deux semblables à la face ABC, seront égales entre elles. Le dièdre DE, égal au dièdre AC, sera égal au dièdre A'C'. Les deux pyramides SDEF, S'A'B'C', ayant un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées, seront égales (221); mais la pyramide SDEF est semblable à la pyramide SABC : il en sera donc de même de la pyramide S'A'B'C'.

Il est utile de remarquer que lorsque deux pyramides sont semblables, on peut toujours les placer l'une dans l'autre comme les pyramides SDEF et SABC : les plans des bases des deux pyramides sont alors parallèles.

247. *Deux polyèdres semblables sont décomposables en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés* (*fig.* 242).

Soient les deux polyèdres semblables P et P'. Je divise les faces homologues de ces deux polyèdres en triangles semblables : je décompose ainsi leurs surfaces en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés.

Fig. 242.



Je prends un point O dans l'intérieur du polyèdre P, et je le joins à tous ses sommets : je partage ainsi le polyèdre en pyramides ayant pour sommet commun le point O, et pour bases les triangles qui composent sa surface.

Je détermine dans le polyèdre P' le point O' homologue du point O, en menant par A'B' un plan qui forme avec la face A'B'C'D'E' un angle dièdre égal à celui formé par le plan OAB avec la face ABCDE ; puis, dans ce plan, je construis le triangle O'A'B' semblable au triangle OAB.

En joignant le point O' aux différents sommets du polyèdre P', je le décomposerai en autant de pyramides triangulaires que le polyèdre P, et ces pyramides seront semblablement placées dans les deux polyèdres : il faut prouver qu'elles sont semblables.

Considérons d'abord les tétraèdres OABE, O'A'B'E', OEBD, O'E'B'D', OBDC, O'B'D'C', dont les bases appartiennent respectivement à deux faces homologues ABCDE, A'B'C'D'E', des deux polyèdres. Les tétraèdres OABE, O'A'B'E', sont semblables, d'après la construction même qu'on a effectuée, parce qu'ils ont le dièdre AB égal au dièdre A'B', compris entre deux faces semblables et semblablement disposées (246). Le triangle OEB sera, par suite, semblable au triangle O'E'B', et l'angle dièdre OEBD supplément du dièdre OEBA, sera égal au dièdre O'E'B'D' supplément du dièdre O'E'B'A', parce que l'égalité des premiers tétraèdres entraîne celle des dièdres OEBA, O'E'B'A'. Les deux tétraèdres suivants OEBD, O'E'B'D', seront donc encore semblables comme ayant un dièdre égal compris entre deux faces semblables et semblablement dispo-

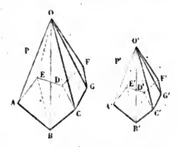
sées. On prouverait de même la similitude des tétraèdres OBDC, O′B′D′C′. Et le même mode de démonstration subsistera, tant que les bases des tétraèdres successifs feront partie d'une même face dans les deux polyèdres.

Considérons maintenant les deux tétraèdres ODCF, O′D′C′F′, dont les bases appartiennent à deux nouvelles faces homologues des deux polyèdres, CDFG, C′D′F′G′. Les deux triangles ODC, O′D′C′, sont semblables comme faces homologues de tétraèdres semblables; les deux triangles DCF, D′C′F′ sont semblables, comme triangles homologues de polygones semblables. Les deux polyèdres étant semblables ont leurs angles polyèdres homologues et, par suite, leurs angles dièdres homologues égaux. Le dièdre BCDF est donc égal au dièdre B′C′D′F′. Les dièdres ODCB, O′D′C′B′, sont d'ailleurs égaux comme dièdres homologues de tétraèdres semblables. Par conséquent, l'angle dièdre ODCF, différence des angles dièdres BCDF et ODCB, sera égal à l'angle dièdre O′D′C′F′, différence des angles dièdres B′C′D′F′ et O′D′C′B′. Les tétraèdres ODCF, O′D′C′F′, seront donc encore semblables comme ayant un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables et semblablement disposées. Dès lors on peut conclure que les deux polyèdres P et P′ sont composés d'un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement placés.

Si le point O coïncidait avec le sommet A du polyèdre P, le point O′ coïnciderait avec le sommet A′ du polyèdre P′; les arêtes latérales homologues des tétraèdres homologues des deux polyèdres, deviendraient alors les diagonales homologues de ces polyèdres. Les arêtes latérales homologues de deux tétraèdres semblables étant proportionnelles aux côtés de leurs bases, *les diagonales homologues de deux polyèdres semblables sont proportionnelles à leurs arêtes homologues.*

248. Réciproquement, *deux polyèdres composés d'un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés sont semblables* (*fig.* 243).

Fig. 243.



Je dis d'abord que si deux tétraèdres OABE, OEBD, ont dans le polyèdre P leurs bases ABE, EBD, dans un même plan, les tétraèdres homologues O′A′B′E′, O′E′B′D′, auront aussi dans le polyèdre P′ leurs bases A′B′E′, E′B′D′ dans un même plan. Car les dièdres OEBA, OEBD, étant supplémentaires, les dièdres égaux O′E′B′A′, O′E′B′D′, se-

ront aussi supplémentaires; et comme ils sont dans la position d'adjacents, leurs faces extérieures A'B'E', E'B'D' seront dans un même plan (181). Il résulte immédiatement de cette condition, que les faces correspondantes des deux polyèdres sont composées d'un même nombre de triangles semblables et semblablement placés, c'est-à-dire qu'elles sont semblables (100).

De plus, l'angle dièdre BCDF sera égal à l'angle dièdre B'C'D'F'; car le premier est la somme des angles dièdres ODCB, ODCF, égaux aux angles dièdres O'D'C'B', O'D'C'F', qui composent le second, comme angles dièdres homologues de tétraèdres semblables. Les faces homologues des deux polyèdres seront donc également inclinées.

Les deux polyèdres considérés ayant leurs faces homologues semblables et également inclinées, auront leurs angles polyèdres homologues égaux comme ayant toutes leurs parties égales, dièdres et angles plans (191); ces deux polyèdres seront donc semblables (244).

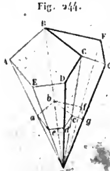
249. *Si l'on joint un point* O *quelconque aux sommets d'un polyèdre* P, *et si l'on prend sur les rayons vecteurs* OA, OB, OC, *etc., des longueurs* Oa, Ob, Oc, *etc., telles qu'on ait*

$$\frac{Oa}{OA}=\frac{Ob}{OB}=\frac{Oc}{OC}=\frac{Od}{OD}=\ldots,$$

le polyèdre p, qui aura pour sommets les points a, b, c, etc., sera semblable au polyèdre P (*fig.* 244).

Je considère la face ABCDE du polyèdre donné et le point a. Si je menais par le point a un plan parallèle au plan ABCDE, ce plan couperait en parties proportionnelles les arêtes latérales de la pyramide OABCDE (219), et passerait par conséquent par les sommets a, b, c, d, e. Ces sommets forment donc, dans le polyèdre p, une face $abcde$ semblable à la face ABCDE. Les faces correspondantes des deux polyèdres P et p sont donc semblables.

Fig. 244.



Je remarque ensuite que les arêtes homologues des deux polyèdres étant, d'après ce qu'on vient de dire, parallèles et dirigées dans le même sens, les angles polyèdres homologues des deux polyèdres auront leurs faces égales et leurs angles dièdres égaux chacun à chacun (181); la disposition des parties égales étant d'ailleurs la même dans les deux polyèdres, ces angles polyèdres seront donc égaux. Les polyèdres P et p seront, par suite, semblables.

Le point O sera un centre de similitude directe.

Si le point O était un centre de similitude inverse, c'est-à-dire si les longueurs Oa, Ob, Oc, etc., avaient été portées sur les prolongements des rayons vecteurs OA, OB, OC, etc., on aurait obtenu un polyèdre p' dont les faces auraient été semblables aux faces correspondantes du polyèdre P, mais dont les angles polyèdres auraient été symétriques des angles polyèdres du polyèdre P.

250. *Les volumes de deux pyramides semblables sont proportionnels aux cubes de leurs hauteurs ou de leurs arêtes homologues (fig. 245).*

Fig. 245.



On peut toujours placer les deux pyramides proposées comme l'indique la figure, les plans des deux bases sont alors parallèles (246).

Le volume de la pyramide SABCD sera égal à $\frac{\text{ABCD} \times \text{SO}}{3}$, le volume de la pyramide S$abcd$ sera égal à $\frac{abcd \times \text{S}o}{3}$ (225). On aura donc

$$\frac{\text{SABCD}}{\text{S}abcd} = \frac{\text{ABCD} \times \text{SO}}{abcd \times \text{S}o} = \frac{\text{ABCD}}{abcd} \times \frac{\text{SO}}{\text{S}o}.$$

Le plan $abcd$ étant parallèle au plan ABCD, on a (219)

$$\frac{\text{ABCD}}{abcd} = \frac{\text{SO}^2}{\text{S}o^2}.$$

Par suite,

$$\frac{\text{SABCD}}{\text{S}abcd} = \frac{\text{SO}^3}{\text{S}o^3} = \frac{\text{SA}^3}{\text{S}a^3}.$$

251. *Les volumes de deux polyèdres semblables sont proportionnels aux cubes de leurs arêtes homologues, et, en général, aux cubes de deux lignes homologues quelconques des deux polyèdres.*

Je décompose les deux polyèdres considérés P et p en un même nombre de tétraèdres semblables (247). Soient T, T', T'', etc., les tétraèdres qui forment le polyèdre P; soient t, t', t'', etc., les tétraèdres homologues du polyèdre p. Désignons par A et a deux arêtes homologues quelconques des deux polyèdres, et rappelons-nous que les arêtes homologues de deux polyèdres semblables sont proportionnelles (244). On

pourra poser (250)

$$\frac{T}{t}=\frac{A^3}{a^3},\ \frac{T'}{t'}=\frac{A^3}{a^3},\ \frac{T''}{t''}=\frac{A^3}{a^3},\ldots$$

Un théorème connu d'arithmétique permet alors de déduire de la suite de rapports égaux

$$\frac{T}{t}=\frac{T'}{t'}=\frac{T''}{t''}=\cdots=\frac{A^3}{a^3},$$

l'égalité

$$\frac{T+T'+T''+\ldots}{t+t'+t''+\ldots}=\frac{A^3}{a^3},$$

c'est-à-dire

$$\frac{P}{p}=\frac{A^3}{a^3}.$$

On prouverait, en suivant une marche analogue, que *les surfaces de deux polyèdres semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs arêtes homologues.*

De l'égalité

$$\frac{P}{p}=\frac{A^3}{a^3}$$

on déduit

$$\frac{A}{a}=\sqrt[3]{\frac{P}{p}}.$$

Par conséquent, lorsqu'on veut *amplifier* ou *réduire* un polyèdre dans un rapport donné, l'*échelle* à employer pour les arêtes homologues est égale à la racine cubique du rapport des volumes des deux polyèdres, c'est-à-dire à la racine cubique du rapport donné.

Applications.

252. *Calculer le volume d'un tétraèdre régulier en fonction de son arête.*

Je désigne par c l'arête du tétraèdre régulier proposé. Sa base sera un triangle équilatéral dont le côté sera c (198) et la surface, par conséquent, égale à $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ (139).

Le tétraèdre étant régulier, sa hauteur passe par le centre de sa base : cette hauteur forme donc, avec le rayon du cercle circonscrit à la base, un triangle rectangle ayant pour hypoténuse l'une des arêtes latérales du tétraèdre. Mais le côté du triangle de base étant c, le rayon du cercle qui lui est circonscrit est $\frac{c}{\sqrt{3}}$ (128). La hauteur du tétraèdre aura donc pour

expression $\sqrt{c^2 - \frac{c^2}{3}}$ ou $\frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Son volume, égal à sa base multipliée par le tiers de sa hauteur, sera donc représenté par

$$\frac{c^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{c\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{c^3\sqrt{2}}{12}.$$

Si l'on désigne le volume d'un tétraèdre régulier par V, on aura réciproquement

$$c = \sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{2}}}.$$

253. *Proposons-nous de retrouver les expressions de la surface et du volume du tronc de cône, en le considérant comme la différence de deux cônes.*

Fig. 246.

Je désignerai par R et r les rayons des deux bases du tronc, par h sa hauteur, par L son côté.

Soit S la surface cherchée : elle sera la différence des surfaces des deux cônes SAO, SBI. On aura donc

$$S = \pi R.SA - \pi r.SB = \pi(R.SA - r.SB).$$

Les triangles rectangles qui engendrent les deux cônes étant semblables, on a

$$\frac{SA}{SB} = \frac{R}{r},$$

d'où

$$\frac{SA}{SA - SB} = \frac{R}{R - r}, \quad \frac{SB}{SA - SB} = \frac{r}{R - r}.$$

Mais SA — SB représente le côté L du tronc de cône. Il viendra donc

$$SA = \frac{RL}{R - r} \quad \text{et} \quad SB = \frac{rL}{R - r}.$$

Par suite,

$$S = \frac{\pi(R^2 - r^2)L}{R - r},$$

c'est-à-dire

$$S = \pi(R + r)L \quad (234).$$

Soit V le volume cherché : il sera la différence des volumes des deux cônes SAO, SBI. On aura donc

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2.SO - \frac{1}{3}\pi r^2.SI = \frac{\pi}{3}(R^2.SO - r^2.SI).$$

La similitude des triangles SAO, SBI, donne

$$\frac{SO}{SI} = \frac{R}{r}, \quad \text{d'où} \quad \frac{SO}{SO - SI} = \frac{R}{R - r}, \quad \frac{SI}{SO - SI} = \frac{r}{R - r}.$$

Mais SO — SI représente la hauteur h du tronc de cône. Il viendra donc

$$SO = \frac{Rh}{R - r} \quad \text{et} \quad SI = \frac{rh}{R - r}.$$

Par suite,

$$V = \frac{\pi h (R^3 - r^3)}{3 (R - r)}.$$

L'expression du quotient $\frac{R^3 - r^3}{R - r}$ est (*Alg. élém.*, 38) $R^2 + Rr + r^2$.

On pourra donc écrire $V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$, comme au n° 235.

254. *Couper une pyramide en deux parties proportionnelles à deux lignes données m et n, par un plan parallèle à sa base.*

Soient V le volume de la pyramide donnée et v le volume de la pyramide semblable déterminée par le plan sécant (245). On devra avoir, d'après l'énoncé,

$$\frac{v}{V} = \frac{m}{m + n}.$$

Désignons par A l'une des arêtes latérales de la pyramide proposée et par x l'arête homologue de la petite pyramide; x étant connue, le problème sera résolu, puisqu'on saura par quel point mener le plan parallèle demandé. D'après une remarque précédente (251), on devra avoir

$$\frac{x}{A} = \sqrt[3]{\frac{v}{V}}, \text{ c'est-à-dire } x = A \sqrt[3]{\frac{m}{m + n}}.$$

CHAPITRE VI.

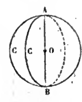
LA SPHÈRE.

255. On appelle *sphère* le volume engendré par un demi-cercle ACB tournant autour de son diamètre AB. Pendant que le demi-cercle engendre la sphère, la demi-circonférence correspondante engendre la *surface sphérique*.

Dans ce mouvement, les points de la demi-circonférence

restent toujours à la même distance de son centre O. On peut donc dire que la surface sphérique est le lieu de tous les points de l'espace à égale distance d'un point intérieur nommé *centre de la sphère*. Cette distance constante, qui est le rayon du cercle ACB, est le *rayon de la sphère* (*fig.* 247).

Fig. 247.



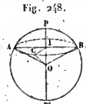
Les droites qui passent par le centre de la sphère et sont limitées à sa surface, sont des *diamètres de la sphère*. Tous les diamètres sont égaux, puisqu'ils valent deux rayons.

I. — Théorèmes généraux sur la sphère.

256. *Toute section faite par un plan dans une sphère, est un cercle* (*fig.* 248).

Le théorème est évident lorsque le plan donné passe par le centre de la sphère ; en effet, tous les points de la surface sphérique qui sont situés dans le plan sécant, sont à égale distance du centre de la sphère qui est dans ce même plan.

Fig. 248.



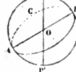
Si le plan sécant ne passe pas par le centre de la sphère, soient trois points A, B, C, de la courbe d'intersection de ce plan avec la surface sphérique. J'abaisse du centre O de la sphère la perpendiculaire OI sur le plan sécant, et je joins le pied I de cette perpendiculaire aux trois points A, B, C. Les rayons OA, OB, OC, de la sphère, étant des obliques égales, s'écarteront également du pied de la perpendiculaire et l'on aura $IA = IB = IC$. La courbe ABC est donc une circonférence de cercle dont le centre est en I. Le rayon IC de cette circonférence est évidemment plus petit que le rayon OC de la sphère.

Les plans qui passent par le centre de la sphère déterminent des cercles qui ont même centre, et par conséquent même rayon que la sphère : on les appelle *grands cercles* de la sphère.

Les plans qui ne passent pas par le centre de la sphère, déterminent *des petits cercles* de la sphère.

On appelle *pôles* d'un cercle de la sphère les extrémités du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan de ce cercle. Les points P et P' sont les pôles du cercle ABC. Deux cercles dont les plans sont parallèles, ont les mêmes pôles.

Fig. 249.



Tout diamètre de la sphère peut être pris pour axe de révolution de la surface sphérique (*fig.* 249).

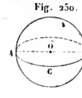
Soit la sphère engendrée par le demi-cercle PAP' tournant autour de son diamètre PP'.

Prenons un diamètre quelconque AB de la sphère. Un plan passant par ce diamètre coupera la surface sphérique suivant une circonférence ACB qui aura même centre et même rayon que la sphère proposée et qui dès lors, en tournant autour du diamètre AB, engendrera la surface sphérique qui termine cette sphère.

Par deux points donnés sur la surface sphérique, on peut toujours faire passer une circonférence de grand cercle. Car on n'a qu'à mener un plan par les deux points donnés et le centre de la sphère. Il n'y aura qu'une solution si les deux points ne sont pas situés aux extrémités d'un même diamètre; il y en aura une infinité dans le cas contraire, parce que les deux points considérés seront en ligne droite avec le centre de la sphère.

Tout grand cercle divise la sphère et sa surface en deux parties égales. En effet, si l'on retourne la partie supérieure pour la faire coïncider avec la partie inférieure (*fig.* 250), le cercle ABC coïncidera avec lui-même, et la coïncidence des deux volumes ou des deux surfaces sera parfaite, puisque tous les points de ces deux surfaces sont également éloignés du centre O de la sphère

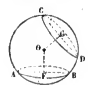
Fig. 250.



Deux grands cercles se coupent mutuellement en deux parties égales. En effet, les plans de ces cercles passant par le centre de la sphère, se coupent suivant une droite qui est à la fois un diamètre de la sphère et un diamètre des deux cercles considérés.

257. *Deux petits cercles également éloignés du centre de la sphère sont égaux; de deux petits cercles inégalement éloignés du centre de la sphère, le plus éloigné est le plus petit* (*fig.* 251).

Fig. 251.



Je fais passer un plan par le centre de la sphère et les centres des deux petits cercles proposés. Ce plan coupera la sphère suivant le grand cercle ABDC, et les deux petits cercles suivant leurs diamètres AB et CD. Les perpendiculaires OF et OG abaissées du centre de la sphère sur les plans des deux petits cercles étant dans le plan ABDC, on voit immédiatement (54) que si les distances OF et OG sont égales, les deux diamètres AB et CD seront aussi égaux ; et que si la distance OF est plus grande que la distance OG, le diamètre AB sera plus petit que le diamètre CD : ce qui est d'accord avec l'énoncé.

Les réciproques de ces deux propositions sont évidentes.

258. *Tous les points de la circonférence d'un cercle de la sphère sont à égale distance de chacun des pôles de ce cercle* (*fig.* 252).

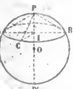


Fig. 252.

En effet les pôles P et P' étant les extrémités du diamètre perpendiculaire au plan du cercle considéré, et ce diamètre passant par le centre I de ce cercle, les obliques PA, PB, PC, menées de l'un des pôles aux différents points de la circonférence, s'écartent également du pied de la perpendiculaire PI, et sont égales.

Cette propriété des pôles d'un cercle est importante. Elle permet de tracer des circonférences sur la surface sphérique, de la même manière qu'on les trace sur un plan. On se sert à cet effet d'un compas à branches courbes, appelé *compas sphérique.* On donne au compas une ouverture égale à la distance du pôle à l'un des points de la circonférence qu'on veut décrire, on place l'une des pointes du compas au pôle choisi, et l'autre pointe trace la circonférence demandée. En effet, si l'on mène par l'une des positions de la pointe mobile un plan perpendiculaire au diamètre de la sphère qui passe par la pointe fixe, on aura un cercle dont la *distance polaire* sera représentée par l'ouverture donnée au compas sphérique : la circonférence de ce cercle se confondra donc avec la courbe tracée.

La *distance polaire* d'un cercle de la sphère, est la distance qui sépare son pôle et l'un des points de sa circonférence (*). Des deux pôles d'un petit cercle, on ne considère en général que celui qui est le plus rapproché de son plan, c'est-à-dire qui est situé sur le même hémisphère.

Pour pouvoir tracer sur la surface sphérique des arcs de grand cercle, il faut savoir quelle distance polaire correspond à un grand cercle. Si P est le pôle du grand cercle ABC (*fig.* 253), l'angle POC sera droit. Le plan POC détermine d'ailleurs un grand cercle PCP' dans lequel l'angle POC est un angle au centre : l'arc PC sera donc égal au quart de la circonférence d'un grand cercle. Par conséquent, *la distance polaire d'un grand cercle est la corde qui sous-tend le quart de sa circonférence.*

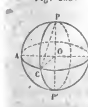


Fig. 253.

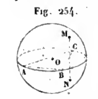
On voit immédiatement que *les plans de deux grands cercles sont perpendiculaires l'un à l'autre, lorsque le pôle de l'un de ces cercles se trouve sur la circonférence de l'autre.* En effet, le plan APB contient alors la perpendiculaire OP au plan ACB.

(*) On peut compter cette distance, soit en ligne droite, soit sur la surface sphérique (267).

Pour tracer des arcs de grand cercle, nous venons de dire qu'il fallait connaître la corde du quart d'une circonférence de grand cercle; cette condition revient à déterminer le rayon de cette circonférence, c'est-à-dire celui de la sphère.

259. *Trouver, par une construction plane, le rayon d'une sphère donnée* (*fig.* 254).

Fig. 254.



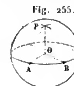
Je marque deux points quelconques M et N sur la surface sphérique. De chacun d'eux comme pôle, avec une distance polaire plus grande que la moitié de l'arc de grand cercle qui joint les points M et N, je décris deux arcs qui se coupent en un point A également distant des points M et N. Je détermine de la même manière deux points B et C également éloignés des points M et N. Le plan qui passera par les trois points A, B, C, sera perpendiculaire sur le milieu de la corde MN et sera le lieu géométrique de tous les points de l'espace à égale distance des points M et N (163) : il passera donc par le centre O de la sphère, et la coupera suivant un grand cercle dont la circonférence contiendra les trois points A, B, C.

Si l'on mesure alors les distances AB, AC, BC, et si l'on construit sur un plan un triangle dont les côtés soient ces trois distances, la circonférence circonscrite à ce triangle sera identique à celle d'un grand cercle de la sphère, et son rayon sera celui de la sphère.

260. Le rayon de la sphère une fois déterminé, on peut résoudre tous les problèmes suivants.

Faire passer une circonférence de grand cercle par deux points donnés sur la surface sphérique (*fig.* 255).

Fig. 255.

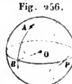


Des points A et B comme pôles, je décris deux arcs de grand cercle (258). Ces arcs se rencontreront en un point P qui sera le pôle de la circonférence de grand cercle demandée. En effet, les angles POA, POB, étant droits, la droite OP menée du centre de la sphère au point P sera perpendiculaire au plan AOB. Le point P sera donc le pôle de la circonférence déterminée par ce plan (256).

Si les points A et B étaient aux extrémités d'un même diamètre, les arcs de grand cercle décrits des points A et B comme pôles formeraient une seule et même circonférence dont tous les points pourraient être pris successivement pour pôles de la circonférence demandée : le problème aurait donc, comme nous l'avons déjà remarqué (256), une infinité de solutions.

Mener par un point de la surface sphérique un grand cercle perpendiculaire à un grand cercle donné (fig. 256).

Fig. 256.

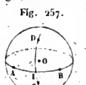


Du point donné A comme pôle, je trace un arc de grand cercle qui vient couper au point P le grand cercle donné OB. Du point P comme pôle, je décris un arc de grand cercle AB, qui passe nécessairement par le point A et est perpendiculaire au grand cercle OB ; car deux grands cercles sont perpendiculaires l'un à l'autre, lorsque le pôle de l'un est sur la circonférence de l'autre (258).

Diviser en deux parties égales un arc de grand cercle (fig. 257).

Je détermine sur la surface sphérique deux points C et D également éloignés des extrémités A et B de l'arc de grand cercle donné (259). Je fais passer un grand cercle par les deux points C et D. Le plan de ce grand cercle sera le lieu géométrique de tous les points de l'espace à égale distance des points A et B ; le point I où il coupera l'arc AB, sera donc le milieu de cet arc.

Fig. 257.



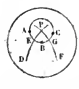
C'est la même construction qu'il faudrait employer pour tracer un arc de grand cercle perpendiculaire sur le milieu d'un autre arc de grand cercle.

Le grand cercle CD divise aussi en deux parties égales tous les arcs de petits cercles qui passent par les points A et B, parce que tous ces arcs ont pour corde commune la droite AB que le plan du grand cercle CD partage perpendiculairement en deux parties égales.

Faire passer un petit cercle par trois points donnés sur la surface de la sphère (fig. 258).



Fig 258.



Soient donnés les trois points A, B, C ; je mène le grand cercle DE perpendiculaire sur le milieu de l'arc AB, et le grand cercle FG perpendiculaire sur le milieu de l'arc BC. Ces deux arcs de grands cercles se couperont en un point P qui, appartenant à l'intersection des deux grands cercles perpendiculaires aux cordes AB et BC, c'est-à-dire au plan ABC, sera l'extrémité du diamètre perpendiculaire à ce plan ou le pôle du petit cercle ABC. Il ne restera donc plus qu'à décrire un petit cercle, du point P comme pôle, avec la distance polaire PA.

On voit que le problème revient à trouver le pôle du petit cercle ABC.

261. Un plan est *tangent* à la sphère lorsqu'il n'a avec elle qu'un point commun appelé *point de contact*.

Tout plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangent à la sphère; réciproquement, *tout plan tangent à la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contact* (*fig.* 259).

Fig. 259.

Soit le plan MN perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA. Je joins un point B *quelconque* de ce plan au centre de la sphère : OB, oblique par rapport à la perpendiculaire OA, surpassera OA, et le point B sera *extérieur* à la sphère. Le plan MN n'aura donc que le point A commun avec la sphère, et lui sera tangent en ce point.

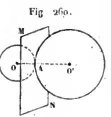
Réciproquement, supposons que le plan MN *touche* la sphère au point A. Tout autre point B du plan étant extérieur à la sphère, on aura OB $>$ OA. Le rayon OA, plus courte distance du centre de la sphère au plan MN, sera perpendiculaire à ce plan au point A (162).

Par un point de la surface de la sphère, on peut donc toujours lui mener un plan tangent, mais un seul; car, par un point d'une droite, on peut toujours lui mener un plan perpendiculaire, mais un seul (160).

On dit que deux sphères sont *tangentes*, lorsqu'elles ont en un point commun un plan tangent commun. Le point commun est le point de contact des deux sphères.

Lorsque deux sphères sont tangentes, leur point de contact est situé sur la ligne des centres. En effet, les rayons OA, O′A, menés au point de contact A (*fig.* 260), sont perpendiculaires au plan tangent commun MN, en un même point : ces deux rayons se confondent donc avec la ligne des centres OO′.

Fig 260.



262. Deux sphères peuvent avoir, comme deux cercles (60), cinq positions différentes, l'une par rapport à l'autre : elles peuvent être *extérieures, tangentes extérieurement, sécantes, tangentes intérieurement, intérieures.*

Si on coupe les deux sphères considérées, par un plan qui contienne leur ligne des centres, ces deux sphères pourront être regardées comme engendrées par le mouvement des deux sections obtenues, autour de la ligne des centres, et les circonférences génératrices occuperont l'une par rapport à l'autre la même position que les deux sphères correspondantes. Cette remarque rend évidents les énoncés suivants :

Lorsque deux sphères sont extérieures, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons.

Lorsque deux sphères sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons.

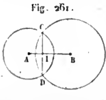
Lorsque deux sphères sont sécantes, la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence.

Lorsque deux sphères sont tangentes intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons.

Lorsque deux sphères sont intérieures, la distance des centres est plus petite que la différence des rayons.

Lorsque deux sphères se coupent, le plan conduit par leurs centres A et B (*fig.* 261) détermine deux grands cercles dont la corde commune CD est coupée perpendiculairement en son milieu I par la ligne AB. Si les deux grands cercles tournent autour de AB pour engendrer les deux sphères, le point commun C engendrera l'intersection des deux surfaces sphériques. CI étant perpendiculaire à l'axe AB au point I, engendrera un plan perpendiculaire à AB au point I (159), et le point C décrira dans ce plan une circonférence de cercle dont le point I sera le centre. Par suite *l'intersection de deux surfaces sphériques est une circonférence, dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres et dont le centre est sur cette ligne.*

Fig. 261.

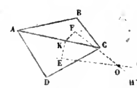


Les réciproques des cinq théorèmes précédemment énoncés sont évidentes.

263. *Par quatre points non situés dans un même plan, on peut toujours faire passer une sphère, mais on n'en peut faire passer qu'une.*

Soient les quatre points A, B, C, D (*fig.* 262), non situés dans un même plan. Soit E le centre de la circonférence déterminée par les trois points A, D, C; soit F le centre de la circonférence déterminée par les trois points A, B, C. La perpendiculaire EG élevée par le point E au plan ADC aura tous ses points à égale distance des points A, D, C (162); la perpendiculaire FH élevée par le point F au plan ABC aura tous ses points à égale distance des points A, B, C. Les deux perpendiculaires EG, FH, se couperont nécessairement en un point O. En effet, abaissons de chacun des points E et F des perpendiculaires sur l'intersection AC des

Fig. 262.



deux plans ADC, ABC. Ces perpendiculaires viendront passer toutes les deux par le point K milieu de AC (53). Elles détermineront donc un plan perpendiculaire à AC et, par suite, aux plans ADC et ABC. Les perpendiculaires EG et FH seront dès lors dans le plan EKF (183), et elles se couperont ; car si elles étaient parallèles, les deux perpendiculaires KE, KF, seraient en ligne droite, et les deux plans ADC, ABC, se confondant comme menés par les mêmes droites sécantes AC, EF, les quatre points donnés seraient dans un même plan.

Le point O de rencontre des perpendiculaires EG et FH, étant à la fois à égale distance des quatre points A, B, C, D, la sphère décrite du point O comme centre, avec OA pour rayon, passera par les quatre points donnés.

Le point O de rencontre des deux droites EG, FH, étant unique, il n'y a aussi qu'une sphère qui puisse passer par les quatre points considérés.

Deux sphères qui ont quatre points communs coïncident dans toute leur étendue, si ces quatre points ne sont pas dans un même plan ; car elles ont alors même centre et même rayon.

264. *L'angle de deux arcs de grand cercle* est l'angle dièdre formé par leurs plans ; les arcs de grand cercle sont les *côtés* de l'angle, leur point d'intersection est son *sommet*.

L'angle de deux arcs de grand cercle a pour mesure l'arc de grand cercle décrit de son sommet comme pôle et compris entre ses côtés (*fig.* 263).

Soit l'angle formé par les deux arcs PAP', PBP'. Du point P, sommet de cet angle, je décris l'arc de grand cercle AB.

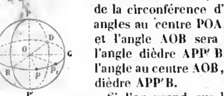


Fig. 263.

Chacun des arcs PA, PB, étant égal au quart de la circonférence d'un grand cercle, les angles au centre POA, POB, seront droits, et l'angle AOB sera l'angle rectiligne de l'angle dièdre APP' B. L'arc AB mesurant l'angle au centre AOB, mesure aussi l'angle dièdre APP'B.

Si l'on prend sur la circonference dont fait partie l'arc AB, un arc Ap égal au quart d'une circonférence de grand cercle et un arc Bp_1, égal à l'arc Ap, l'arc pp_1, sera nécessairement égal à l'arc AB. Mais le point p est le pôle de l'arc PA, le point p_1 est le pôle de l'arc PB. On peut donc dire encore que *l'angle* APB *a pour mesure l'arc de grand cercle qui joint les pôles de ses côtés.*

Les angles *adjacents* ABP, PBC, sont évidemment *supplémentaires ;* les angles *opposés par le sommet* APB, CPD, sont évidemment *égaux*.

Il y a une infinité de grands cercles faisant avec un grand cercle donné un angle donné. Si l'on suppose que le grand cercle donné soit PAP′, et que l'angle donné soit mesuré par l'arc AB, le lieu des pôles de tous les grands cercles répondant à la question sera la circonférence de petit cercle décrite du point p comme pôle avec la distance polaire pp_1, égale à AB.

II. — Du triangle sphérique.

265. On appelle *polygone sphérique* la portion de la surface sphérique comprise entre plusieurs arcs de grand cercle. Ces arcs, limités à leurs points d'intersection, sont les *côtés* du polygone, les angles qu'ils forment et les sommets de ces angles sont les *angles* et les *sommets* du polygone.

Le nombre des côtés se réduisant à trois, on a un *triangle sphérique.*

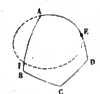
Un polygone sphérique est *convexe*, lorsqu'il est situé d'un même côté par rapport à chacune des circonférences de grand cercle formées par ses côtés prolongés; il est *concave* dans le cas contraire.

Un polygone sphérique convexe ne peut être rencontré en plus de deux points par un arc de grand cercle.

Les côtés d'un polygone sphérique convexe sont nécessairement moindres qu'une demi-circonférence de grand cercle (*fig.* 264).

Si le côté AB, par exemple, était plus grand qu'une demi-circonférence, la circonférence dont fait partie le côté AE couperait le côté AB en un second point I situé entre A et B, de manière que AI représentât une demi-circonférence (256). Le polygone proposé ne serait donc plus situé d'un même côté par rapport aux circonférences formées par ses côtés prolongés.

Fig. 264.



266. *En joignant les sommets d'un polygone sphérique* ABCD *au centre* O *de la sphère* (*fig.* 265), *on forme un angle polyèdre* OABCD *dont les angles plans* AOB, BOC, *etc., sont mesurés par les côtés* AB, BC, *etc., du polygone, et dont les angles dièdres* OA, OB, *etc., sont précisément les angles* A, B, *etc., du polygone.*

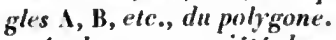
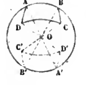


Fig. 265.



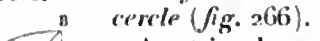
A chaque propriété des angles trièdres ou polyèdres, correspond donc une propriété analogue des triangles ou polygones sphériques; et pour énoncer cette propriété, il suffit de remplacer le mot angle plan *par le mot* côté *et le mot* angle dièdre *par le mot* angle.

Si l'on prolonge les arêtes de l'angle polyèdre OABCD au-

delà du sommet O, on forme un angle polyèdre symétrique OA′B′C′D′ (187), qui détermine sur la surface de la sphère un polygone A′B′C′D′. Les deux polygones ABCD, A′B′C′D′, dont toutes les parties sont égales, mais disposées dans un ordre inverse, sont appelés polygones sphériques *symétriques*.

267. *Dans tout triangle sphérique, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres ; la somme des trois côtés est inférieure à une circonférence de grand cercle* (*fig.* 266).

Fig. 266.



Au triangle sphérique ABC correspond un angle trièdre OABC dont le sommet est au centre de la sphère. Ses angles plans sont mesurés par les côtés du triangle, ses angles dièdres sont ceux du triangle.

L'angle plan AOB étant plus petit que la somme des angles plans BOC, AOC (188), l'arc AB sera plus petit que la somme des arcs BC et AC. De même, la somme des trois angles plans AOB, BOC, AOC, étant moindre que quatre angles droits (189), la somme des trois arcs AB, BC, AC, sera moindre qu'une circonférence de grand cercle.

Le théorème qu'on vient de démontrer est vrai pour un polygone sphérique convexe quelconque.

En s'appuyant sur ce théorème, on prouve que *la ligne la plus courte entre deux points* A *et* B *de la surface sphérique est un arc de grand cercle* (*fig.* 267).

Fig. 267.

En effet, toute autre ligne ADCEB, menée entre ces deux points, surpasse l'arc de grand cercle AB qui les joint. Nous supposerons d'abord cet arc plus petit qu'une demi-circonférence.

Je prends un point C sur la ligne ADCEB, et je le joins par des arcs de grand cercle aux points A et B. On a alors, dans le triangle sphérique ABC,

$$AB < AC + BC.$$

Prenons de même sur la ligne ADCEB un point D situé entre A et C, un point E situé entre B et C; joignons le point D aux points A et C par des arcs de grand cercle ; joignons le point E aux points B et C par des arcs de grand cercle. Les nouveaux triangles sphériques formés donneront

$$AC < AD + DC \quad \text{et} \quad BC < CE + EB.$$

Il en résultera

$$AC + BC < AD + DC + CE + EB,$$

et, *a fortiori*,

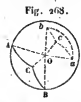
$$AB < AD + DC + CE + EB.$$

En continuant de la même manière, on formera une série de lignes polygonales de plus en plus grandes et qui auront pour *limite* la courbe ADCEB. Cette courbe surpasse donc l'arc de grand cercle AB.

Si l'arc AB était égal à une demi-circonférence, c'est-à-dire si les points A et B étaient diamétralement opposés, il y aurait une infinité de plus courts chemins : ces plus courts chemins seraient toutes les demi-circonférences qu'on peut mener par les extrémités d'un même diamètre de la sphère (256).

268. Soit un angle trièdre OABC ayant son sommet au centre de la sphère (*fig.* 268). Élevons respectivement à chacune de ses faces AOB, AOC, BOC, par le sommet O, les perpendiculaires O*c*, O*b*, O*a*. Ces perpendiculaires formeront l'angle trièdre O*abc*, *supplémentaire* de l'angle trièdre proposé (190). Les triangles sphériques ABC, *abc*, déterminés par les deux angles trièdres OABC, O*abc*, sont aussi appelés triangles sphériques *supplémentaires*. Puisque leurs côtés mesurent les faces des deux angles trièdres et que leurs angles sont les angles dièdres de ces mêmes trièdres, ces triangles jouissent en effet de la propriété suivante : *Les côtés de chacun d'eux sont les suppléments des angles de l'autre*. Les éléments d'un triangle sphérique étant donnés, les éléments du triangle sphérique supplémentaire sont donc immédiatement connus.

Fig. 268.



Les deux triangles ABC, *abc*, jouissent encore d'une autre propriété remarquable : *les sommets de chacun d'eux sont les pôles des côtés de l'autre*. En effet, la droite O*a* étant perpendiculaire au plan BOC, le point *a* est le pôle de l'arc BC. Il en est de même des sommets *b* et *c* relativement aux côtés AC et AB. Réciproquement, la distance polaire *b*A étant égale à la corde qui sous-tend le quart de la circonférence d'un grand cercle, puisque le point *b* est le pôle de l'arc AC, et la distance polaire *c*A étant égale à la précédente, puisque le point *c* est le pôle de l'arc AB, le point A est le pôle de l'arc *bc*. Il en est de même des sommets B et C par rapport aux côtés *ac* et *ab*. On peut, d'après cette propriété, décrire l'un des triangles au moyen de l'autre ; et on leur a donné, pour la rappeler, le nom de triangles *polaires*.

269. La remarque générale du nº 266 et le mode de raisonnement indiqué aux nºs 267 et 268, suffisent pour qu'il soit

permis d'énoncer sans démonstration les autres théorèmes relatifs aux triangles sphériques, en renvoyant seulement aux propriétés analogues des angles trièdres.

Deux triangles sphériques sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun et semblablement disposés (191, 1°).

Deux triangles sphériques sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun et semblablement disposés (191, 2°).

Deux triangles sphériques sont égaux, lorsqu'ils ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun et semblablement disposés (191, 3°).

Deux triangles sphériques sont égaux, lorsqu'ils ont leurs trois angles égaux chacun à chacun et semblablement disposés (191, 4°).

Il est bien entendu que les triangles sphériques comparés sont tracés sur des sphères de rayons égaux.

On peut appeler triangles sphériques *semblables* deux triangles sphériques ayant leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels. Lorsqu'un angle trièdre OABC a son sommet au centre de deux sphères concentriques, il détermine sur ces sphères deux triangles semblables ABC, A'B'C' (*fig.* 269). En effet, ces triangles sont équiangles; de plus, les arcs semblables AB, A'B', sont proportionnels aux rayons OA, OA', et il en est de même des arcs AC, A'C', BC, B'C'. On aura donc

Fig. 269.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Dans tout triangle sphérique isocèle, aux côtés égaux sont opposés des angles égaux (193).

Lorsqu'un triangle sphérique a deux angles égaux, à ces angles égaux sont opposés des côtés égaux, et le triangle est isocèle (193). Il résulte de là que si un triangle sphérique est *équilatéral*, il est en même temps *équiangle*, et réciproquement.

Dans tout triangle sphérique, à un plus grand angle est opposé un plus grand côté, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle (194).

Lorsque deux triangles sphériques ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant un angle inégal, au plus grand angle est opposé un plus grand côté (195). La réciproque de cette proposition est évidente.

Dans tout triangle sphérique, la somme des trois angles est comprise entre deux et six angles droits; chaque angle, aug-

menté de deux droits, est plus grand que la somme des deux autres angles (196).

Lorsqu'un triangle sphérique contient un angle droit, il est *rectangle:* son *hypoténuse* est le côté opposé à l'angle droit. Un triangle sphérique qui contient *deux* ou *trois* angles droits, est appelé *bi-rectangle* ou *tri-rectangle* (187). Trois grands cercles perpendiculaires deux à deux divisent évidemment la surface sphérique en huit triangles tri-rectangles égaux entre eux. Ainsi, *le triangle tri-rectangle est le huitième de la surface sphérique.*

III. — Mesure de la surface sphérique.

270. On appelle *ligne brisée régulière* une ligne brisée plane et convexe, dont les côtés forment des angles égaux et sont égaux.

Une ligne brisée régulière jouit de toutes les propriétés d'un polygone régulier : elle est inscriptible et circonscriptible au cercle, elle a un centre, un rayon, un apothème. Seulement, l'angle au centre d'une ligne brisée régulière n'est pas, en général, une partie aliquote de quatre angles droits. On appelle *diamètre* d'une ligne brisée régulière toute droite passant par son centre.

Pour inscrire une ligne brisée régulière dans un arc de cercle, il suffit de diviser cet arc en parties égales et de joindre les points de division par des cordes.

271. *La surface engendrée par une ligne brisée régulière en tournant autour d'un diamètre qui ne la traverse pas, a pour mesure le produit de la circonférence inscrite dans la ligne brisée par la projection de cette ligne sur l'axe* (*fig.* 270).

Fig. 270.

Soient O le centre et OI l'apothème de la ligne brisée régulière ABCD tournant autour du diamètre xy. La surface engendrée par cette ligne sera la somme des surfaces engendrées par les côtés AB, BC, CD.

Le côté AB engendrera la surface convexe d'un cône ayant AE pour hauteur et BE pour rayon de sa base. L'expression de cette surface est égale à la hauteur AE multipliée par la circonférence, ayant pour rayon la perpendiculaire élevée sur le milieu du côté jusqu'à la rencontre de l'axe (234) : cette perpendiculaire est précisément l'apothème OI de la ligne brisée régulière. On pourra donc écrire

$$\text{surf AB} = \text{AE. circ OI}.$$

De même, le côté BC engendrera la surface convexe d'un tronc de cône ayant EF pour hauteur, BE et CF pour rayons de ses bases. L'expression de cette surface est égale à la hauteur EF multipliée par la circonférence qui a pour rayon la perpendiculaire élevée sur le milieu du côté BC jusqu'à la rencontre de l'axe (234), perpendiculaire qui est encore l'apothème OI. On pourra donc écrire

$$\text{surf BC} = \text{EF}.\,\text{circ OI}.$$

Enfin le côté CD parallèle à l'axe engendrera la surface convexe d'un cylindre ayant FG pour hauteur, CF et DG pour rayons de ses bases. L'expression de cette surface est égale à la hauteur FG multipliée par la circonférence de base du cylindre, qui est évidemment égale à la circonférence inscrite dans la ligne brisée. On écrira donc encore

$$\text{surf CD} = \text{FG}.\,\text{circ OI}.$$

Si l'on ajoute les égalités précédentes membre à membre, on aura, en mettant circ OI en facteur commun,

$$\text{surf ABCD} = (\text{AE} + \text{EF} + \text{FG}).\,\text{circ OI},$$

c'est-à-dire

$$\text{surf ABCD} = \text{AG}.\,\text{circ OI}.$$

Cherchons, comme exercices, les surfaces engendrées par un demi-polygone régulier d'un nombre pair de côtés et par un demi-polygone régulier d'un nombre impair de côtés.

Si l'on désigne par R le rayon du polygone et par r son apothème, on aura dans le premier cas

$$S = 2R.2\pi r = 4\pi Rr.$$

Dans le second cas (*fig.* 271), le diamètre xy de la ligne brisée régulière passe par le sommet A et coupe le côté CD en son milieu, c'est-à-dire que AO est le rayon du polygone et OI son apothème (128). La surface engendrée par les deux côtés AB et BC aura pour expression $(R + r).2\pi r$. Le demi-côté CI engendrera un cercle de rayon CI. On aura donc pour la surface cherchée

Fig. 271.

$$S = (R + r).2\pi r + \pi \text{CI}^2.$$

Mais le triangle rectangle OCI donne $\text{CI}^2 = R^2 - r^2$. En substituant dans l'égalité précédente et en simplifiant, il viendra

$$S = 2\pi Rr + \pi r^2 + \pi R^2,$$

c'est-à-dire

$$S = \pi(R + r)^2.$$

Les deux expressions qu'on vient de calculer conduiraient immédiatement à l'expression de la surface sphérique, si l'on supposait les polygones considérés remplacés par les circonférences limites : on devrait, dans cette hypothèse, faire $r = R$.

272. On entend par *zone* la portion de la surface sphérique comprise entre deux plans parallèles. Les cercles déterminés par ces deux plans sont les *bases* de la zone, et la distance de ces deux plans est la *hauteur* de la zone. Si l'un des plans devient tangent à la sphère ou si l'un des cercles considérés est nul, la zone n'a qu'une base : on lui donne alors souvent le nom de *calotte sphérique*.

Une zone a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle (*fig.* 272).

Fig. 272.



Soit le demi-cercle KABL. Pendant que sa circonférence tournant autour du diamètre xy engendrera la surface sphérique, un arc AB de cette circonférence engendrera une zone qui aura CD pour hauteur, AC et BD pour rayons de ses bases. Inscrivons dans l'arc AB une ligne brisée régulière telle que AFB. La surface engendrée par cette ligne brisée en tournant autour de xy sera évidemment moindre que la surface de la zone considérée qui l'enveloppe de toutes parts. A mesure qu'on doublera le nombre de côtés de la ligne brisée inscrite, la surface qu'elle engendre deviendra plus grande [parce que l'apothème OI augmentera (271)] tout en restant inférieure à celle de la zone. Par suite, la différence de ces deux surfaces diminuera de plus en plus, et la zone sera la limite des surfaces engendrées par les lignes brisées régulières, puisque l'arc AB est la limite de ces lignes brisées. Or, quel que soit le nombre de ses côtés, la ligne brisée régulière engendre une surface ayant pour expression CD.circ OI (271). CD ne varie pas, et à la limite, OI devenant OK (125), circ OI devient circ OK. On aura donc

$$\text{zone } AB = CD \cdot 2\pi OK.$$

Désignons par H la hauteur de la zone et par R le rayon de la sphère ; l'expression générale de l'aire d'une zone

sera

$$\text{zone} = 2\pi R.H.$$

Dans une même sphère, les zones de même hauteur sont équivalentes, deux zones quelconques sont proportionnelles à leurs hauteurs.

Lorsqu'une zone n'a qu'une base, sa surface est celle du cercle qui a pour rayon la corde de l'arc générateur de la zone (*fig.* 273).

En effet, on a

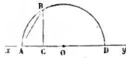
$$\overline{AB}^2 = AD.AC = 2RH.$$

Par suite, on peut poser

$$\text{zone } AB = 2\pi RH = \pi.\overline{AB}^2.$$

273. *La surface sphérique a pour expression le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle, c'est-à-dire qu'elle est égale à quatre grands cercles* (*fig.* 273).

Fig. 273.



Soit la sphère engendrée par le demi-cercle ABD. La demi-circonférence ABD étant la somme des arcs AB et BD, la surface sphérique sera la somme des zones engendrées par ces arcs. On aura (272)

$$\text{zone } AB = AC.2\pi OA,$$
$$\text{zone } BD = CD.2\pi OA.$$

En additionnant ces égalités membre à membre, il vient

$$\text{surf. sph. } OA = (AC + CD).2\pi OA,$$

c'est-à-dire

$$\text{surf. sph. } OA = AD.2\pi OA.$$

Désignons par R le rayon de la sphère. L'expression générale de l'aire de la surface sphérique deviendra, en la représentant par S,

$$S = 2R.2\pi R = 4\pi R^2.$$

Si l'on appelle D le diamètre de la surface sphérique, on aura aussi

$$S = D.\pi D = \pi D^2.$$

On voit que *les surfaces de deux sphères quelconques sont*

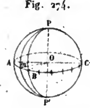
proportionnelles aux carrés de leurs rayons ou de leurs diamètres.

274. La partie de la surface sphérique comprise entre deux demi-circonférences de grand cercle terminées au même diamètre, s'appelle *fuseau*. L'angle des deux demi-circonférences est l'*angle* du fuseau. Deux fuseaux situés sur des sphères égales sont évidemment égaux lorsque leurs angles sont égaux.

Le rapport d'un fuseau à la surface sphérique est égal au rapport de son angle à quatre angles droits (fig. 274).

Soit le fuseau APP'B compris entre les deux demi-circonférences PAP', PBP'. Du point P comme pôle, je décris la circonférence de grand cercle ABC : l'arc AB mesure l'angle du fuseau. Je suppose qu'il y ait une commune mesure entre cet arc et la circonférence entière dont il fait partie, qu'on ait par exemple $\frac{AB}{\text{circ ABC}} = \frac{2}{15}$. Je divise alors la circonférence ABC en 15 parties égales, et AB contiendra 2 de ces parties. Par le diamètre PP' et chacun des points de division obtenus, je fais passer des plans qui décomposeront la surface sphérique en 15 fuseaux tous égaux entre eux comme ayant même angle, et le fuseau APP'B contiendra 2 de ces fuseaux. Son rapport à la surface sphérique entière sera donc aussi égal à $\frac{2}{15}$. Ainsi, le rapport du fuseau considéré à la surface sphérique est égal au rapport de l'arc qui mesure son angle à la circonférence dont il fait partie, c'est-à-dire au rapport de cet angle à quatre angles droits.

Fig. 274.



Si l'arc AB et la circonférence ABC n'avaient pas de commune mesure, on emploierait le mode de démonstration déjà souvent indiqué (63).

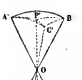
Soit R le rayon de la sphère et P le rapport de l'angle du fuseau à l'angle droit : le rapport de cet angle à quatre angles droits sera $\frac{P}{4}$. On aura donc, d'après ce qu'on vient de voir, en désignant le fuseau APP'B par fus P

$$\frac{\text{fus P}}{4\pi R^2} = \frac{P}{4}, \quad \text{d'où} \quad \text{fus P} = \pi R^2 . P.$$

L'aire d'un fuseau est donc égale au produit d'un grand cercle par le rapport de l'angle du fuseau à un angle droit.

275. Pour passer de l'aire du fuseau à l'aire du triangle sphérique, nous nous appuierons sur la proposition suivante :

Fig. 275.



Deux triangles sphériques symétriques (266) *sont équivalents* (*fig.* 275).

Soient les deux triangles sphériques symétriques ABC, A'B'C'. Soit P le pôle du cercle circonscrit au triangle ABC. Prolongeons PO jusqu'à la surface sphérique, et soit P' la seconde extrémité du diamètre obtenu. Joignons le point P aux trois sommets du triangle ABC, le point P' aux trois sommets du triangle A'B'C', par des arcs de grand cercle. Les arcs PA, PB, PC, étant égaux (258), les trois angles trièdres OAPB, OAPC, OBPC, seront isocèles. Il en sera donc de même des angles trièdres symétriques OA'P'B', OA'P'C', OB'P'C', qui pourront dès lors coïncider deux à deux avec les précédents (193). Par suite, les triangles APB, A'P'B', APC, A'P'C', BPC, B'P'C', étant égaux deux à deux, le triangle ABC, qui est la réunion des trois triangles APB, APC, BPC, sera équivalent au triangle A'B'C' qui est la réunion des trois triangles A'P'B', A'P'C', B'P'C'.

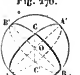
Remarquons que les triangles A'P'B', A'P'C', B'P'C', sont alors isocèles, et que le point P' est aussi le pôle du petit cercle circonscrit au triangle A'B'C'.

De même que deux angles trièdres symétriques peuvent coïncider lorsqu'ils sont isocèles, *deux triangles sphériques symétriques isocèles sont superposables.*

Nous avons supposé que le pôle P tombait à l'intérieur du triangle ABC; s'il était situé à l'extérieur ou sur le plus grand côté du triangle, la démonstration serait encore la même : seulement, lorsque le pôle est à l'extérieur, le triangle représente une différence au lieu de représenter une somme.

276. *Le rapport de l'aire d'un triangle sphérique à la surface sphérique est égal au rapport de son excès sphérique à huit angles droits* (*fig.* 276).

Fig. 276.



On appelle *excès sphérique* d'un triangle sphérique le rapport de la somme des angles du triangle, diminuée de deux angles droits, à un angle droit.

Soit le triangle sphérique ABC. Ce triangle se trouve sur l'hémisphère limité par la circonférence à laquelle appartient le côté AB. J'achève également les circonférences auxquelles appartiennent les deux autres côtés AC et BC. Le triangle ABC, augmenté du triangle BCA',

forme évidemment le fuseau limité par les deux demi-circonférences ACA′, ABA′ c'est-à-dire le fuseau dont l'angle est l'angle A du triangle proposé. De même, le triangle ABC, augmenté du triangle ACB′, forme le fuseau dont l'angle est l'angle B du triangle donné. Cherchons enfin à quoi revient la somme des deux triangles ABC, CA′B′. On peut remplacer le triangle CA′B′ par le triangle symétrique équivalent (275) C′AB. On voit alors que le triangle ABC, augmenté du triangle CA′B′ ou C′AB, équivaut au fuseau limité par les deux demi-circonférences CAC′, CBC′, c'est-à-dire au fuseau dont l'angle est égal à l'angle C du triangle ABC. On peut donc poser les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} ABC + BCA' &= \text{fuseau } A, \\ ABC + ACB' &= \text{fuseau } B, \\ ABC + CA'B' &= \text{fuseau } C. \end{aligned}$$

Si l'on ajoute ces trois égalités membre à membre, on trouve

$$2\,ABC + \frac{1}{2}\,\text{surf. sph.} = \text{fus } A + \text{fus } B + \text{fus } C,$$

d'où

$$ABC = \frac{1}{2}(\text{fus } A + \text{fus } B + \text{fus } C) - \frac{1}{4}\,\text{surf. sph.}$$

Divisons les deux membres de cette dernière égalité par la surface de la sphère ; il viendra

$$\frac{ABC}{\text{surf. sph.}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{fus } A + \text{fus } B + \text{fus } C}{\text{surf. sph.}}\right) - \frac{1}{4}.$$

Mais le rapport d'un fuseau à la surface de la sphère est égal au rapport de son angle à quatre angles droits (274). On aura donc

$$\frac{ABC}{\text{surf. sph.}} = \frac{1}{2}\left(\frac{A + B + C}{4}\right) - \frac{1}{4},$$

d'où

$$\frac{ABC}{\text{surf. sph.}} = \frac{A + B + C - 2}{8}.$$

Si l'on représente le triangle tri-rectangle par T, on pourra remplacer surf. sph. par 8T (269), et on pourra écrire

$$\frac{ABC}{T} = \frac{A + B + C - 2}{1}.$$

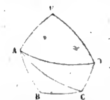
De sorte qu'en prenant l'angle droit pour unité d'angle et le

triangle tri-rectangle pour unité d'aire, *un triangle sphérique a pour mesure son excès sphérique.* T étant le huitième de la surface sphérique, on a $T = \frac{\pi R^2}{2}$ (273) et, par suite,

$$ABC = (A + B + C - 2)\frac{\pi R^2}{2}.$$

Soit maintenant un polygone sphérique convexe quelconque ABCDE (*fig.* 277). On décomposera ce polygone en triangles, en joignant le sommet A aux autres sommets non adjacents par des arcs de grand cercle, et l'on obtiendra autant de triangles que le polygone a de côtés moins deux. En ajoutant les aires de ces triangles, on aura l'aire du polygone, et en remarquant que la somme des angles de tous ces triangles forme la somme des angles du polygone, on verra que le rapport de l'aire de ce polygone à la surface sphérique est égal au rapport de la somme de ses angles, diminuée d'autant de fois deux droits que le polygone contient de côtés moins deux, à huit angles droits.

Fig. 277.



Désignons par S la somme des angles du polygone, par n le nombre de ses côtés, on aura

$$\frac{ABCDE}{\text{surf. sph.}} = \frac{S - 2(n-2)}{8}.$$

Si l'on remplace surf. sph. par 8T, il vient

$$\frac{ABCDE}{T} = \frac{S - 2(n-2)}{1}.$$

Le rapport écrit dans le second membre s'appelle *l'excès sphérique* du polygone. Lorsqu'on prend l'angle droit pour unité d'angle et le triangle tri-rectangle pour unité d'aire, *un polygone sphérique a donc pour mesure son excès sphérique.* On peut écrire

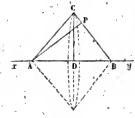
$$ABCDE = (S + 4 - 2n).\frac{\pi R^2}{2}.$$

IV. — Mesure du volume de la sphère.

277. *Le volume engendré par la révolution d'un triangle autour d'une droite située dans son plan et passant par l'un de ses sommets sans traverser sa surface, est égal au produit de la surface engendrée par le côté du triangle opposé au sommet situé sur l'axe, multipliée par le tiers de la hauteur correspondante.*

Nous supposerons d'abord que l'un des côtés AB du triangle se confond avec l'axe (*fig.* 278). Du sommet opposé C, j'abaisse sur l'axe xy la perpendiculaire CD. Suivant que la perpendiculaire CD tombera à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle ABC, le volume engendré par ce triangle sera la somme ou la différence des cônes droits engendrés par les triangles rectangles ACD, BCD. On a (229)

Fig. 278.



$$\text{cône ACD} = \frac{1}{3}\pi\,\text{CD}^2.\text{AD},$$

$$\text{cône BCD} = \frac{1}{3}\pi\,\text{CD}^2.\text{BD}.$$

En désignant par vol ABC le volume engendré par la rotation du triangle ABC autour de l'axe xy, on aura dans les deux cas

$$\text{vol ABC} = \frac{1}{3}\pi\,\text{CD}^2.\text{AB}.$$

Le produit CD.AB exprime le double de la surface du triangle ABC. Si l'on abaisse AP perpendiculaire sur BC, le produit AP.BC exprimera aussi le double de cette surface. On pourra donc, dans l'expression précédente, remplacer CD.AB par AP.BC. Il viendra alors

$$\text{vol ABC} = \frac{1}{3}\pi\,\text{CD}.\text{AP}.\text{BC}.$$

Mais la surface convexe du cône engendré par le triangle rectangle BCD, c'est-à-dire la surface engendrée par le côté BC, a précisément pour expression π.CD.BC (228). On pourra donc écrire

$$\text{vol ABC} = \text{surf BC}\cdot\frac{\text{AP}}{3}.$$

Supposons maintenant qu'aucun des côtés du triangle ne coïncide avec l'axe (*fig.* 279). Je prolonge le côté BC jusqu'à sa rencontre avec l'axe au point E. Le triangle ABC étant la différence des triangles ACE, ABE, le volume qu'il engendrera sera la différence des volumes engendrés par ces triangles.

Fig. 279.

Mais

$$\text{vol ACE} = \text{surf EC} \cdot \frac{AP}{3},$$

$$\text{vol ABE} = \text{surf EB} \cdot \frac{AP}{3},$$

surf EC — surf EB représente évidemment la surface convexe du tronc de cône engendré par le trapèze CDFB, c'est-à-dire la surface engendrée par le côté BC. On aura donc encore

$$\text{vol ABC} = \text{surf BC} \cdot \frac{AP}{3}.$$

La démonstration précédente admet que le côté BC prolongé vient couper l'axe. Il faut donc, en dernier lieu, examiner le cas où ce côté est parallèle à l'axe (*fig.* 280).

Fig. 280.

Des extrémités du côté BC, j'abaisse sur l'axe xy les perpendiculaires CD et BF. Le volume engendré par le triangle ABC sera la somme ou la différence des volumes engendrés par les triangles APC, APB, suivant que la perpendiculaire AP abaissée du sommet A sur le côté BC tombera en dedans ou en dehors du triangle proposé. La même démonstration s'appliquera aux deux cas. Le triangle rectangle ADC et le rectangle ADCP ayant même base et même hauteur, le cône engendré par la rotation du triangle sera le tiers du cylindre engendré par le rectangle (229). Il en résulte évidemment que le volume engendré par le triangle APC sera les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle ADCP. On prouverait de même que le volume engendré par le triangle APB sera les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle AFBP. Le volume engendré par le triangle ABC sera donc finalement les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle DCBF, somme ou différence des rectangles ADCP, AFBP. On aura donc

$$\text{vol ABC} = \frac{2}{3}\pi \text{AP}^2 . \text{BC}.$$

Mais la surface latérale du cylindre engendré par le rectangle DCBF, c'est-à-dire la surface engendrée par le côté BC, a précisément pour expression $2\pi . \text{AP} . \text{BC}$. On pourra donc écrire comme précédemment

$$\text{vol ABC} = \text{surf BC} \cdot \frac{AP}{3}.$$

La formule trouvée n'est donc soumise à aucune restriction.

Considérons comme cas particulier celui où le triangle proposé étant isocèle, son sommet est sur l'axe (*fig.* 281). Dans

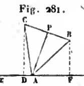


Fig. 281.

ce cas, la surface engendrée par la base BC est celle du tronc de cône engendré par le trapèze DCBF, les points D et F étant les projections des points C et B sur l'axe xy. Cette surface sera donc égale à la hauteur DF du tronc de cône multipliée par la circonférence qui a pour rayon la perpendiculaire élevée sur le milieu du côté BC jusqu'à la rencontre de l'axe (234), et cette perpendiculaire est précisément la hauteur AP du triangle isocèle. On aura donc

$$\text{surf}\,BC = DF \cdot 2\pi\,AP$$

et

$$\text{vol}\,ABC = \frac{2}{3}\pi\,AP^2 \cdot DF.$$

Le volume engendré par un triangle isocèle tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par son sommet sans traverser sa surface, a donc pour expression les deux tiers du cercle qui a pour rayon la hauteur du triangle isocèle, multipliés par la projection de la base de ce triangle sur l'axe.

278. La surface comprise entre une ligne brisée régulière et les rayons qui correspondent à ses extrémités, s'appelle *secteur polygonal régulier.*

Le volume engendré par un secteur polygonal régulier tournant autour d'un de ses diamètres, extérieur à sa surface, est égal au produit de la surface que décrit la ligne brisée qui sert de base au secteur, par le tiers de son apothème (*fig.* 282).

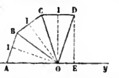


Fig. 282.

Soit le secteur polygonal régulier OABCDO. Je le décomposerai en triangles en joignant son centre O aux différents sommets A, B, C, D, de la ligne brisée régulière ABCD. On aura alors (277), OI étant l'apothème de la ligne brisée :

$$\text{vol}\,AOB = \text{surf}\,AB \cdot \frac{OI}{3},$$

$$\text{vol}\,BOC = \text{surf}\,BC \cdot \frac{OI}{3},$$

$$\text{vol}\,COD = \text{surf}\,CD \cdot \frac{OI}{3}.$$

Si l'on ajoute ces égalités membre à membre, on trouvera

$$\text{vol}\,OABCDO = (\text{surf}\,AB + \text{surf}\,BC + \text{surf}\,CD) \cdot \frac{OI}{3},$$

c'est-à-dire

$$\text{vol OABCDO} = \text{surf ABCD} \cdot \frac{\text{OI}}{3}.$$

Si AE est la projection de la ligne brisée régulière sur l'axe, on a (271)

$$\text{surf ABCD} = \text{AE} \cdot 2\pi \text{OI},$$

d'où

$$\text{vol OABCDO} = \frac{2}{3}\pi \overline{\text{OI}}^2 \cdot \text{AE}.$$

Nous aurions pu arriver immédiatement à cette formule, en remarquant que les triangles AOB, BOC, COD, sont isocèles (277).

Si l'on considère le volume engendré par un demi-polygone régulier tournant autour du diamètre qui le divise en deux parties égales, et si l'on appelle R et r son rayon et son apothème, il faudra remplacer AE par 2R ou par $\text{R}+r$, suivant que le nombre des côtés du polygone sera *pair* ou *impair*. En désignant le volume cherché par V et en remplaçant OI par r, on aura donc, dans le premier cas,

$$\text{V} = \frac{4}{3}\pi \text{R} r^2;$$

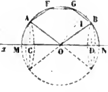
et, dans le second,

$$\text{V} = \frac{2}{3}\pi r^2(\text{R}+r).$$

Les deux expressions qu'on vient de calculer conduiraient immédiatement à l'expression du volume de la sphère, si l'on supposait les polygones remplacés par leurs circonférences limites : il faudrait alors faire $r = \text{R}$.

279. Le demi-cercle MABN engendrant la sphère en tournant autour de son diamètre MN (*fig.* 283), le secteur circulaire AOB engendrera une partie du volume de la sphère, appelée *secteur sphérique*. Les cercles engendrés par les perpendiculaires AC et BD, abaissées des points A et B sur l'axe xy, seront les bases de la zone engendrée par l'arc AB : cette zone sera la *base* du secteur sphérique.

Fig. 283.



Le volume d'un secteur sphérique est égal au produit de la zone qui lui sert de base par le tiers du rayon de la sphère.

J'inscris dans l'arc AB une ligne brisée régulière, telle que

AFGB. Le volume engendré par le secteur polygonal régulier OAFGBO en tournant autour de l'axe xy, est moindre que le volume du secteur sphérique engendré par le secteur AOB, volume qui l'enveloppe de toutes parts. A mesure qu'on double le nombre de côtés de la ligne brisée régulière inscrite, le volume engendré par le secteur polygonal correspondant augmente, parce que l'apothème OI augmente (278). Par suite, la différence des deux volumes diminue de plus en plus, et elle tend vers zéro puisque l'arc AB est la limite du contour de la ligne brisée régulière. Le secteur sphérique est donc la limite des volumes engendrés par les secteurs polygonaux réguliers obtenus, lorsqu'on double indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée inscrite. Mais le volume engendré par le secteur polygonal régulier aura constamment pour mesure le produit de la surface décrite par la ligne brisée régulière, par le tiers de son apothème (278). L'arc AB étant la limite de la ligne brisée régulière (125), la zone engendrée par cet arc sera la limite de la surface engendrée par la ligne brisée, et le rayon OA sera la limite de l'apothème OI. On aura donc (132)

$$\text{sect. sph. AOB} = \text{zone AB} \cdot \frac{\text{OA}}{3}.$$

Si l'on désigne par R le rayon de la sphère et par H la hauteur de la zone qui sert de base au secteur sphérique, c'est-à-dire la projection CD, on aura (272)

$$\text{zone AB} = 2\pi \text{RH},$$

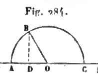
et, par suite,

$$\text{sect. sph. AOB} = \frac{2}{3}\pi \text{R}^2\text{H}.$$

On peut donc dire qu'*un secteur sphérique a pour mesure les deux tiers d'un grand cercle de la sphère, multipliés par la hauteur de la zone qui sert de base au secteur sphérique considéré.*

280. *Le volume d'une sphère est égal au produit de sa surface par le tiers du rayon (fig. 284).*

Fig. 284.



Soit la sphère engendrée par le demi-cercle ABC tournant autour de son diamètre AC. Le demi-cercle étant la somme des secteurs AOB, BOC, la sphère sera la somme des secteurs sphériques engendrés par ces secteurs circulaires. On a (279)

$$\text{sect. sph. AOB} = \text{zone AB} \cdot \frac{\text{OA}}{3},$$

$$\text{sect. sph. BOC} = \text{zone BC} \cdot \frac{\text{OA}}{3}.$$

Il en résulte

$$\text{sphère OA} = (\text{zone AB} + \text{zone BC}) \cdot \frac{OA}{3},$$

d'où

$$\text{sphère OA} = \text{surf. sph. OA} \cdot \frac{OA}{3}.$$

Si l'on désigne par R le rayon de la sphère, par D son diamètre, par V son volume, il viendra (273) :

$$V = 4\pi R^2 \cdot \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$V = \pi D^2 \cdot \frac{D}{6} = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

On voit immédiatement que *les volumes de deux sphères quelconques sont proportionnels aux cubes de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

281. Un *onglet sphérique* est la partie du volume de la sphère comprise entre deux demi grands cercles terminés au même diamètre. L'angle de ces deux demi grands cercles est *l'angle* de l'onglet, et le fuseau qui le termine lui sert de base. Il est évident que, sur deux sphères égales, des onglets qui ont des angles égaux sont égaux.

On prouverait, en suivant la même marche qu'au n° 274, que *le rapport d'un onglet à la sphère est égal au rapport de son angle à quatre angles droits.*

Il en résulte que *le volume d'un onglet est égal au produit du fuseau qui lui sert de base par le tiers du rayon de la sphère.* En appelant A le rapport de l'angle de l'onglet ou du fuseau à un angle droit, on aura

$$\text{fuseau A} = \pi R^2 \cdot A \quad \text{et, par suite,} \quad \text{onglet A} = \frac{\pi R^3}{3} \cdot A.$$

282. Le volume déterminé en joignant le centre de la sphère aux sommets d'un polygone sphérique convexe est une *pyramide polygonale sphérique.* Si le polygone est un triangle, on a une *pyramide triangulaire sphérique.* Trois grands cercles perpendiculaires deux à deux décomposent la sphère en huit pyramides sphériques *tri-rectangles* qui sont égales entre elles (269). Ainsi la *pyramide tri-rectangle est le huitième du volume de la sphère.*

En suivant la marche développée au n° 275, on prouvera que *deux pyramides triangulaires sphériques symétriques sont équivalentes.* Il suffira de remplacer chaque triangle sphérique par la pyramide sphérique correspondante.

En se reportant au n° 276 et en remplaçant à la fois les triangles sphériques et les fuseaux par les pyramides sphériques et les onglets correspondants, on démontrera facilement que *le volume d'une pyramide sphérique triangulaire est égal au produit du triangle qui lui sert de base par le tiers du rayon de la sphère.*

Si ABC désigne la base de la pyramide considérée, on aura (276)

$$ABC = (A + B + C - 2)\frac{\pi R^2}{2}.$$

Par suite, le volume V de la pyramide considérée sera

$$V = (A + B + C - 2)\frac{\pi R^3}{6}.$$

Le volume de la pyramide tri-rectangle est égal à

$$\frac{4}{3}\pi R^3 . \frac{1}{8},$$

c'est-à-dire à

$$\frac{\pi R^3}{6}.$$

On voit donc que, lorsqu'on prend la pyramide tri-rectangle pour unité de volume et l'angle droit pour unité d'angle, le volume de la pyramide triangulaire proposée est exprimé par le nombre $A + B + C - 2$.

Il résulte immédiatement de ce qui précède que *le volume d'une pyramide polygonale sphérique est égal au produit du polygone sphérique qui lui sert de base par le tiers du rayon de la sphère.*

Si ABCDE désigne la base de la pyramide considérée, on aura (276)

$$ABCDE = (S + 4 - 2n)\frac{\pi R^2}{2}.$$

Par suite, le volume V de la pyramide considérée sera

$$V = (S + 4 - 2n)\frac{\pi R^3}{6}.$$

Si l'on prend la pyramide trirectangle pour unité de volume, le volume de la pyramide polygonale proposée est donc exprimé par le nombre $S + 4 - 2n$.

Dans des sphères égales, deux pyramides sphériques quelconques sont proportionnelles à leurs bases.

283. *Le volume engendré par un segment circulaire tournant autour d'un diamètre qui lui est extérieur, est égal à la sixième partie du cylindre qui a pour rayon de sa base la corde du segment et pour hauteur la projection de cette corde sur l'axe (fig. 285).*

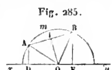


Fig. 285.

Le segment AmB est la différence du secteur circulaire AOB et du triangle isocèle AOB. La partie du volume de la sphère qu'il engendrera en tournant autour du diamètre xy, sera donc égale à la différence des volumes du secteur sphérique AOB et du triangle tournant AOB. On aura (279, 277)

$$\text{sect. sph. AOB} = \frac{2}{3}\pi \text{OA}^2.\text{DF},$$

$$\text{vol AOB} = \frac{2}{3}\pi \text{OI}^2.\text{DF},$$

OI étant la hauteur du triangle isocèle AOB. Il viendra alors

$$\text{vol. segment A}m\text{B} = \frac{2}{3}\pi\ (\text{OA}^2 - \text{OI}^2).\ \text{DF}.$$

Le triangle rectangle AOI donnant

$$\text{OA}^2 - \text{OI}^2 = \text{AI}^2 = \frac{\text{AB}^2}{4},$$

nous pourrons écrire

$$\text{vol. segment A}m\text{B} = \frac{1}{6}\pi.\text{AB}^2.\ \text{DF};$$

ce qui vérifie l'énoncé.

284. La portion du volume de la sphère comprise entre deux plans parallèles s'appelle *segment sphérique :* le segment a pour *bases* les cercles déterminés par les plans parallèles et pour *hauteur* la distance de ces plans. Si l'un des plans parallèles devient tangent à la sphère, le cercle correspondant se réduit à un point, et le segment sphérique n'a plus qu'une base.

Le volume d'un segment sphérique est égal à une sphère ayant pour diamètre la hauteur du segment, plus la demi-somme de deux cylindres ayant pour hauteur commune la hauteur du segment et pour bases respectives les bases du segment (fig. 286).

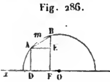


Fig. 286.

La figure mixtiligne DAmBF, en tournant autour du diamètre xy, engendre le segment sphérique. Ce segment est

donc la somme du volume engendré par le segment circulaire AmB et du tronc de cône engendré par le trapèze DABF. On a (283, 235)

$$\text{vol. segm. } AmB = \frac{1}{6}\pi AB \,.\, DF,$$

$$\text{vol } DABF = \frac{1}{3}\pi DF\,(BF^2 + AD^2 + BF.AD).$$

Il en résulte

$$\text{vol. segm. sph.} = \frac{1}{6}\pi DF\,(AB^2 + 2BF^2 + 2AD^2 + 2BF.AD).$$

Je mène AE parallèle à l'axe ou perpendiculaire à BF. Le triangle rectangle ABE donne alors

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 = DF^2 + (BF - AD)^2,$$

c'est-à-dire

$$AB^2 = DF^2 + BF^2 + AD^2 - 2BF.AD.$$

On peut ainsi éliminer AB, qui ne doit pas entrer dans l'expression du segment. En substituant et en simplifiant, il vient

$$\text{vol. segm. sph.} = \frac{1}{6}\pi DF\,(DF^2 + 3\,BF^2 + 3\,AD^2);$$

ce qu'on peut écrire

$$\text{vol. segm. sph.} = \frac{1}{6}\pi DF^3 + \frac{1}{2}(\pi BF^2.DF + \pi AD^2.DF),$$

de manière à justifier l'énoncé.

Si le segment sphérique n'a qu'une base, c'est-à-dire si AD devient nul, on trouve

$$\text{vol. segm. sph.} = \frac{1}{6}\pi DF^3 + \frac{1}{2}\pi BF^2.DF.$$

On peut, dans ce cas, exprimer le volume du segment en fonction du rayon de la sphère et de sa hauteur DF. Désignons par h cette hauteur et par R le rayon de la sphère. On aura (*fig.* 287)

Fig. 287

$$\text{vol. segm. sph.} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi BF^2.h.$$

Mais $BF^2 = h(2R - h)$. On pourra donc écrire

$$\text{vol. segm. sph.} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \pi R h^2 - \frac{1}{2}\pi h^3,$$

ce qui revient à

$$\text{vol. segm. sph.} = \pi R h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3,$$

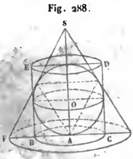
ou

$$\text{vol. segm. sph.} = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h).$$

On trouverait directement cette formule utile à retenir, en considérant le segment sphérique à une base comme la différence du secteur sphérique engendré par le secteur circulaire OBD et du cône engendré par le triangle rectangle BOF.

285. *La surface d'une sphère et les surfaces totales du cylindre droit et du cône équilatéral circonscrits à cette sphère sont proportionnelles aux nombres 4, 6 et 9; les volumes de ces trois corps sont proportionnels aux mêmes nombres* (*fig.* 288).

Fig. 288.



Soient le cercle OA, le carré et le triangle équilatéral circonscrits BCDE et SFG. Pendant que le cercle tournant autour de l'axe SA engendrera la sphère, le carré engendrera le cylindre circonscrit et le triangle équilatéral engendrera le cône équilatéral circonscrit à la sphère.

Si l'on désigne par R le rayon OA, on aura

$$\text{surf. sph.} = 4\pi R^2.$$

La base du cylindre circonscrit étant égale à un grand cercle de la sphère et sa hauteur étant le diamètre de la sphère, sa surface totale sera

$$2\pi R . 2R + 2\pi R^2.$$

On aura donc

$$\text{surf. tot. cyl.} = 6\pi R^2.$$

Le côté du cône circonscrit, qui est celui du triangle équilatéral circonscrit au cercle OA, est égal à $2R\sqrt{3}$; le rayon de sa base, moitié du côté du triangle équilatéral circonscrit, est égal à $R\sqrt{3}$ (128). On aura donc pour la surface totale du cône équilatéral circonscrit

$$\pi R\sqrt{3} . 2R\sqrt{3} + 3\pi R^2.$$

On pourra donc écrire

$$\text{surf. tot. cône} = 9\pi R^2.$$

Le théorème est donc vérifié quant aux surfaces.

Le volume de la sphère est égal à $\frac{4}{3}\pi R^3$, celui du cylindre

à $2\pi R^3$. La hauteur du cône, qui est celle du triangle équilatéral circonscrit au cercle OA, est égale à $3R$ (128); par suite, son volume aura pour expression $3\pi R^3$. Les volumes des trois corps seront donc proportionnels aux nombres $\frac{4}{3}$, 2 et 3, c'est-à-dire aux nombres 4, 6 et 9.

Si l'on remarque que 6 est la moyenne proportionnelle entre 4 et 9, on pourra énoncer les propositions suivantes : *La surface totale du cylindre droit circonscrit à la sphère est la moyenne proportionnelle de la surface sphérique et de la surface totale du cône équilatéral circonscrit ; le volume du cylindre droit circonscrit à la sphère est la moyenne proportionnelle des volumes de la sphère et du cône équilatéral circonscrit.*

286. Le théorème qu'on vient d'établir n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général.

Les volumes de deux polyèdres circonscrits à la même sphère ou à des sphères égales sont proportionnels à leurs surfaces.

En effet, si l'on décompose les polyèdres donnés en pyramides en prenant pour sommets des pyramides appartenant à l'un et à l'autre polyèdre les centres des deux sphères, chaque polyèdre aura pour mesure de son volume sa surface multipliée par le tiers du rayon de la sphère (226, 261). Si l'on désigne par V et v les volumes des deux polyèdres, par S et s leurs surfaces, par R le rayon de la sphère, on aura donc

$$V = S \cdot \frac{R}{3}, \quad v = s \cdot \frac{R}{3};$$

et par suite

$$\frac{V}{v} = \frac{S}{s}.$$

Applications.

287. *Inscrire dans une sphère un cône dont la surface convexe soit équivalente à celle de la calotte sphérique terminée au même cercle* (*fig.* 289).

Fig. 289.



Je désigne par x la hauteur AS du cône et par R le rayon de la sphère. La hauteur AD de la calotte sphérique aura pour expression $2R - x$. L'énoncé du problème exige qu'on ait

$$\pi . AB . SB = 2\pi R (2R - x),$$

d'où

$$\overline{AB}^2 . \overline{SB}^2 = 4 R^2 (2R - x)^2.$$

Mais

$$AB^2 = x(2R - x) \quad \text{et} \quad SB^2 = 2Rx.$$

En substituant, il viendra

$$2Rx^2(2R - x) = 4R^2(2R - x)^2,$$

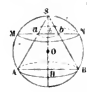
d'où en supprimant le facteur commun $2R(2R - x)$ et en écartant la solution $x = 2R$ qui convient en ce sens que le cône et la calotte cessent en même temps d'exister,

$$x^2 = 2R(2R - x).$$

Cette équation prouve immédiatement que l'inconnue x est le plus grand segment du diamètre divisé en moyenne et extrême (120). Deux zones étant proportionnelles à leurs hauteurs, on voit que le plan de la base du cône cherché partagera aussi la surface de la sphère en moyenne et extrême.

288. *Un cône équilatéral étant inscrit dans une sphère, chercher entre quelles limites peut varier la différence des sections déterminées dans ces deux corps par un plan parallèle à la base du cône* (*fig.* 290).

Fig. 290.



Le cône étant équilatéral, sa hauteur SH sera égale à $\frac{3R}{2}$, et le rayon de sa base, moitié du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle qui engendre la sphère, sera égal à $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ (128), R désignant le rayon de la sphère donnée.

A une distance $Sh = x$ du sommet S, je mène un plan sécant parallèle à la base du cône. La section faite dans la sphère aura pour expression, $\pi . Mh^2$, celle faite dans le cône aura pour expression $\pi . ah^2$. On a d'ailleurs, d'après la figure,

$$Mh^2 = x(2R - x) \quad \text{et} \quad \frac{ah}{AH} = \frac{Sh}{SH},$$

c'est-à-dire

$$\frac{ah}{\frac{R}{2}\sqrt{3}} = \frac{x}{\frac{3R}{2}}, \quad \text{d'où} \quad ah^2 = \frac{x^2}{3}.$$

La différence des deux sections, que je désignerai par D, sera donc

$$\pi x(2R - x) - \frac{\pi x^2}{3}.$$

On aura, par conséquent,

$$D = 2\pi . x\left(R - \frac{2x}{3}\right).$$

Cette différence s'annule pour $x = 0$ et pour $x = \frac{3R}{2}$. En effet, dans le premier cas, le plan sécant est tangent à la sphère au point S; dans le second, il se confond avec la base du cône. Entre ces deux valeurs égales à zéro, D doit nécessairement passer par un *maximum*, c'est-à-dire que le rayon de la section faite dans la sphère croissant d'abord plus rapidement que le rayon de la section faite dans le cône, D commence par croître à partir de zéro, pour diminuer ensuite et revenir à zéro.

Pour trouver le maximum de D, nous poserons $\frac{2x}{3} = y$, d'où $x = \frac{3y}{2}$. En substituant, il viendra

$$D = 3\pi . y(R - y).$$

Le maximum de D ne dépend que de celui du produit $y(R - y)$, et la somme de ces deux facteurs étant égale à la constante R, leur produit sera maximum lorsqu'on aura $y = \frac{R}{2}$ (*Alg. élém.*, 219), c'est-à-dire $x = \frac{3R}{4}$. D est donc maximum, lorsque le plan sécant passe par le milieu de la hauteur du cône SAB, et cette valeur maximum de D est égale aux $\frac{3}{4}$ de l'aire d'un grand cercle. Lorsque le plan sécant passe par le centre de la sphère, D est égale aux $\frac{2}{3}$ de l'aire d'un grand cercle.

289. *Couper une sphère par un plan de manière que le segment sphérique déterminé par ce plan et le secteur sphérique ayant pour base la calotte qui termine le segment, soient dans un rapport donné* (*fig.* 291).

Fig. 291.

Soient x la hauteur AI du segment, c'est-à-dire la distance du plan sécant au point A, et R le rayon de la sphère. Le volume du secteur aura pour expression $\frac{2}{3}\pi R^2 x$, le volume du segment sera $\frac{1}{3}\pi x^2(3R - x)$. Si le rapport du secteur au seg-

ment est représenté par $\frac{p}{q}$, on devra avoir

$$\frac{\frac{2}{3}\pi R^2 x}{\frac{1}{3}\pi x^2 (3R - x)} = \frac{p}{q}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2R^2}{x(3R - x)} = \frac{p}{q}.$$

En chassant les dénominateurs, on arrive à l'équation du second degré

$$px^2 - 3pRx + 2qR^2 = 0,$$

et l'on en déduit

$$x = \frac{3pR \pm \sqrt{9p^2R^2 - 8pqR}}{2p}.$$

On peut mettre cette valeur sous la forme

$$x = \frac{R\left(3 \pm \sqrt{9 - 8\frac{q}{p}}\right)}{2},$$

en la divisant haut et bas par p.

Pour que la valeur de x soit réelle, il faut qu'on ait $9 - 8\frac{q}{p} > 0$, c'est-à-dire $\frac{p}{q} > \frac{8}{9}$.

Si l'on suppose $\frac{p}{q} = 1$, il vient

$$x = \frac{R(3 \pm 1)}{2},$$

c'est-à-dire

$$x' = 2R \quad \text{et} \quad x'' = R.$$

Dans le premier cas, le segment et le secteur se confondent avec la sphère ; dans le second, avec la moitié de la sphère.

Si l'on suppose $\frac{p}{q} = 2$, c'est-à-dire si le plan sécant divise le secteur sphérique en deux parties équivalentes, on a

$$x = \frac{R(3 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

La première valeur surpasse le diamètre de la sphère et doit être rejetée. La seconde valeur $x = \frac{R(3 - \sqrt{5})}{2}$ est seule admissible et représente le plus petit segment du rayon divisé en moyenne et extrême (120).

QUESTIONS PROPOSÉES.

CHAPITRE I. — 1° Le volume d'un prisme triangulaire est égal à la moitié du produit d'une face latérale quelconque par la distance de cette face à l'arête opposée.

2° Si sur trois droites parallèles et non situées dans un même plan on prend des longueurs égales à une droite donnée, le volume du prisme triangulaire ainsi formé sera constant, quelles que soient les positions respectives des arêtes.

3° Un bassin a pour fond horizontal un octogone régulier ayant 10 mètres de côté, la hauteur de l'eau dans ce bassin est $0^M,75$. On demande à l'unité près le volume d'eau contenu dans le bassin. (361^{Mc}.)

4° Trouver les dimensions d'un hectolitre, sachant que c'est un cylindre dont la hauteur est égale au diamètre de la base. ($H = 5^{dM},0308$.)

5° Un tuyau cylindrique en bronze a 1^M de longueur, son diamètre intérieur est égal à $0^M,36$ et son épaisseur à $0^M,08$. La densité du bronze est 8,46. On demande le poids du tuyau vide, le poids du tuyau plein d'eau à 4°. ($877^{kg},071$; $972^{kg},497$.)

CHAPITRE II. — 1° Diviser la surface latérale d'un cône droit à base circulaire en deux parties équivalentes par un plan parallèle à sa base.

2° Si l'on fait tourner successivement un triangle rectangle autour de chacun des côtés de l'angle droit, les volumes des deux cônes engendrés sont en raison inverse de leurs axes.

3° Le côté a d'un triangle équilatéral étant donné, calculer la surface totale et le volume du cône engendré par la rotation de ce triangle autour de sa hauteur. Chercher à 1^{cM} près pour quelle valeur de a la surface totale est égale à 1^{Mq}, pour quelle valeur de a le volume est égal à 1^{Mc}. ($0^M,61$; $1^M,64$.)

CHAPITRE III. — 1° Un réservoir a la forme d'un tronc de cône. La base inférieure a 5^M de rayon, le niveau supérieur de l'eau contenue dans ce réservoir occupe une section de 8^M de rayon. La hauteur de l'eau est de $4^M,25$. On laisse tomber dans le réservoir un bloc cubique ayant $1^M,4$ de côté, et l'on demande à quelle hauteur le niveau de l'eau montera.

2° Un tombereau a les dimensions suivantes : les deux dimensions du fond sont $0^M,52$ et $0^M,86$; les deux dimensions de la section supérieure sont 0,82 et 0,88. La profondeur du tombereau est égale à $0^M,75$. On suppose qu'il est complétement rempli de terre, et l'on demande le poids de cette terre en supposant sa densité représentée par 2,68. ($1172^{kg},634$.)

CHAPITRE V. — 1° Chercher si le tétraèdre formé en menant par les sommets d'un tétraèdre donné des plans parallèles aux faces opposées est semblable à ce tétraèdre.

2° Calculer à 1 centimètre près les dimensions d'un parallélipipède rectangle sachant qu'elles sont proportionnelles à des nombres donnés et connaissant le volume du parallélipipède.

3° On donne trois cubes : les côtés respectifs de ces cubes sont 3^M, 4^M, 5^M. On demande le côté d'un quatrième cube équivalent à la somme des trois premiers.

4° La hauteur H et le rayon R de la base d'un cône sont donnés ;

chercher à quelle distance de la base il faut mener un plan parallèle à cette base, pour que le volume V du tronc de cône déterminé ait une valeur donnée. On appliquera la formule trouvée, en faisant $H = 10^{M}$, $R = 5^{M}$, $V = 20^{Mc}$. (0,2614.)

CHAPITRE VI. — 1° Si l'on inscrit dans un demi-cercle un demi-polygone régulier d'un nombre pair de côtés et qu'on lui circonscrive un demi-polygone semblable, la surface de la sphère engendrée par le demi-cercle en tournant autour de son diamètre sera la moyenne proportionnelle des surfaces engendrées par les polygones.

2° Circonscrire à une sphère un cône droit dont la surface convexe soit le double de la base.

3° Couper une sphère par un plan tel, que la section soit équivalente à la différence des deux zones déterminées par le plan sécant.

4° Inscrire dans une sphère un cône dont la base soit équivalente à la moitié de la surface convexe.

5° Calculer l'aire d'un triangle sphérique ABC, sachant que le rayon de la sphère est égal à $1^{M},2$ et que les angles A, B, C, sont respectivement égaux à 78° 15', 62° 45', 72° 40'. (0^{Mq},8440.)

6° Si l'on joint par une ligne droite les milieux de deux côtés d'un triangle, et si on le fait tourner autour du troisième côté, quel sera le rapport des volumes engendrés par les deux parties de ce triangle? (1.)

7° Si l'on fait successivement tourner un parallélogramme autour de deux côtés adjacents, les volumes engendrés seront en raison inverse de ces côtés.

8° Trouver le volume engendré par un demi-hexagone régulier ayant 4^{M} de côté, en tournant autour du diamètre du cercle circonscrit. (201^{Mc},062.)

9° Trouver le volume engendré par un hexagone régulier, en tournant autour d'un de ses côtés a (*).

(*) Ici se termine la Géométrie élémentaire proprement dite. Quelques propositions de géométrie dans l'espace ont été laissées de côté à dessein, pour être reportées, *en géométrie descriptive*, au lieu même où leur application est immédiate.



COMPLÉMENT DE GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES GÉNÉRAUX RELATIFS A LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES.

1. La résolution des problèmes est extrêmement importante. C'est aux efforts tentés pour résoudre certaines questions, qu'on doit la découverte successive des principales branches des Mathématiques. Chaque exemple particulier d'espèce différente oblige ou conduit à créer la théorie générale correspondante ; et c'est en *analysant* avec soin la solution trouvée, qu'on parvient à la connaissance de cette théorie.

2. Pour *démontrer* une proposition de géométrie, on peut employer deux méthodes différentes : l'*analyse* et la *synthèse;* mais, pour *trouver* la démonstration elle-même, c'est par l'analyse seule qu'on peut procéder.

Dans la méthode analytique, on prend pour point de départ *les relations données, l'hypothèse faite* et, en passant par une suite de déductions évidentes ou déjà démontrées, on parvient de proche en proche jusqu'à *la conclusion cherchée.*

Dans la méthode synthétique, on adopte une marche inverse. *On énonce directement la règle à laquelle l'analyse conduit,* et l'on prouve par une série de raisonnements inattaquables, qu'en suivant cette règle les conditions de l'énoncé sont bien remplies.

On voit que *la synthèse* n'est en quelque sorte que *la vérification de l'analyse.* L'analyse guide les inventeurs, la synthèse leur prouve l'exactitude des résultats auxquels ils sont parvenus.

Pour donner un exemple très-simple des deux modes de démonstration, supposons qu'on veuille *inscrire un hexagone régulier dans une circonférence* (*fig.* 1).

Fig. 1.

Analyse : Soit AB le côté de l'hexagone régulier inscrit, soit O son centre. L'angle AOB sera le sixième de quatre droits ou égal à $\frac{2}{3}$ d'angle droit. D'ailleurs, le triangle AOB étant isocèle, ses angles à la base auront chacun pour valeur $\frac{2-\frac{2}{3}}{2}$ ou $\frac{2}{3}$ d'angle droit. Par suite, le triangle AOB est équiangle et équilatéral. Le côté AB est donc égal au rayon OA du cercle circonscrit, d'où la solution connue.

Synthèse : Je dis que si je prends la corde AB égale au rayon OA, AB représentera le côté de l'hexagone régulier inscrit. En effet, le triangle AOB sera alors équilatéral et équiangle. L'angle AOB sera donc égal à $\frac{2}{3}$ d'angle

droit, c'est-à-dire que cet angle sera bien l'angle au centre de l'hexagone régulier inscrit.

En résumé, *l'analyse suppose le problème resolu et conduit aux conditions nécessaires pour qu'il le soit; la synthèse énonce immédiatement la solution du problème et prouve ensuite que cette solution satisfait à l'énoncé.*

3. Pour résoudre les problèmes de géométrie, il est impossible d'indiquer une méthode générale et certaine. La nature des problèmes qu'on peut poser est trop variable, pour que la solution puisse à coup sûr être obtenue en suivant une marche déterminée. Cependant il existe des méthodes particulières qui s'appliquent plus directement à certaines classes de questions; et si l'on sait discerner à quelle catégorie appartient le problème dont on s'occupe, on a déjà fait un grand pas vers la solution, puisque la manière dont les recherches doivent être dirigées se trouve connue d'avance.

Nous allons essayer d'indiquer les plus importantes de ces méthodes spéciales, en les éclairant par des exemples. On consultera avec fruit sur ce sujet les ouvrages suivants : *Examen des différentes Méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie*; par G. Lamé. 1818. — *Des Méthodes en Géométrie*, par Paul Serret. 1855 (*).

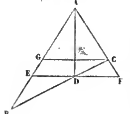
4. *Méthode des substitutions.* — Dans cette méthode, on diminue de proche en proche la difficulté, en faisant successivement dépendre la solution cherchée de celle de problèmes de plus en plus simples. Cette méthode est, par sa nature même, extrêmement féconde, et elle se confond en quelque sorte avec *l'analyse*. Seulement, dans l'analyse proprement dite, on s'appuie sur des propriétés déjà connues, au lieu de passer *d'un premier inconnu à un inconnu plus simple*. Cette méthode est tout à fait comparable à la marche suivie en Algèbre pour la résolution des équations.

EXEMPLES :

1° *Étant donnés deux côtés d'un triangle et la longueur de la bissectrice de l'angle compris entre ces deux côtés, construire le triangle* (*fig.* 2).

Je suppose le problème résolu, soit ABC *le triangle demandé :* AB et AC sont les deux côtés donnés, AD est la bissectrice de l'angle A. *Si l'on pouvait trouver l'angle* A, *on rentrerait dans un cas connu* (*Géom.* 71).

Fig. 2.



Je mène par le sommet C une perpendiculaire CG à AD; le triangle ACG sera nécessairement isocèle, et l'on aura

$$BG = AB - AC.$$

Par suite, BG sera déterminée.

Je mène de même par le point D une perpendiculaire EF à AD, le triangle AEF sera aussi isocèle, et les parallèles ED et GC per-

(*) Chez Mallet-Bachelier, Paris.

mettront de poser

$$\frac{BE}{EG} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC},$$

puisque AD est la bissectrice de l'angle BAC. Le rapport $\frac{BE}{EG}$ sera donc déterminé à son tour, et l'on pourra, connaissant déjà BG, marquer le point E.

La question sera ramenée alors à construire le triangle isocèle AEF, ce qui sera facile, cette construction dépendant elle-même de celle du triangle rectangle AED dans lequel on connaît l'hypoténuse AE et l'un des côtés de l'angle droit AD. Le triangle AED étant construit, on connaîtra l'angle $\frac{1}{2}$ A et, par conséquent, l'angle A.

Remarquons que le côté AC entre pour quelque chose dans la solution, puisque $BG = AB - AC$. C'est là un point à noter : *la marche suivie ne peut être convenable qu'autant que les différents éléments donnés viennent tour à tour jouer leur rôle dans la solution.*

2° *Par trois points donnés, faire passer les côtés d'un triangle équilatéral, de manière que sa surface soit un maximum* (*fig.* 3).

Fig. 3.



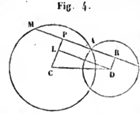
Je suppose le problème résolu. Soient A, B, C, les trois points donnés, soit MNP un triangle équilatéral circonscrit au triangle ABC. Si l'on décrit sur AB et sur AC deux segments capables de 60°, les sommets M et N appartiendront nécessairement aux arcs obtenus, puisque les angles d'un triangle équilatéral sont égaux à 60°.

Il suffira donc, pour obtenir un triangle équilatéral *quelconque* dont les côtés passent respectivement par A, B, C, de décrire sur AB et sur AC deux segments capables de 60°, et de mener par le point A commun à ces deux segments une sécante MAN. En joignant ensuite MB et NC et en prolongeant ces lignes jusqu'à leur point de rencontre P, on obtiendra le triangle équilatéral MNP.

La surface de ce triangle équilatéral en fonction de son côté MN est $\frac{MN^2\sqrt{3}}{4}$. Pour que cette surface soit un maximum, il faut donc que MN soit un maximum.

La question est ainsi ramenée à mener, par un point commun à deux circonférences, une sécante dont la longueur interceptée soit un maximum (*fig.* 4).

Fig. 4.



Soient les circonférences C et D qui se coupent en A, et soit une sécante *quelconque* MAN. Si l'on abaisse des centres C et D sur cette sécante les perpendiculaires CP et DR, la distance PR sera la moitié de la sécante MAN. Menons DL parallèle à MAN. Dans le triangle rectangle CDL, on aura toujours DL ou $PR < CD$. CD représentera donc le maximum de PR, 2 CD celui de MAN, et ce maximum sera atteint lorsque la sécante MAN deviendra parallèle à la ligne qui joint les centres des deux circonférences.

5. *Méthode par symétrie.* — Cette méthode consiste à donner à une partie de la figure considérée une position symétrique (*Géom.*, 239) de celle qu'elle occupait d'abord. Si l'on choisit convenablement l'axe ou le plan de symétrie, les éléments qu'on doit comparer pourront n'être pas altérés en grandeur, et leur changement de position pourra rendre la relation cherchée, sinon intuitive, du moins plus facile à trouver.

EXEMPLES.

1° *Étant donnés deux points* A *et* B *et une droite* XY, *trouver sur cette droite un point* M *tel, que la somme* AM + MB *soit un minimum* (*fig.* 5).

Fig. 5.

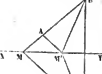
Si les deux points A et B étaient de côtés différents par rapport à XY, on résoudrait immédiatement la question en menant la droite AB. Cette remarque conduit à déterminer le point B', symétrique du point B par rapport à XY, et à joindre AB'. En effet, la ligne XY étant perpendiculaire sur le milieu de BB', tous ses points seront à égale distance des points B et B', et il suffira de chercher le point M de XY pour lequel AM + MB' est un minimum.

Il est facile de vérifier cette construction. Pour un autre point quelconque M' pris sur XY, on a $AM'+M'B = AM'+M'B'$, et le triangle AM'B' donne $AB' < AM'+M'B'$, c'est-à-dire $AM + MB < AM' + M'B$.

Il est bon de noter que les angles BMY et B'MY étant égaux, il en sera de même des angles AMX et BMY : *les chemins cherchés sont donc également inclinés sur la droite* XY. Toutes les fois qu'on a à considérer un maximum ou un minimum, on peut s'attendre qu'une propriété particulière y répondra.

On pourrait supposer les points A *et* B *situés de côtés différents par rapport à* XY, *et demander que la différence* BM — AM *fût un maximum* (*fig.* 6).

Fig. 6.



S'il s'agissait de deux points A et B' situés d'un même côté de XY, on prolongerait AB' jusqu'au point de rencontre M de cette droite avec XY : le point M serait le point cherché. Pour tout autre point M', le triangle AM'B' donnerait en effet

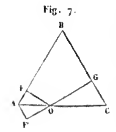
$$B'M' - AM' < AB',$$

c'est-à-dire

$$B'M' - AM' < B'M - AM.$$

Pour rentrer dans ce cas, on déterminera donc le point B' symétrique du point B par rapport à XY, et l'on mènera ensuite la ligne B'AM.

Fig. 7.



2° *Dans un triangle isocèle* ABC, *la somme des distances d'un point quelconque de la base* AC *aux deux côtés est constante* (*fig.* 7).

Soient le point O et les perpendiculaires OF et OG abaissées de ce point sur les deux côtés. Les angles en A et en C étant égaux et les triangles AOF et GOC étant rectangles, les angles FOA et GOC

seront égaux. Il en résulte que le point F', *symétrique* du point F, se trouvera sur le prolongement de OG. On aura d'ailleurs F'G = OF' + OG = OF + OG. De plus, l'angle FAO étant égal à l'angle OAF', AF' est nécessairement parallèle au côté BC, et la somme OF + OG = F'G n'est autre chose que la *hauteur* qui correspond au sommet A ou au sommet C. La proposition est donc démontrée.

On voit facilement quelle modification doit subir l'énoncé, lorsque le point O est pris sur le prolongement de la base.

6. *Méthode des figures semblables*. — Dans cette méthode, on cherche, en se servant des éléments donnés, à construire une figure semblable à la figure demandée. En comparant ensuite les éléments connus dans les deux figures, on arrive à la solution, en passant de la figure construite à la figure à construire

EXEMPLES.

1° *Construire un carré, connaissant la différence qui existe entre sa diagonale* D *et son coté* C.

Si je construis un carré quelconque, ayant D' pour diagonale et C' pour côté, ce carré sera semblable au carré cherché. On pourra donc poser

$$\frac{C}{C'} = \frac{D}{D'},$$

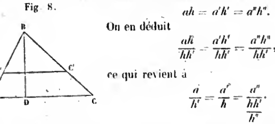
d'où

$$\frac{C}{C'} = \frac{D-C}{D'-C'} \quad \text{et} \quad C = \frac{C'(D-C)}{D'-C'}.$$

Il restera à former une quatrième proportionnelle aux longueurs D' — C', D — C, et C'.

2° *On donne les trois hauteurs d'un triangle* ABC, *construire ce triangle* (*fig.* 8).

Je désigne par h, h', h'', les trois hauteurs données, par a, a', a'', les trois côtés correspondants du triangle cherché. D'après l'expression de l'aire d'un triangle, on aura



$$ah = a'h' = a''h''.$$

On en déduit

$$\frac{ah}{hh'} = \frac{a'h'}{hh'} = \frac{a''h''}{hh'},$$

ce qui revient à

$$\frac{a}{h'} = \frac{a'}{h} = \frac{a''}{\frac{hh'}{h''}}.$$

Lés côtés a, a', a'', sont donc proportionnels aux longueurs h', h, $\frac{hh'}{h''}$.

Avec ces dernières longueurs comme côtés, on construira un triangle A'BC' qui sera semblable au triangle cherché (*Géom.*, 95). Si l'on a A'C' = h', A'C' sera l'homologue du côté a qui correspond à la hauteur h. Abaissant alors du sommet B une perpendiculaire sur A'C' et prenant sur cette perpendiculaire BD = h, puis menant par le point D une parallèle AC à A'C', le triangle ABC sera le triangle demandé.

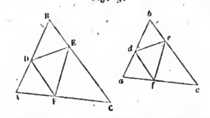
7. L'emploi des figures semblables se retrouve encore dans une autre méthode connue sous le nom de *Méthode par inversion*. Dans cette méthode, on renverse la question, c'est-à-dire qu'on considère un problème auxiliaire dans lequel les données de la question directe deviennent les inconnues, et réciproquement. En résolvant ce problème, on obtient une figure semblable à la figure cherchée, et toute difficulté se trouve levée. Il n'est pas besoin d'ajouter que le problème auxiliaire doit être plus simple que le problème direct, et qu'il doit exister entre eux une parfaite corrélation.

EXEMPLES.

1° *Inscrire dans un triangle donné* ABC *un triangle semblable à un autre triangle donné* def (*fig.* 9).

On *circonscrira* au triangle def un triangle semblable au triangle ABC. Pour cela, il suffira de mener par les sommets d, e, f, des parallèles aux côtés du triangle ABC. La figure formée du triangle abc ainsi obtenu et du triangle def sera alors semblable à la figure que l'on cherche ; et le sommet inconnu D du triangle DEF, inscrit dans le triangle ABC et semblable au triangle def, partagera AB comme d partage ab. Le point D étant déterminé, la question sera résolue, puisque les côtés du trianglo DEF sont connus de direction.

Fig. 9.



2° *Inscrire un carré dans un demi-cercle* (*fig.* 10).

Nous résoudrons d'abord la question inverse : *circonscrire un demi-cercle à un carré*. Soit le carré ABCD. Nous prendrons le milieu O de sa base AB, nous joindrons OC : OC sera le rayon cherché. Le cercle décrit avec ce rayon passera en effet par les sommets C et D, et le côté AB prolongé sera un de ses diamètres. On aura d'ailleurs

Fig. 10.

$$OC^2 = BC^2 + OB^2 = BC^2 + \frac{BC^2}{4} = \frac{5\,BC^2}{4},$$

d'où

$$OC = \frac{BC\sqrt{5}}{2}.$$

La figure cherchée est semblable à la figure qu'on vient de construire. Si R est le rayon du demi-cercle donné et x le côté du carré demandé, on devra donc avoir aussi

$$R = \frac{x\sqrt{5}}{2}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2R}{\sqrt{5}},$$

valeur qu'il sera facile de déduire des éléments connus. L'expression trouvée revient à la proportion suivante

$$\frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{R}{\frac{x}{2}}.$$

On mènera donc au point F la tangente FG égale au diamètre EF, et l'on joindra OG. Le point d'intersection C de OG avec la circonférence sera l'un des sommets du carré ABCD. Il restera à tracer CD parallèlement à EF et à abaisser des points C et D, sur ce diamètre, les perpendiculaires CB et DA. On aura bien

$$\frac{OG}{OF} = \frac{OC}{OB},$$

c'est-à-dire

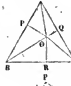
$$\frac{R\sqrt{5}}{R} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{R}{OB}.$$

8. *Méthode des relations auxiliaires.* — Nous désignons ainsi la méthode qui consiste à faire intervenir des surfaces ou des volumes pour trouver une relation entre lignes, des lignes ou des volumes pour trouver une relation entre surfaces, des lignes ou des surfaces pour trouver une relation entre volumes. La géométrie élémentaire présente un grand nombre d'applications de cette méthode.

EXEMPLES.

1° *La somme des perpendiculaires abaissées d'un point* O *pris dans l'intérieur d'un triangle équilatéral* ABC, *sur ses trois côtés, est constante* (*fig.* 11).


Fig 11.

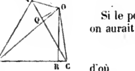


Si l'on joint le point O aux trois sommets, la somme des triangles formés constituera le triangle équilatéral, et l'on aura, en désignant par h sa hauteur et par c son côté,

$$\frac{c}{2}(OP + OQ + OR) = \frac{ch}{2},$$

d'où, pour la somme des perpendiculaires,

$$OP + OQ + OR = h.$$



Si le point O était *extérieur* au triangle proposé, on aurait

$$\frac{c}{2}(OP - OQ + OR) = \frac{ch}{2},$$

d'où

$$OP - OQ + OR = h.$$

Dans ce cas, c'est la différence entre la somme de deux des perpendiculaires et la troisième qui serait égale à la constante h.

2° *Soit un polygone régulier de n côtés : la somme des distances d'un point pris dans l'intérieur du polygone à tous ses côtés est égale à n fois son apothème.*

En effet, désignons par c le côté du polygone et par p, p', p'', etc., les perpendiculaires abaissées du point intérieur sur les différents côtés. La somme des triangles formés en joignant ce point à tous les sommets du polygone en représentera l'aire, qui sera exprimée par

$$\frac{c}{2}(p + p' + p'' + \ldots).$$

D'autre part, a étant l'apothème, cette aire a aussi pour expression $\frac{na}{2}$.

En égalant les deux valeurs, il restera bien

$$p + p' + p'' + \ldots = na.$$

Si le point donné O était choisi *extérieurement*, l'aire du polygone serait la différence de deux sommes de triangles ayant pour sommet commun le point O et, pour bases, les premiers les côtés du polygone appartenant à sa partie *concave vers* O, les seconds les côtés du polygone appartenant à sa partie *convexe vers* O. La différence des deux sommes de perpendiculaires correspondantes serait encore égale à na.

Si le polygone proposé n'était pas régulier, mais avait toujours ses côtés égaux, on aurait, en désignant son aire par S,

$$\frac{c}{2}(p + p' + p'' + \ldots) = S,$$

d'où

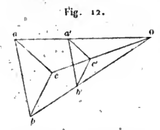
$$p + p' + p'' + \ldots = \frac{2S}{c}.$$

9. *Méthode par projection.* — Pour appliquer cette méthode, on regarde la figure plane qui répond au problème proposé, comme la projection d'une certaine figure de l'espace; et ce rapprochement permet d'arriver rapidement à la solution de la question, lorsque la figure de l'espace a été convenablement choisie.

EXEMPLE.

Étant données deux droites dont le point de concours est inaccessible ou inconnu, mener par un point donné c une troisième droite dont la direction passe par ce point de concours (*fig.* 12).

Fig. 12.



Supposons le problème résolu, et soit O le point commun aux deux premières droites aO et bO et à la troisième droite demandée cO. On pourra regarder la figure plane Oabc comme la projection d'une pyramide triangulaire qui aurait pour base le triangle abc et dont le sommet serait projeté en O: les arêtes latérales de cette pyramide seront alors représentées en projection par les lignes aO, bO, cO. Ceci posé, si l'on coupe la pyramide par un plan parallèle à la base, on déterminera un triangle semblable au triangle abc. Ce triangle se projettera en véritable grandeur sur le plan abc et, pour figurer sa projection, comme la section est faite à une hauteur indéterminée, il suffira de mener, dans la partie des droites aO et bO qui est accessible, $a'b'$ parallèle à ab, puis $b'c'$ et $a'c'$ parallèles à bc et à ac. Ces deux dernières lignes se couperont en un point c' appartenant nécessairement à la projection cO, qui dès lors sera déterminée de direction.

10. Nous pouvons citer encore la *Méthode de réduction à l'absurde* et la *Méthode des limites*.

La première consiste, lorsqu'on veut démontrer une certaine égalité, à

supposer qu'elle n'a pas lieu et à prouver que l'inégalité admise entraîne une absurdité manifeste ou conduit à des conséquences que l'énoncé repousse. C'est en suivant cette méthode que nous avons établi (*Géom.*, 223) que deux pyramides de bases équivalentes et de hauteurs égales, étaient équivalentes.

La méthode des limites nous a constamment servi en géométrie pour étendre aux lignes courbes les théorèmes applicables aux lignes brisées. Cette méthode consiste à substituer à des grandeurs fixes A, B, C, ... des grandeurs variables a, b, c,..., ayant respectivement A, B, C,... pour limites. Si l'on trouve alors que les variables a, b, c,..., sont liées dans tous leurs états de grandeur par une relation constante

$$f(a, b, c, \ldots) = 0,$$

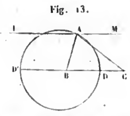
cette relation constante s'appliquera immédiatement aux limites A, B, C,... C'est ainsi que de l'aire d'un polygone régulier constamment égale au produit de son périmètre par la moitié de l'apothème, nous avons déduit la mesure du cercle égale à $2\pi R \times \frac{R}{2}$, etc.

11. *Méthode des Lieux géométriques.* — Cette méthode est extrêmement féconde. Pour fixer la position d'un point, il faut deux éléments, *deux conditions*. Si le problème proposé consiste dans la détermination d'un point, il faudra faire abstraction de l'une des conditions auxquelles ce point doit satisfaire. L'autre condition correspondra à un certain lieu géométrique sur lequel devra nécessairement se trouver le point inconnu. Si l'on fait ensuite abstraction de la condition mise ainsi en évidence, la condition laissée de côté donnera à son tour un autre lieu géométrique du point cherché, qui sera à la rencontre des deux lieux obtenus.

EXEMPLES.

1° *Construire un triangle, connaissant l'un de ses côtés, la hauteur correspondante et le rapport des deux autres côtés* (*fig.* 13).

Fig. 13.



Si BC est le côté donné, il s'agit de déterminer la position du troisième sommet A d'après les deux autres conditions de l'énoncé. La hauteur h du sommet A au-dessus du côté BC étant connue, si l'on mène à BC la parallèle LM de manière que la distance des deux parallèles soit égale à h, LM sera un premier lieu géométrique du sommet A. Le rapport des deux côtés AB et AC étant déterminé, le sommet A fera aussi partie du lieu géométrique des points dont les distances aux points B et C sont dans un rapport constant égal au rapport donné. On construira donc les deux points D et D' qui, situés sur BC, appartiennent à ce second lieu géométrique, on décrira sur DD' comme diamètre une circonférence (*Géom.*, 91), et le sommet A sera à l'intersection de cette circonférence avec la parallèle LM. Il y aura deux solutions ou une seule, suivant que LM coupera ou touchera la circonférence. Le problème sera impossible si LM ne rencontre pas la circonférence.

2° *Construire un triangle dans lequel on connaît un côté, l'angle opposé et la somme ou la différence des deux autres côtés* (*fig.* 14).

Fig. 14.

Si BC est le côté donné, l'angle opposé A étant connu, le troisième sommet A du triangle cherché appartiendra au segment capable de l'angle A décrit sur le côté BC. Il faut trouver un second lieu géométrique du sommet A.

Pour cela, je remarque que, le problème étant supposé résolu, si l'on porte sur le plus grand côté AB ou sur son prolongement une longueur AD' ou AD égale au second côté AC, les deux triangles CAD', CAD, seront isocèles. Si l'on donne la somme AB + AC, la longueur BD sera connue; si l'on donne la différence AB — AC, c'est la longueur BD' qui sera déterminée.

Dans le premier cas, l'angle D du triangle CAD sera moitié de l'angle extérieur A. Dès lors le point D se trouvera à la rencontre de la circonférence décrite du point B comme centre avec BD pour rayon et du segment capable de l'angle $\frac{A}{2}$ décrit sur BC. Le point A se trouvera ensuite à la rencontre de la droite BD et du premier segment capable de l'angle A décrit sur BC.

Dans le second cas, l'angle extérieur D' sera égal à la somme des angles A et C du triangle isocèle CAD', c'est-à-dire à $A + \frac{180^\circ - A}{2}$ ou à $\frac{A}{2} + 90^\circ$. Le point D' se trouvera donc à la rencontre de la circonférence décrite du point B comme centre avec BD' pour rayon et du segment capable de l'angle $\frac{A}{2} + 90^\circ$ décrit sur BC. Le point A se trouvera ensuite à la rencontre de la droite BD' et du premier segment capable de l'angle A décrit sur BC.

12. Le problème que nous venons de résoudre nous conduit à une remarque importante. Si l'on a besoin d'introduire dans la construction d'une figure des lignes auxiliaires, il faut toujours faire en sorte de les rattacher aux autres éléments, de manière que l'une de leurs extrémités soit connue de position. C'est ainsi que, dans l'exemple précédent, la ligne auxiliaire BD ou BD' part du point B. On n'a plus alors qu'à déterminer, soit un autre point de la ligne auxiliaire considérée, soit sa direction.

Dans tous les cas, on devra compliquer le moins possible la figure destinée à représenter la liaison qui existe entre les données et les inconnues de la question.

13. On fait souvent intervenir l'algèbre dans la résolution d'un problème de géométrie, et la construction du problème correspond à la construction de la formule obtenue. Nous en avons déjà donné des exemples, nous en ajouterons ici quelques-uns.

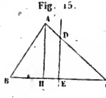
EXEMPLES.

1° *Étant donné un triangle* ABC, *mener à la base* BC *une perpendi-*

culaire DE de manière que les triangles ABC, DEC, soient dans un rapport donné $\frac{p}{q}$ (*fig.* 15).

Posons $EC = x$, $DE = y$, $BC = a$. Soit $h = AH$ la hauteur correspondante à la base a. On devra avoir, d'après l'énoncé,

Fig. 15.



$$\frac{ah}{xy} = \frac{p}{q}.$$

Les triangles semblables AHC, DEC, donneront, en désignant CH par a',

$$\frac{h}{a'} = \frac{y}{x}.$$

Divisons membre à membre les deux relations obtenues, il viendra

$$\frac{aa'}{xy} = \frac{px}{qy},$$

d'où

$$x^2 = \frac{aa'q}{p} \quad \text{et} \quad x = \sqrt{\frac{aa'q}{p}}.$$

x sera donc moyenne proportionnelle entre les longueurs a et $\frac{a'q}{p}$. x étant déterminée, on la portera sur CB à partir du point C et, par le point E obtenu, on élèvera une perpendiculaire ED au côté CB jusqu'à la rencontre du côté CA. Si l'on a $x > a'$, c'est-à-dire $\frac{aq}{p} > a'$, ou $\frac{p}{q} < \frac{a}{a'}$, le point de rencontre D sera situé sur le prolongement du côté CA, et le triangle DEC ne sera plus contenu dans le triangle ABC.

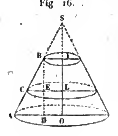
Supposons qu'on donne le rapport $\frac{p}{q} = 2$, on aura

$$x = \sqrt{\frac{aa'}{2}}.$$

x sera dans ce cas la moyenne proportionnelle des longueurs $\frac{a}{2}$ et a'.

2° *Étant donné un tronc de cône à bases parallèles, le partager en deux parties qui soient dans un rapport donné* $\frac{p}{q}$, *par un plan parallèle aux bases* (*fig.* 16).

Fig 16.



Désignons par R et r les rayons AO et BI des bases du tronc de cône, par x le rayon CL de la section déterminée par le plan parallèle. Soit S le sommet du cône dont fait partie le tronc de cône proposé. Les trois cônes SBI, SCL, SAO, seront semblables et proportionnels aux cubes des rayons de leurs bases (*Géom.*, 230). On pourra donc écrire

$$\frac{\text{cône SBI}}{r^3} = \frac{\text{cône SCL}}{x^3} = \frac{\text{cône SAO}}{R^3}.$$

On en déduit l'égalité suivante :

$$\frac{\text{cône SCL} - \text{cône SBI}}{x^3 - r^3} = \frac{\text{cône SAO} - \text{cône SCL}}{R^3 - x^3}.$$

Les numérateurs des rapports considérés représentent les deux parties du tronc de cône, parties qui doivent être entre elles comme les nombres p et q. On aura donc finalement

$$\frac{p}{x^3 - r^3} = \frac{q}{R^3 - x^3},$$

d'où

$$p(R^3 - x^3) = q(x^3 - r^3).$$

On en tire

$$x^3 = \frac{pR^3 + qr^3}{p+q} \quad \text{et} \quad x = \sqrt[3]{\frac{pR^3 + qr^3}{p+q}}.$$

Dans le cas donné, on *calculera* x, on ne le construira pas.

Si l'on veut connaître la distance y du plan sécant à la base inférieure, les triangles semblables CBE, ABD, donneront, H étant la hauteur du tronc,

$$\frac{H - y}{H} = \frac{x - r}{R - r}, \quad \text{d'où} \quad y = H \cdot \frac{R - x}{R - r}.$$

Si l'on veut partager le tronc de cône en deux parties équivalentes, il faut faire $p = q$. Il vient alors

$$x = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}.$$

3° *Circonscrire à une sphère donnée un cône droit de surface totale donnée* (*fig.* 17).

Fig. 17.

Nous représenterons par πa^2 la surface donnée. Nous désignerons par x et y le rayon de la base et la hauteur du cône circonscrit, par z son apothème. Pendant que le demi-cercle BCD engendre la sphère en tournant autour du diamètre BD, le triangle rectangle SAB, en tournant autour du même axe, engendre le cône circonscrit.

On a immédiatement

$$\pi x(x + z) = \pi a^2,$$

c'est-à-dire

$$x(x + z) = a^2.$$

Les triangles semblables SAB, SOC, donnent ensuite

$$\frac{x}{r} = \frac{y}{\sqrt{y(y - 2r)}} = \frac{z}{y - r}.$$

Il en résulte

$$z = \frac{x(y - r)}{r}$$

et, par suite,

$$x\left(x + \frac{x(y - r)}{r}\right) = a^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{x^2 y}{r} = a^2.$$

Remplaçant $\frac{x^2}{r}$ par sa valeur en fonction de y, il viendra enfin

$$\frac{ry^3}{y(y-2r)} = a^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{ry^2}{y-2r} = a^2.$$

L'équation correspondante

$$ry^2 - a^2y + 2ra^2 = 0$$

fera connaître y et, ensuite, x et z.

Remarquons que l'apothème du cône circonscrit devient infini en devenant parallèle, soit au rayon de la base, soit à la hauteur du cône : il en est donc de même de la surface totale de ce cône, et cela a lieu quand son sommet S se confond avec l'extrémité D du diamètre BD ou s'éloigne à l'infini sur ce diamètre prolongé. Entre ces deux valeurs infinies, il y a donc pour la surface totale du cône circonscrit une valeur *minimum*.

La condition de réalité des racines de l'équation

$$ry^2 - a^2y + 2ra^2 = 0$$

nous donne

$$a^4 - 8a^2r^2 > 0,$$

c'est-à-dire

$$a^2 > 8r^2.$$

$8r^2$ représentant le minimum de a^2, $8\pi r^2$ représente le minimum de la surface totale du cône. On a alors

$$y = \frac{a^2}{2r} = 4r,$$

et il en résulte

$$\frac{x}{r} = \frac{z}{3r} = \frac{4r}{2r\sqrt{2}},$$

ce qui revient à

$$x = r\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z = 3r\sqrt{2}.$$

On voit que le cône dont il s'agit a une surface totale double de la surface sphérique et, par suite aussi, un volume double de celui de la sphère : sa hauteur est d'ailleurs double du diamètre de la sphère.

Considérons l'expression du volume du cône circonscrit. Cette expression est

$$\frac{1}{3}\pi x^2 y$$

et devient, en remplaçant x^2 par sa valeur $\frac{r^2y^2}{y(y-2r)}$,

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \frac{y^2}{y-2r}.$$

Le minimum de ce volume correspond au minimum de

$$\frac{y^2}{y-2r}.$$

Égalons cette quantité à une variable b. Nous obtiendrons l'équation

$$y^2 - by + 2rb = 0.$$

La condition de réalité des racines donne

$$b^2 - 8rb > 0,$$

c'est-à-dire $b > 8r$. Le minimum de b étant $8r$, le minimum du vol[...] du cône est $\frac{8}{3}\pi r^3$, et la hauteur correspondante est $y = \frac{b}{2} = 4r$. Le c[...] circonscrit de volume minimum se confond donc avec le cône circons[...] de surface totale minimum.

4° *Trouver les diagonales d'un quadrilatère inscriptible, connaiss[...] ses quatre côtés* (*fig.* 18).

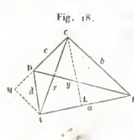


Fig. 18.

Soient a, b, c, d, les quatre côtés d[...] nés, x et y les diagonales cherchées. [...] angles opposés du quadrilatère devant ê[...] supplémentaires, si l'angle B est aigu, l'[...] gle D sera obtus, et si l'on mène les h[...] teurs CL et AM des triangles ACB et AC[...] l'angle ADM sera égal à l'angle B. Les t[...] angles rectangles CLB, AMD, seront do[...] semblables et donneront

$$(1) \qquad \frac{b}{d} = \frac{\text{BL}}{\text{DM}}.$$

Ceci posé, les triangles ACB et ACD permettront d'écrire (*Géom.*, 106, 10[...]

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2a.\text{BL}, \quad x^2 = c^2 + d^2 + 2c.\text{DM},$$

d'où

$$\text{BL} = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2a} \quad \text{et} \quad \text{DM} = \frac{x^2 - c^2 - d^2}{2c}.$$

Ces valeurs, substituées dans la relation (1), conduiront à l'équation

$$ab(x^2 - c^2 - d^2) = cd(a^2 + b^2 - x^2),$$

d'où

$$(ab + cd)x^2 = abc^2 + abd^2 + a^2cd + b^2cd = ac(bc + ad) + bd(ad + bc[...]$$

On aura donc

$$x = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}.$$

Pour avoir y, il suffit évidemment de changer dans les calculs précéden[...] d en b et b en d, ce qui conduit à

$$y = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}.$$

Multiplions et divisons l'une par l'autre les valeurs obtenues; il viendr[...]

$$xy = ac + bd \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

ce qui démontre les deux théorèmes suivants :

Dans tout quadrilatère inscriptible, le produit des diagonales est égal [...] la somme des produits des côtés opposés ; le rapport de ces mêmes diago[...]

nales est représenté par celui qu'on obtient en comparant les sommes des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de chacune d'elles (*).

En se servant des résultats précédents et en posant le périmètre du quadrilatère inscriptible égal à $2p$, on trouve facilement pour l'expression de son aire

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

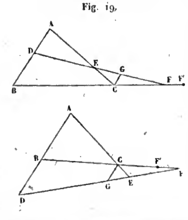
14. Nous passons sous silence une dernière méthode, celle qui consiste dans la *transformation des figures*. Cette méthode doit être étudiée dans les traités spéciaux. Nous renverrons donc aux remarquables ouvrages de *MM. Charles Dupin, Poncelet* et *Chasles*. On pourra aussi consulter sur ce sujet l'excellent travail de *M. Paul Serret*, déjà cité au commencement de ce chapitre.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES TRANSVERSALES ET DES POLAIRES.

Transversales dans le triangle.

15. Théorème fondamental. *Lorsqu'une droite rencontre les trois côtés d'un triangle, prolongés s'il est nécessaire, elle détermine (par les distances des points d'intersection aux extrémités de chaque côté) six segments tels, que le produit de trois segments sans extrémité commune est égal au produit des trois autres* (*fig.* 19).



La transversale coupera deux côtés du triangle et le prolongement du troisième, ou bien elle coupera les prolongements des trois côtés. La démonstration sera la même dans les deux cas.

D'après la figure, le triangle ABC étant coupé par la transversale DEF, les segments à considérer seront DA et DB, EA et EC, FB et FC. Menons par le sommet C la parallèle CG au côté opposé AB, jusqu'à la rencontre de la transversale. Les triangles semblables FCG, FBD, donneront

$$\frac{CG}{DB} = \frac{FC}{FB}.$$

De même, les triangles semblables ECG, EAD, donneront

$$\frac{CG}{DA} = \frac{EC}{EA}.$$

(*) On pourrait aussi résoudre le problème proposé par la Trigonométrie. On aurait les trois équations

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B,$$
$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos D,$$
$$\cos D = -\cos B.$$

Divisons membre à membre les deux égalités obtenues, il viendra

$$\frac{DA}{DB}=\frac{EA.FC}{EC.FB},$$

d'où l'on déduit

$$DA.EC.FB = DB.EA.FC.$$

16. Réciproquement, *si trois points situés en nombre pair sur les côtés d'un triangle, en nombre impair sur les prolongements de ses côtés, y déterminent six segments tels, que le produit de trois segments sans extrémité commune soit égal au produit des trois autres, on peut affirmer que les trois points considérés sont en ligne droite* (*fig.* 19).

On a, par hypothèse,

$$DA.EC.FB = DB.EA.FC.$$

Si la droite qui passe par les deux points D et E ne contenait pas le point F, elle couperait le côté BC en un point F', et l'on aurait d'après le théorème précédent

$$DA.EC.F'B = DB.EA.F'C.$$

Si l'on divise membre à membre les deux égalités posées, il vient

$$\frac{FB}{F'B}=\frac{FC}{F'C}.$$

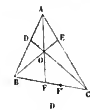
On en déduit

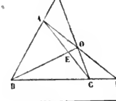
$$\frac{FB}{F'B}=\frac{FB-FC}{F'B-F'C}=\frac{BC}{BC},$$

proportion inexacte, à moins que le point F' ne se confonde avec le point F. Les trois points D, E, F, sont donc bien en ligne droite (*).

17. *Si l'on joint un point O pris dans le plan d'un triangle à ses trois sommets A, B, C, les droites obtenues détermineront sur les côtés du triangle ou sur leurs prolongements six segments tels, que le produit de trois segments sans extrémité commune sera égal au produit des trois autres* (*fig.* 20).

Fig. 20.





Les trois transversales OA, OB, OC, couperont les trois côtés du triangle, ou bien elles couperont un seul côté et les prolongements des deux autres. Je dis qu'on aura dans les deux cas

$$DA.EC.FB = DB.EA.FC.$$

En effet, le triangle ABF coupé par la transversale COD donne (15)

$$DA.OF.CB = DB.OA.CF.$$

De même, le triangle ACF coupé par la

(*) Il est impossible que la droite qui joint les deux points D et E soit parallèle au côté BC, car on aurait alors

$$\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC},\quad \text{d'où}\quad DA.EC = DB.EA,$$

c'est-à-dire, d'après l'hypothèse, FB = FC, ce qui est absurde.

transversale BOE donne

$$EA.OF.BC = EC.OA.BF.$$

Si l'on divise membre à membre les deux égalités obtenues, il vient

$$\frac{DA}{EA} = \frac{DB.CF}{EC.BF},$$

et l'on en déduit

$$DA.EC.FB = DB.EA.FC.$$

18. Réciproquement, *si trois points situés en nombre impair sur les côtés d'un triangle, en nombre pair sur les prolongements de ses côtés, y déterminent six segments tels, que le produit de trois segments sans extrémité commune soit égal au produit des trois autres, les droites qui joindront respectivement les trois points considérés aux sommets opposés du triangle, seront concourantes* (*fig.* 20).

On a, par hypothèse,

$$DA.EC.FB = DB.EA.FC.$$

Si la droite qui joint le point F au sommet A ne passe pas par le point O où se croisent les droites BE et CD, menons la droite AO et supposons qu'elle rencontre en F' le côté BC. D'après le théorème précédent, on devra avoir

$$DA.EC.F'B = DB.EA.F'C.$$

Si l'on divise alors membre à membre les deux égalités posées, il viendra

$$\frac{F'B}{FB} = \frac{F'C}{FC};$$

on en déduit, le double signe correspondant aux deux positions possibles du point O,

$$\frac{F'B}{FB} = \frac{F'B \pm F'C}{FB \pm FC} = \frac{BC}{BC},$$

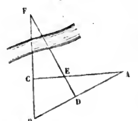
proportion inexacte, à moins que le point F' ne se confonde avec le point F. Les trois droites considérées se croiseront donc bien au même point O.

Applications.

19. *Calculer la distance d'un point donné* B *à un point inaccessible* F (*fig.* 21).

On marquera un point C sur la partie accessible de la direction BF, et l'on mesurera BC; puis l'on choisira sur le terrain un point A, de manière à pouvoir tracer facilement les alignements AB, AC. On marquera un point D sur AB, et l'on déterminera le point de rencontre E des deux directions AC et DF. En considérant alors le triangle ABC coupé par la transversale DEF, on pourra écrire (15)

Fig. 21.



$$DA.EC.FB = DB.EA.FC,$$

d'où l'on tire

$$FB = FC \cdot \frac{DB.EA}{DA.EC}.$$

On peut mesurer les quatre segments DA, DB, EA, EC, et calculer l'expression fractionnaire $\frac{DB.EA}{DA.EC} = K$. On a d'ailleurs

$$FC = FB - BC.$$

Il viendra donc

$$FB = (FB - BC).K,$$

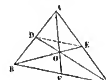
c'est-à-dire

$$FB = \frac{K.BC}{K-1} \ (*).$$

20. *Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point* (*fig.* 22).

En effet, les points D, E, F, étant les milieux des côtés du triangle ABC, on aura identiquement

Fig. 22.



$$DA.EC.FB = DB.EA.FC.$$

Par suite (18), les trois médianes sont concourantes. On prouverait de même que *les trois perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se croisent au même point.*

Remarque. — Il est bon de noter que *le point de rencontre des trois médianes est au tiers de chacune d'elles à partir de la base.* En effet, la droite DE, par exemple, est parallèle à BC, égale à $\frac{BC}{2}$, et les triangles semblables DOE, BOC, donnent

$$\frac{DO}{OC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$DO = \frac{DC}{3}.$$

21. *Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point* (*fig.* 23).

Menons les trois hauteurs AF, BE, CD. Les triangles BAE et CAD seront équiangles, ainsi que les triangles ABF et CBD, ACF et BCE. On pourra donc écrire

Fig. 23.

$$\frac{DA}{EA} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{FB}{DB} = \frac{AB}{BC}, \quad \frac{EC}{FC} = \frac{BC}{AC}.$$

Multiplions ces trois égalités membre à membre, il viendra

$$\frac{DA.EC.FB}{DB.EA.FC} = \frac{AB.AC.BC}{AB.AC.BC} = 1.$$

Par suite,

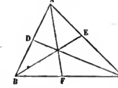
$$DA.EC.FB = DB.EA.FC,$$

et les trois hauteurs sont concourantes (18).

(*) On voit facilement que K est plus grand que 1 en se reportant à l'égalité DA.EC.FB = DB.EA.FC; car, puisque FB est plus grand que FC, il faut qu'on ait DB.EA > DA.EC.

22. *Les bissectrices des angles d'un triangle se coupent en un même point* (*fig.* 24).

Fig. 24.



En effet, si AF, BE, CD, représentent les bissectrices des angles A, B, C, on aura (*Géom.*, 89)

$$\frac{DA}{DB}=\frac{AC}{BC},\quad \frac{EC}{EA}=\frac{BC}{AB},\quad \frac{FB}{FC}=\frac{AB}{AC}.$$

Si l'on multiplie ces égalités membre à membre, il viendra

$$\frac{DA.EC.FB}{DB.EA.FC}=1.$$

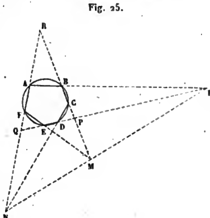
Par suite,

$$DA.EC.FB = DB.EA.FC,$$

et les trois bissectrices sont concourantes (18).

23. *Dans tout hexagone inscrit à une circonférence, les points de concours des côtés opposés prolongés deux à deux sont en ligne droite* (*fig.* 25).

Fig. 25.



Les côtés *opposés* sont séparés par deux côtés *consécutifs*. Ainsi, les côtés opposés AB et DE se coupent en L, les côtés opposés BC et EF se coupent en M, les côtés opposés CD et FA se coupent en N. Il faut démontrer que les trois points L, M, N, sont en ligne droite.

Les côtés non consécutifs BC, DE, FA, de l'hexagone, déterminent par leurs rencontres le triangle PQR. Ce triangle est coupé par les transversales ABL, CDN, EFM, qui sont précisément les trois autres côtés de l'hexagone. En appliquant successivement à chaque transversale le théorème fondamental (15), on aura:

$$LP.AQ.BR = LQ.AR.BP,$$
$$NQ.CR.DP = NR.CP.DQ,$$
$$MR.EP.FQ = MP.EQ.FR.$$

Si l'on multiplie alors ces trois égalités membre à membre, en remarquant que (*Géom.*, 111)

$$BR.CR = AR.FR,$$
$$FQ.AQ = EQ.DQ,$$
$$DP.EP = CP.BP,$$

il viendra

$$LP.NQ.MR = LQ.NR.MP.$$

Cette dernière relation prouve (16), en considérant toujours le triangle PQR, que les trois points L, M, N, sont en ligne droite.

Le théorème qu'on vient de démontrer est vrai, lors même que l'hexagone inscrit proposé n'est pas convexe.

Il ne dépend pas de la grandeur des côtés de l'hexagone, c'est-à-dire qu'il subsiste encore lorsque quelques-uns de ces côtés sont remplacés par des tangentes à la circonférence.

Par exemple, *un triangle étant inscrit dans une circonférence, si l'on mène par ses sommets des tangentes à la circonférence, les points de concours de ces tangentes avec les côtés opposés aux sommets considérés seront en ligne droite.*

Enfin, cette propriété remarquable de l'hexagone inscrit à la circonférence n'est qu'un cas particulier du théorème général connu sous le nom de théorème de *Pascal* et qui s'énonce ainsi :

Dans tout hexagone inscrit à une courbe du second ordre (*), *les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.*

Division harmonique des lignes droites.

24. Trois nombres forment une proportion *harmonique,* lorsque le rapport de l'excès du premier sur le second à l'excès du second sur le troisième, est égal au rapport du premier nombre au troisième.

La dénomination employée vient de ce que, lorsqu'une corde sonore rend l'accord parfait *ut, mi, sol,* elle est frappée successivement en trois points qui correspondent à des longueurs de corde proportionnelles aux nombres $1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$, donnant précisément la proportion

$$\frac{1-\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}.$$

25. Lorsqu'on prend sur une droite AB et sur son prolongement (*fig.* 26), deux points C et D tels, que leurs distances aux extrémités de la droite AB soient proportionnelles, on peut écrire la proportion

Fig. 26.

$$\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{AC}$$

sous la forme suivante :

$$\frac{AD-AB}{AB-AC}=\frac{AD}{AC}.$$

Donc, les trois longueurs AD, AB, AC, constituent alors une proportion harmonique, et l'on dit que la droite AB est divisée *harmoniquement* aux points C et D, qu'on appelle *points conjugués harmoniques par rapport à cette droite.*

(*) On entend par *courbe du second ordre* toute courbe représentée, en coordonnées rectilignes, par une équation du second degré à deux variables. (*Voir* la *Géométrie analytique,* t. III.)

Réciproquement, la proportion $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC}$ donne

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD},$$

d'où

$$\frac{AD - CD}{CD - BD} = \frac{AD}{BD}.$$

Les points A *et* B *sont donc à leur tour conjugués harmoniques par rapport à la droite* CD.

26. *La moitié* AI *de la droite* AB *est moyenne proportionnelle entre les distances du point* I *aux points conjugués harmoniques* C *et* D (*fig.* 26).

En effet, de la proportion $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$, on déduit

$$\frac{AC - BC}{AC + BC} = \frac{AD - BD}{AD + BD},$$

c'est-à-dire

$$\frac{(AI + IC) - (BI - IC)}{(AI + IC) + (BI - IC)} = \frac{AB}{AB + 2BD},$$

ou

$$\frac{2IC}{2AI} = \frac{2AI}{2ID}.$$

Cette dernière proportion conduit à la relation

$$AI^2 = IC.ID.$$

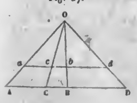
Réciproquement, *si un point* M *pris sur* AB *satisfait à cette condition, il est nécessairement le milieu de la droite* AB. En effet, ce point M étant à gauche ou à droite du milieu I de la droite AB, on ne pourrait avoir en même temps

$$AM^2 = MC.MD \quad \text{et} \quad AI^2 = IC.ID,$$

puisque AM étant $<$ ou $>$ AI, on aurait au contraire à la fois MC $>$ ou $<$ IC, MD $>$ ou $<$ ID.

27. Si l'on joint un même point O (*fig.* 27) aux quatre points harmoniques A, B, C, D, on forme ce qu'on appelle un *faisceau harmonique*. Les droites qui correspondent aux points conjugués harmoniques, sont dites *conjuguées harmoniques*. Toute droite *abcd*, *parallèle* à la droite ACBD, est divisée *harmoniquement* par le faisceau qu'on peut regarder comme prolongé en sens inverse au delà du point O.

Fig. 27.

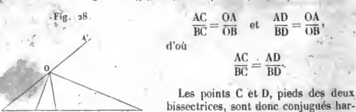


La géométrie élémentaire fournit un exemple de faisceau harmonique.

Si l'on mène les bissectrices OC et OD des deux angles intérieur et extérieur supplé-

mentaires d'un triangle AOB (*fig.* 28), on a (*Géom.*, 89, 90):

Fig. 28.



$$\frac{AC}{BC} = \frac{OA}{OB} \quad \text{et} \quad \frac{AD}{BD} = \frac{OA}{OB},$$

d'où

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

Les points C et D, pieds des deux bissectrices, sont donc conjugués harmoniques par rapport au côté AB. Dès lors les deux côtés OA et OB du triangle et les deux bissectrices OC et OD forment un faisceau harmonique.

Remarque. — Il suit de là que, *si l'on détermine sur le diamètre* CD *d'une circonférence* COD *les points conjugués harmoniques* A *et* B, *le rapport des distances d'un point quelconque* O *de la circonférence aux deux points* A *et* B *restera constant;* car les bissectrices des angles variables AOB, BOA', passeront constamment par les points C et D, conjugués harmoniques relativement à AB.

28. Proposons-nous de *diviser harmoniquement une droite* AB *dans le rapport de deux droites données m et n* (*fig.* 29).

On mènera par le point A une droite quelconque AO $= m$, et par le point B une parallèle à AO, sur laquelle on prendra BE $=$ BF $= n$. Puis on tracera les droites OE et OF, qui couperont AB et son prolongement aux points demandés C et D.

Fig. 29.

En effet, on aura à cause des parallèles

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AO}{BE} = \frac{m}{n} \quad \text{et} \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AO}{BF} = \frac{m}{n},$$

d'où

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{m}{n}.$$

Connaissant trois droites d'un faisceau harmonique, on construira la quatrième par un procédé analogue (*fig.* 29).

Soient OA, OC, OB, les trois droites données. On mènera par un point B pris sur la troisième droite OB, une parallèle à la première droite OA. Cette parallèle coupera la seconde droite OC au point E. On prendra alors sur le prolongement de BE une longueur BF $=$ BE; le point F appartiendra nécessairement à la quatrième droite du faisceau. En effet, si l'on trace par le point B une droite quelconque *qui coupe les quatre droites considérées* aux points A, C, B, D, le point D sera le conjugué harmonique du point C par rapport à la droite AB. Car on aura toujours

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AO}{BE} \quad \text{et} \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AO}{BF},$$

d'où, à cause de BE $=$ BF,

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

Si les droites données étaient OA, OB, OD, on déterminerait OC en suivant une marche identique. Au lieu de BE, c'est BF qu'on trouverait directement.

Le choix du point B et la direction de la droite ACBD étant arbitraires, la construction indiquée conduit en même temps à cette remarque importante : *Une sécante quelconque est divisée harmoniquement par un faisceau harmonique.*

29. D'après cette remarque, si l'on donne (*fig.* 29) un angle COD et un point A hors de cet angle, si l'on mène par le point A une sécante quelconque ACD, le lieu du point B, conjugué harmonique du point A par rapport aux points d'intersection C et D de la sécante avec les côtés de l'angle, sera la droite OB conjuguée harmonique de la droite OA dans le faisceau harmonique OACBD. Ainsi, pendant que la sécante tourne autour du point A, le point B décrit la droite OB. Le point A est appelé *pôle* de la droite OB, et la droite OB est la *polaire* du point A par rapport à l'angle COD.

Si l'on veut trouver la polaire du point A *par rapport à l'angle* COD (*fig.* 29), il suffira d'après ce qui précède (28) de mener, entre les côtés de l'angle, une parallèle EF à la droite OA. *Le milieu* B *de cette parallèle appartiendra à la polaire* OB.

Si l'on veut, au contraire, *trouver le pôle* A, *étant donnée la polaire* OB, la question reviendra à chercher la quatrième droite OA d'un faisceau, lorsqu'on connaît les trois autres OD, OB, OC (28).

30. *On donne un angle* COD *et un point* A *hors de cet angle. On mène par ce point deux sécantes quelconques* ACD, AC′D′, *et l'on joint diagonalement les points d'intersection* C *et* D′, C′ *et* D. *Les droites obtenues se croisent en* M *sur la polaire du point* A *par rapport à l'angle* COD (*fig.* 30).

Déterminons le point B, conjugué harmonique du point A par rapport à la droite CD. Les quatre droites MA, MC, MB, MD, formeront un faisceau harmonique (27). Par suite, le point B′ où MB prolongée coupera la sécante AC′D′, sera le conjugué harmonique du point A par rapport à la droite C′D′. Les deux points B et B′ détermineront donc la polaire du point A par rapport à l'angle COD, et comme la droite BMB′ passe par le point O, on obtiendra cette polaire en traçant OM.

Fig. 30.

Réciproquement, *si l'on prend un point* M *quelconque sur la polaire* OB, *si l'on mène par ce point les droites* CD′ *et* C′D *arrêtées aux côtés de l'angle* COD, *les droites* CD *et* C′D′ *prolongées viendront se couper au pôle* A (*fig.* 30).

En effet, supposons un instant que le point A, conjugué harmonique du point B par rapport à CD, ne se trouve pas sur C′D′, et menons la droite AC′. AC′ prolongée viendra couper OD en un point D_1 différent de D′. Si l'on joint alors CD_1, on coupera C′D en un point de la polaire OB qui ne pourra être que le point M. Par conséquent, les deux droites CD_1 et CD′ ayant deux points communs C et M, ne peuvent différer, et la droite C′D′ prolongée passe nécessairement par le point A.

Applications.

31. Soit un quadrilatère ABCD. Prolongeons (*fig.* 31) les côtés opposés AB et CD, AD et BC, jusqu'à leurs rencontres aux points E et F. L'ensemble ainsi obtenu porte le nom de *quadrilatère complet*. Ce quadrilatère a pour *troisième* diagonale la droite EF.

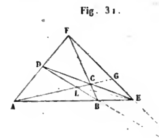


Fig. 31.

On voit qu'un quadrilatère complet n'est que le système formé par quatre droites indéfinies qui se coupent en six points. En joignant les points opposés deux à deux, on a les trois diagonales du quadrilatère.

Dans un quadrilatère complet, chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.

En effet, soient G, H, L, les points d'intersection des trois diagonales. D'après le théorème précédent (30), le point H est le pôle de la droite ACG par rapport à l'angle EAF, de sorte que les points de rencontre H et G de la diagonale EF avec les diagonales BD et AC, la divisent harmoniquement. De même, le point F est le pôle de la droite EL par rapport à l'angle AED, de sorte que L est sur AC le conjugué harmonique du point G, et sur BD, le conjugué harmonique du point H.

32. On peut s'appuyer sur ce qui précède (30) pour *mener par un point donné une droite qui concoure avec deux droites données, ces droites ne se coupant pas dans les limites du dessin* (voir une solution très-simple de ce problème, 9).

Soient (*fig.* 32) AC et BD les deux droites données, soit M le point donné placé entre les deux droites. On tirera par le point M les deux droites AD et BC. En joignant leurs points d'intersection avec les lignes données, on obtiendra les droites AB et CD qui, prolongées, iront en général se couper en un point H. On pourra toujours opérer de manière que ce point soit compris dans les limites de l'épure. Par le point H ainsi déterminé, on tracera la sécante HEF aux deux lignes données, et l'on joindra en croix les points d'intersection obtenus avec les points C et D. Les droites CF et DE se croiseront en I. La droite MI sera la polaire du point H par rapport à l'angle que forment les droites AC et BD. Dès lors MI ira passer par le point de concours O de ces droites.

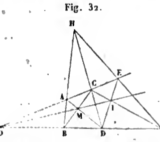


Fig. 32.

Supposons maintenant (*fig.* 32) que les droites données soient AB et CD et que le point donné F soit extérieur à ces droites. Par un point

quelconque O, on mènera les droites OAC, OBDF, dont l'une passe par le point donné F. On joindra en croix les points d'intersection de ces droites avec les lignes données. Les droites ainsi obtenues, AD et BC, se croiseront en M. On mènera alors la droite FC qui coupera en I la direction OM; puis on joindra DI qui coupera AC au point E. La ligne FE sera la direction demandée. Car la droite OMI est, par rapport à l'angle COD, la polaire du point H où viennent se rencontrer les droites AB, CD, EF.

On pourra mettre à profit les solutions précédentes, pour tracer par un point donné une droite allant concourir avec deux autres droites, visibles seulement dans une partie de leur parcours; pour trouver un point situé sur le prolongement d'une droite inaccessible, ou encore, pour prolonger une droite donnée au delà d'un obstacle arrêtant la vue.

Pôle et polaire dans le cercle.

33. *Si par un point* O *pris dans le plan d'un cercle de diamètre* AB, *on trace une sécante quelconque* EF *à ce cercle, le lieu du point* I *conjugué harmonique du point* O *par rapport à la corde* EF, *est une droite perpendiculaire au diamètre* AB *qui passe par le point* O (*fig.* 33).

Fig. 33.

Déterminons le point H, conjugué harmonique du point O par rapport au diamètre AB qui passe par ce point, et soit I le conjugué harmonique du même point par rapport à la corde quelconque EF. Il suffit, pour démontrer le théorème énoncé, de prouver que la droite IH est perpendiculaire sur AB.

Ceci posé, puisque les points O et H sont conjugués harmoniques par rapport à AB et que les points E et F appartiennent à la circonférence, on aura nécessairement (27, *Remarque*):

$$\frac{EH}{EO}=\frac{FH}{FO}, \text{ c'est-à-dire } \frac{EH}{FH}=\frac{EO}{FO}.$$

Suivant que le point O sera extérieur ou intérieur à la circonférence, la droite HO sera donc la bissectrice de l'angle FHL ou de l'angle EHF, extérieur ou intérieur par rapport au triangle EHF. Les droites HO, HF, HI, HE, formant par hypothèse un faisceau harmonique, il faut alors que la droite HI soit à son tour bissectrice de l'angle intérieur EHF ou de l'angle extérieur FHL (27), c'est-à-dire qu'elle soit perpendiculaire sur HO ou sur le diamètre OAB.

On dit que le point O est le *pôle* de la droite IH et que la droite IH est la *polaire* du point O, par rapport au cercle AB.

34. Le point C étant le centre du cercle ou le milieu de AB, on a la relation (26)

$$AC^2 = CH.CO.$$

On peut déduire de cette relation plusieurs conséquences importantes.

Par un point O extérieur à une circonférence (*fig.* 34), menons à cette circonférence les tangentes OM et ON. Traçons la corde MN qui joint les points de contact M et N, et qui est perpendiculaire au diamètre OAB. Le triangle rectangle OMC donnera

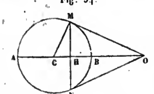


Fig. 34.

$$\overline{MC}^2 = \overline{AC}^2 = CH.CO.$$

Le point H où la corde MN coupe le diamètre OAB, est donc le conjugué harmonique du point O par rapport à AB; en d'autres termes, *la polaire du point* O *est la corde* MN *qui joint les points de contact des tangentes menées de ce point à la circonférence.*

On peut conclure de là une nouvelle construction de la tangente menée au cercle par un point extérieur.

La relation $\overline{AC}^2 = CH.CO$ prouve encore que les points O et H sont *réciproques*, c'est-à-dire que la polaire do l'un passe par l'autre; ce qui est d'ailleurs évident (25).

La même relation montre que, si le point O vient en B sur la circonférence, le point H vient aussi en B. Donc *la polaire d'un point pris sur la circonférence est la tangente menée en ce point à la circonférence.*

Enfin, si CO devient infiniment petit, CH devient infiniment grand, de sorte que si le pôle est au centre de la circonférence, la polaire se transporte à l'infini.

35. *Lorsqu'on fait décrire au pôle* O *une droite* XY, *toutes les polaires correspondantes aux diverses positions du point* O *se croisent en un même point* H *qui est le pôle de* XY (*fig.* 35).

Menons le diamètre ABO perpendiculaire à la droite XY, et déterminons sur ce diamètre le point H, conjugué harmonique du point O ou pôle de la droite XY. Prenons un point *quelconque* O' sur XY et joignons-le au centre du cercle: nous obtiendrons ainsi un diamètre A'B'; la perpendiculaire HH', abaissée du point H sur ce diamètre, sera la polaire du point O'. En effet, les triangles semblables COO', CHH', donneront $\frac{CO'}{CH} = \frac{CO}{CH'}$, d'où

Fig. 35

$$CH'.CO' = CH.CO = \overline{AC}^2 (34).$$

Le point H' sera donc bien le pied de la polaire du point O'.

36. Réciproquement, *si la droite* XY *tourne autour du point* O, *son pôle appartiendra toujours à la polaire du point* O (*fig.* 36).

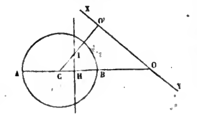


Fig. 36.

Car, si l'on détermine la polaire HI du point O et si l'on abaisse, du centre C de la circonférence, une perpendiculaire CO' sur la position *quelconque* de la droite XY, les deux triangles semblables CIH, COO', donneront toujours

$$\frac{CI}{CO} = \frac{CH}{CO'},$$

d'où

$$CI.CO' = CH.CO = AC^2.$$

Le point I sera donc le pôle de la droite XY.

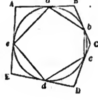
37. Corollaires. — 1° *Si des différents points d'une droite on trace des couples de tangentes à une circonférence, les cordes de contact viennent se croiser au pôle de la droite considérée.* En effet, les cordes de contact obtenues sont les polaires des différents points de la droite (34, 35).

2° *Si d'un point on mène à un cercle une série de sécantes, les points de rencontre des couples de tangentes correspondantes appartiennent à la polaire du point considéré.* En effet, les sécantes passant par un même point, leurs pôles se trouvent sur la polaire de ce point (34, 36).

3° *En joignant les pôles de deux droites, on obtient la polaire de leur point de rencontre.* En effet, ces deux droites peuvent être regardées comme les positions différentes d'une droite passant constamment par leur point de rencontre (36).

4° D'après ce dernier corollaire, *si deux polygones d'un même nombre de côtés, tracés dans le plan d'une circonférence, sont tels, que les sommets de l'un soient les pôles des côtés de l'autre, la propriété réciproque aura lieu; c'est-à-dire que les sommets du second polygone (points de rencontre de ses côtés) seront à leur tour les pôles des côtés du premier polygone.*

Fig. 37.



On donne alors aux deux polygones le nom de *polaires réciproques.*

On voit que, si (*fig.* 37) un polygone ABCDE est circonscrit à un cercle, on obtient son polaire réciproque en formant le polygone inscrit qui correspond aux points de contact successifs *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Car chaque sommet A du polygone circonscrit est le pôle du côté opposé *ea* du polygone inscrit (34).

Application.

38. *Dans tout hexagone circonscrit à une circonférence, les diagonales qui joignent les sommets opposés (c'est-à-dire le premier et le quatrième, le second et le cinquième, le troisième et le sixième), se coupent en un même point (fig. 38).*

Soit l'hexagone circonscrit ABCDEF. En joignant les points de contact successifs, nous formerons l'hexagone inscrit *abcdef*, polaire réciproque du circonscrit (37, 4°).

Fig. 38.

Ceci posé, désignons par L, M, N, les points de rencontre des côtés opposés de l'hexagone inscrit (23). Les sommets A et D étant les pôles des côtés *ab* et *de*, le point de rencontre L de ces côtés sera le pôle de la diagonale AD (37, 3°). De même, les points de rencontre M et N des côtés *bc* et *ef*, *cd* et *fa*, seront les pôles des diagonales BE et CF. Or les trois points L, M, N sont en ligne droite (23); donc, les trois diagonales de l'hexagone circonscrit se couperont en un même point, pôle de la droite LMN (35).

Ce théorème, comme celui sur lequel il s'appuie, n'est qu'un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général, applicable à toute courbe du second ordre et dû à *M. Brianchon.* Il ne dépend pas de la grandeur des côtés de l'hexagone, c'est-à-dire qu'il subsiste encore lorsque, quelques-uns des angles de l'hexagone devenant égaux à deux droits, deux côtés de cet hexagone se réunissent en une seule tangente à la circonférence, dont le point de contact représente encore le sommet qui correspondait primitivement au point de rencontre de ces deux côtés.

Ainsi, l'on peut dire que, *dans tout triangle circonscrit à la circonférence, les droites qui joignent chaque sommet au point de contact du côté opposé, se croisent en un même point.*

CHAPITRE III.

EXERCICES ET QUESTIONS DIVERSES.

(GÉOMÉTRIE PLANE.)

Problèmes divers.

39. *Soit un angle* XAY. *Prenons sur les côtés de cet angle* AB = AB′, AC = AC′, *et joignons en croix les points* B *et* C′, C *et* B′. *Les droites* BC′ *et* CB′ *se couperont en un point* M *qui appartiendra à la bissectrice de l'angle* XAY (*fig.* 39).

Fig. 39.

En effet, les deux triangles ABC′, ACB′, sont égaux comme ayant un angle commun compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. L'angle en B est donc égal à l'angle en B′, l'angle en C à l'angle en C′. Par suite, comme AC — AB ou BC est égal à AC′ — AB′ ou B′C′, les deux triangles BMC, B′MC′, sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. On a donc BM = B′M. Les deux triangles ABM, AB′M sont alors égaux comme ayant un angle égal (B = B′) compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, et l'angle BAM est égal à l'angle B′AM.

40. *Si la bissectrice d'un angle d'un triangle divise le côté opposé en deux parties égales, ce triangle est isocèle* (*fig.* 40).

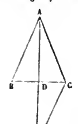


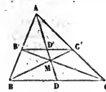
Fig. 40.

Supposons que, dans le triangle ABC, la bissectrice AD de l'angle A soit en même temps une médiane du triangle. Prolongeons AD d'une longueur DA′ = AD, et joignons CA′. Les deux triangles BAD, CA′D, seront égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux. Par suite, AB = CA′, et l'angle BAD = DAC, est égal à l'angle CA′D. Le triangle ACA′ est donc isocèle, et l'on a AC = CA′, c'est-à-dire AC = AB.

41. *Soit un triangle* ABC (*fig.* 41): *Menons* B′C′ *parallèle à la base* BC, *joignons en croix les points* B *et* C′, C *et* B′ : *le point d'intersection* M *des droites* BC′ *et* CB′ *appartiendra à la médiane* AD *du triangle.*

Le point D étant le milieu du côté BC, il faut prouver que les trois points D, M, A, sont en ligne droite. Soit, en effet, D' le point de rencontre de DM prolongée avec B'C'. Les trois droites BC', CB', DD', étant concourantes, coupent proportionnellement les deux parallèles BC, B'C'. Le point D étant le milieu de BC, le point D' est donc le milieu de B'C'. Les trois droites BB', CC', DD', coupant alors proportionnellement les mêmes parallèles BC, B'C', viennent concourir au point A (*Géom.*, 98).

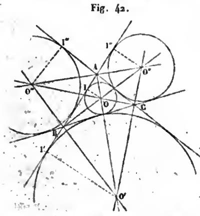
Fig. 41.



42. *Construire les cercles tangents aux trois côtés d'un triangle* ABC (*fig.* 42).

Les bissectrices des angles intérieurs du triangle donné se coupent en un point O situé à égale distance des trois côtés. Donc, si du point O comme centre avec cette distance OI pour rayon on décrit une circonférence, elle sera tangente intérieurement aux trois côtés du triangle.

Fig. 42.



Menons maintenant les bissectrices des angles extérieurs du triangle. Ces angles, deux à deux opposés par le sommet, sont au nombre de six. Leurs bissectrices, deux à deux en ligne droite, formeront un triangle O'O''O''', dont les sommets seront les centres de trois nouvelles circonférences tangentes aux trois côtés du triangle. En effet, les bissectrices BO' et CO', par exemple, se coupent en un point O' situé à égale distance du côté BC et des prolongements des côtés AB et AC (elles se coupent, parce que la somme des angles extérieurs en B et en C étant moindre que 4 droits, la somme de leurs moitiés est inférieure à 2 droits). Donc, si du point O' comme centre avec cette distance O'I' pour rayon on décrit une circonférence, elle sera tangente au côté BC et aux prolongements des côtés AB et AC. Même démonstration pour les circonférences O'' et O'''.

Les trois cercles O', O'', O''', sont appelés *ex-inscrits* par opposition au cercle *inscrit* O.

La bissectrice de chacun des angles intérieurs du triangle ABC passe par le centre du cercle ex-inscrit tangent au côté qui est opposé à l'angle considéré.

43. *Dans tout quadrilatère, les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme* (*fig.* 43.)

Soit le quadrilatère ABCD, et soit le quadrilatère *mnpq* formé en joignant successivement les milieux de ses côtés.

Le côté *mq* sera parallèle à la diagonale BD et égal à $\frac{\text{BD}}{2}$ (*Géom.*, 88); il en sera de même du côté *np*. Par suite, la figure *mnpq* sera bien un parallélogramme.

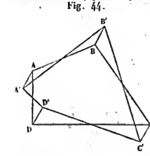
Remarquons que, si les points r et s sont les milieux des diagonales BD et AC, la figure $mspr$ est encore un parallélogramme, puisque mr et ps sont alors deux droites parallèles au côté AD et égales à sa moitié.

Fig. 43.

Les deux parallélogrammes $mnpq$ et $mspr$ ayant une diagonale commune mp, *auront même centre* O (*Géom.*, 43). On conclut de là que le *point de rencontre* O *des lignes mp et nq qui joignent les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère quelconque* ABCD, *est en même temps le milieu de la droite rs qui joint les milieux des diagonales de ce quadrilatère* (*).

Enfin, il est utile de noter que le quadrilatère ABCD détermine le parallélogramme $mnpq$, sans que la réciproque ait lieu. En effet, si par les sommets du quadrilatère ABCD, on mène quatre parallèles égales AA′, BB′, CC′, DD′, croisées comme l'indique la *fig.* 44, le quadrilatère A′B′C′D′ a les milieux de ses côtés aux mêmes points que le quadrilatère ABCD.

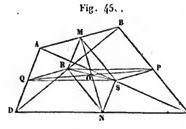
Fig. 44.



En tenant compte de ce que nous venons de dire, on démontre que *deux polygones convexes coïncident lorsque leurs côtés ont mêmes points milieux; mais seulement dans le cas où le nombre des côtés est impair.*

44. *Construire un quadrilatère* ABCD, *connaissant ses quatre côtés et l'une des droites* MN, PQ, *qui joignent les milieux des côtés opposés* (*fig.* 45).

Fig. 45.



Supposons le problème résolu, et soient R et S les milieux des diagonales BD et AC.

La figure MSNR sera un parallélogramme dans lequel on connaîtra deux côtés,

$$MS = \frac{BC}{2} \quad \text{et} \quad SN = \frac{AD}{2},$$

et la diagonale MN. On pourra donc construire ce parallélogramme et tracer la seconde diagonale RS.

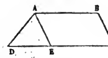
La figure PSQR sera aussi un parallélogramme, et l'on y connaîtra la diagonale RS et les côtés $RP = \frac{CD}{2}$ et $PS = \frac{AB}{2}$. Ce parallélogramme sera donc complétement déterminé.

Il ne restera plus qu'à mener : par le point M, AB parallèle à QR ; par le point P, BC parallèle à MS; par le point N, CD parallèle à QS; par le point Q, AD parallèle à MR. Le quadrilatère ABCD qu'on obtiendra sera évidemment le quadrilatère demandé.

(*) Ce que nous venons de dire est vrai, que le quadrilatère considéré soit plan ou *gauche*.

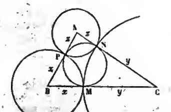
Si le quadrilatère considéré devenait un trapèze ABCD (*fig.* 46), il suffirait de donner ses quatre côtés. Car, en menant AE parallèle à BC, le triangle DAE serait déterminé, puisqu'on connaîtrait ses trois côtés AD, AE = BC, DE = CD − AB. Construisant ce triangle, on prolongerait DE d'une longueur EC = AB, et l'on mènerait par le point A, à DC, une parallèle égale à AB.

Fig. 46.



45. *Des sommets d'un triangle comme centres, décrire trois circonférences qui soient mutuellement tangentes* (*fig.* 47).

Fig. 47.



La question proposée revient à déterminer sur les côtés du triangle trois points M, N, P, tels, qu'on ait

$$AP = AN, \quad BP = BM, \quad CM = CN.$$

Deux tangentes menées d'un même point à une circonférence étant égales, on voit que les points M, N, P, sont précisément les points où le cercle inscrit au triangle ABC touche les côtés de ce triangle.

En considérant les trois cercles ex-inscrits (42), on aurait trois autres solutions du problème.

On peut aussi avoir recours à l'algèbre. Désignons par a, b, c, les trois côtés du triangle, par x et y les segments déterminés par le point M sur le côté a, par y et z les segments déterminés par le point N sur le côté b; x et z seront alors ceux déterminés par le point P sur le côté c. On devra satisfaire au système,

$$x + y = a,$$
$$y + z = b,$$
$$z + x = c,$$

qui donne immédiatement par addition

$$x + y + z = \frac{a+b+c}{2},$$

d'où

$$x = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+c-b}{2},$$

$$y = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2},$$

$$z = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}.$$

On modifierait aisément la marche indiquée, dans le cas où l'on voudrait considérer les cercles ex-inscrits.

En rapprochant les résultats obtenus, on vérifierait que *la distance de deux quelconques des quatre points de contact d'un côté d'un triangle avec les quatre cercles inscrit et ex inscrits, est égale à l'un des deux autres côtés ou à la somme de ces mêmes côtés ou à leur différence.*

46. *Couper une circonférence donnée O en deux parties égales, par une autre circonférence de rayon donné* R (*fig.* 48).

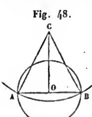


Fig. 48.

Menons un diamètre AB de la circonférence O, et OC perpendiculaire sur AB. Du point A comme centre, avec $AC = R$ pour rayon, décrivons une circonférence qui coupe la perpendiculaire OC au point C. Si du point C comme centre, avec R pour rayon, on décrit une circonférence, elle répondra à la question puisqu'elle passera par les extrémités du diamètre AB.

Si l'on suppose que AB tourne autour du point O, la perpendiculaire OC, toujours égale à $\sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AO}^2}$, tournera autour du même point, de sorte que le lieu des centres des circonférences qui satisfont à l'énoncé, est une circonférence concentrique à la circonférence proposée et de rayon égal à $\sqrt{R^2 - r^2}$, en désignant AO par r.

On voit que le problème est impossible si l'on a $R < r$.

47. *Tracer entre deux circonférences données O et O′ une droite de longueur donnée, parallèle à une direction donnée* KL (*fig.* 49).

Supposons le problème résolu, et soit AB la droite demandée. Par le centre O, menons OC égale et parallèle à AB. La figure OABC sera un parallélogramme, et la position du point C sera parfaitement déterminée : on aura d'ailleurs

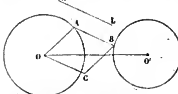


Fig. 49.

$$CB = OA.$$

On est donc conduit à décrire du point C comme centre, avec un rayon égal à celui de la circonférence O, une circonférence qui coupera la circonférence O′ au point B. Il restera à mener par le point B une parallèle à la direction KL. Le problème pourra admettre une ou deux solutions ou être impossible.

48. *Par un point donné, mener une sécante qui partage une circonférence donnée dans le rapport de deux nombres donnés p et q* (*fig.* 50).

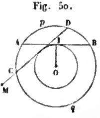


Fig. 50.

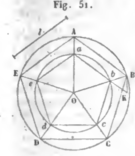
On divisera la circonférence donnée en $p+q$ parties égales. Supposons que l'arc ApB contienne p de ces parties, le reste de la circonférence ou l'arc AqB en contiendra q. Du centre O, on abaissera alors OI perpendiculaire sur la corde AB et, du point O comme centre avec OI pour rayon, on décrira une circonférence. Il ne restera plus qu'à mener par le point donné M une tangente à cette circonférence ; car cette tangente déterminera dans la grande circonférence une corde CD égale à AB. Les arcs sous-tendus par CD, égaux aux arcs sous-tendus par AB, répondront donc à la question.

49. *Construire un polygone régulier de côté donné* (*fig.* 51).

Supposons qu'on veuille construire un pentagone régulier dont le côté

ait une longueur l. On tracera une circonférence de rayon quelconque Oa, qu'on divisera en cinq parties égales, de manière à y inscrire le pentagone régulier $abcde$; on en tracera les rayons qu'on prolongera s'il est nécessaire. On portera ensuite sur ab, à partir du point a, une longueur aK $= l$. Par le point K, on mènera KB parallèle à Oa, jusqu'à la rencontre de Ob. Puis du point O comme centre, avec OB pour rayon, on décrira une circonférence dont les intersections avec les rayons du pentagone auxiliaire, seront les sommets du pentagone demandé. En effet, AB est évidemment parallèle à ab, et le parallélogramme KBAa donne alors

Fig. 51.

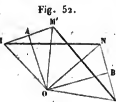


$$AB = aK = l.$$

50. *Une droite mobile dans un plan peut toujours être regardée comme exécutant un mouvement de rotation autour d'un point de ce plan* (*fig.* 52).

Soient MN, M'N', deux positions quelconques, *non parallèles*, de la droite donnée. Joignons les extrémités M et M', N et N', et par les points A et B, milieux des droites MM', NN', élevons sur ces droites les perpendiculaires AO et BO. Les deux triangles OMN, OM'N', seront égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. L'angle MON sera donc égal à l'angle M'ON' et, par suite, retranchant la partie commune, l'angle MOM' sera égal à l'angle NON'. Il en résulte que, si l'on fait tourner le triangle OMN ou la droite MN autour du point O, de manière que le point M vienne en M', le point N viendra nécessairement en N'.

Fig. 52.



Maximums et Minimums.

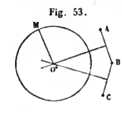
51. *Distance d'un point à une circonférence.*

On appelle *distance* d'un point à une circonférence, la plus petite ou la plus grande droite qu'on puisse mener de ce point à la circonférence. On obtient cette plus petite et cette plus grande droite en joignant le point donné au centre de la circonférence (*Géom.*, 58).

D'après cela, on peut facilement *tracer par un point donné* M *une circonférence* O *qui passe à égale distance de trois points donnés* A, B, C, *non en ligne droite, pourvu que ces points soient tous les trois à l'intérieur ou à l'extérieur de la circonférence demandée* (*fig.* 53).

En effet, les distances OA, OB, OC, devant être égales, le point O se confondra avec le centre de la circonférence passant par les points A, B, C. Le point O étant déterminé, il suffira de décrire du point O comme centre, avec OM pour rayon, une circonférence qui sera la circonférence demandée.

Fig. 53.



52. *Distance de deux circonférences* (*fig.* 54).

Lorsque deux circonférences sont extérieures ou intérieures, la plus grande et la plus petite des lignes droites qu'on peut mener entre les deux circonférences, passent par leurs centres.

Fig. 54.

En effet, menons entre les deux circonférences O et O' une droite quelconque MN, et supposons que la ligne des centres détermine dans ces deux circonférences les diamètres AC et BD. Le quadrilatère OMNO' donnera :

si les circonférences sont *extérieures*,

$$OO' < OM + MN + NO',$$

c'est-à-dire

$$AB < MN;$$

et si les circonférences sont *intérieures*,

$$OM \text{ ou } OO' + O'B + AB < OO' + O'N + MN,$$

c'est-à-dire

$$AB < MN.$$

Le même quadrilatère donnera :
si les circonférences sont *extérieures*,

$$OM + OO' + O'N > MN,$$

c'est-à-dire

$$CD > MN;$$

et si les circonférences sont *intérieures*,

$$OM + OO' + O'N > MN,$$

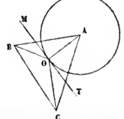
c'est-à-dire

$$CB > MN.$$

53. *Trouver le point dont la somme des distances à trois points donnés non en ligne droite, est un minimum* (*fig.* 55).

Soient A, B, C, les trois points donnés, O le point cherché. La somme AO + BO + CO devant être un minimum, si l'on suppose que AO demeure constant, en conservant la valeur voulue, il faudra que la somme BO + CO soit aussi un minimum. Le point O se trouve, dans l'hypothèse indiquée, sur une circonférence décrite du point A comme centre, avec AO pour rayon. La somme BO + CO sera donc un minimum, quand les deux lignes BO et CO feront des angles égaux avec le rayon AO. En effet, elles seront alors également inclinées sur la tangente MT au point O. Par suite, par rapport à tous les points de cette tangente, et à plus forte raison, par rapport à tous les points de la circonférence qui est entièrement située au delà de MT, la somme BO + CO sera bien un minimum (5, 1°). On verrait, par un raisonnement analogue, que les lignes AO et BO doivent

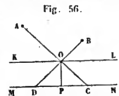

Fig. 55.



être également inclinées sur CO. Les trois angles formés autour du point O par les lignes AO, BO, CO, doivent donc être égaux entre eux, et chacun doit représenter $\frac{4}{3}$ d'angle droit. On obtiendra, d'après cela, le point O en décrivant sur chacun des côtés du triangle ABC un segment capable de 120°.

54. *Trouver le point dont la somme des distances à deux points donnés et à une droite donnée, est un minimum* (*fig.* 56). (Les deux points donnés sont supposés d'un même côté de la droite donnée.)

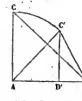
Fig. 56.



Soient A et B les deux points donnés, MN la droite donnée, O le point cherché. Si par le point O on abaisse OP perpendiculaire sur MN, la somme AO + BO + OP doit être un minimum. On peut dès lors considérer le point P au lieu de la droite MN. La somme des distances du point O aux trois points A, B, P, devant être un minimum, il faut (53) que les trois angles formés autour du point O soient égaux. Mais, de plus, si l'on mène par le point O une parallèle KL à MN, comme tous les points de cette parallèle sont à la même distance de MN, il faut que la somme AO + BO soit un minimum par rapport à cette parallèle. Les droites AO et BO doivent donc faire des angles égaux avec cette parallèle (5, 1°) ou avec MN; et, comme ces mêmes lignes doivent faire avec OP des angles égaux à $\frac{4}{3}$ de droit (53), elles feront avec MN des angles égaux à $\frac{1}{3}$ de droit. Il suffira de mener par les points A et B des droites remplissant cette condition, et elles se couperont au point O demandé.

55. *Parmi tous les triangles formés avec deux côtés donnés, celui dans lequel ces côtés sont perpendiculaires, a l'aire maximum* (*fig.* 57)

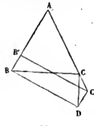
Fig. 57



Soient AB et AC les deux côtés donnés : ils déterminent un triangle rectangle CAB. Le point C restant toujours à la même distance du point A, considérons un second triangle C'AB. Menons la hauteur C'D' de ce second triangle. On aura C'D' < C'A ou que CA. Les deux triangles CAB, C'AB, ayant même base, celui qui a la plus grande hauteur a la plus grande aire.

56. *On donne un angle* A; *en joignant deux points* B *et* C *pris sur chacun de ses côtés, on forme un triangle* ABC. *Si la somme* AB + AC *doit rester constante, dans quel cas le périmètre du triangle* ABC *est-il un minimum?* (*fig.* 58.)

Fig. 58.



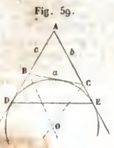
Supposons le problème résolu, et comparons le triangle demandé ABC à un autre triangle AB'C', pour lequel on ait AB' + AC' = AB + AC : on en déduira nécessairement BB' = CC'. Par le point C', menons C'D égale et parallèle à BB', et joignons BD. Le parallélogramme BB'C'D nous donnera BD = B'C'. Donc, pour que BC soit un minimum, il faut qu'on ait dans tous les cas BC < BD, c'est-à-dire il faut que BC soit perpendiculaire sur CD. Mais alors, d'a-

près le parallélogramme BB'C'D, l'angle B'BD est le supplément l'angle C'DB. L'angle B'BD est formé de l'angle ABC et de l'angle CE l'angle C'DB est formé de l'angle BDC et de l'angle CDC'. Le trian BCD étant rectangle en C, les angles CBD et BDC sont complém taires; il en sera donc de même des angles restants ABC et CDC'. triangle CC'D étant isocèle, on peut remplacer l'angle CDC' par l'an DCC'; ce dernier a pour complément l'angle ACB puisque l'angle BCD droit. Donc les deux angles ABC et ACB ont même complément et s égaux, le triangle ABC est donc isocèle. Si l'on donne AB + AC = on n'aura pour le former qu'à prendre $AB = AC = \frac{m}{2}$.

Le problème qu'on vient de résoudre permet de passer au problè suivant :

Étant donné un triangle ABC (*fig.* 59), *on prend sur les prolon ments des côtés* AB, AC, *des longueurs* BD *et* CE, *telles, que leur som soit constamment égale au troisième côté* B*; dans quel cas la longueur* DE *est-elle un mi num ?*

Fig. 59.

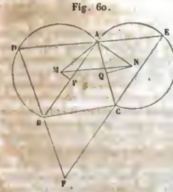


La somme AD + AE demeurant égale au pé mètre $2p$ du triangle ABC et l'angle A étant c stant, on voit qu'il suffit, pour répondre à question, de prendre $AD = AE = p$.

Si l'on mène les bissectrices des angles DI ECB, elles se couperont au centre d'un des cerc ex-inscrits du triangle ABC. Les points de cont de ce cercle avec les prolongements des cô AB et AC, seront évidemment les points cherc D et E *.

57. *Circonscrire à un triangle donné* ABC *un triangle* DEF *sembla à un autre triangle donné* D'E'F', *et dont l'aire soit un maxim* (*fig.* 60).

Fig. 60.



Si sur le côté AB comme co on décrit un segment capable l'angle D', si sur le côté AC on déc de même un segment capable l'angle E', il est évident que les so mets D et E, homologues des so mets D' et E', devront se trou respectivement sur les arcs ob nus. De plus, le côté DE devra p ser par le point A.

Les aires des triangles semblab sont proportionnelles aux carrés leurs côtés homologues. Donc, s triangle DEF est un maximum, il

(*) La Trigonométrie donne pour expression du minimum DE, dan triangle isocèle ADE,

$$DE = 2\,AD \sin \tfrac{1}{2} A = 2p\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

sera de même de DE^2 et par conséquent de DE. La question est ainsi ramenée à tracer par le point A une sécante telle, que la partie interceptée sur cette sécante par les deux circonférences décrites soit un maximum.

Nous savons (4, 2°) que, dans ce cas, cette sécante doit être parallèle à la ligne des centres. Mais il y a une remarque importante à faire. Les segments capables des angles D' et E' peuvent être décrits sur un côté quelconque du triangle ABC, et l'on obtiendra de la sorte *six* triangles, dont chacun sera maximum pour toute la série des triangles semblables qu'on trouvera en considérant les mêmes segments capables. *Il reste donc*, pour résoudre complétement la question, *à déterminer le plus grand de ces six triangles.*

Or le côté DE, étant parallèle à la ligne des centres MN, est égal à 2 MN. Il faut, par suite, voir dans quelle hypothèse la distance des centres des deux segments est un maximum. Cette condition sera remplie, si les points M et N s'éloignent des côtés AB et AC, c'est-à-dire si les perpendiculaires MP et NQ, abaissées des centres M et N sur les cordes AB et AC, deviennent aussi grandes que possible. Mais MP croît avec AB et avec l'angle MAP $\left(\text{on a trigonométriquement } MP = AP \tang MAP = \frac{AB}{2} \tang MAP\right)$; on doit, par conséquent, faire en sorte que, AB étant le plus grand côté du triangle ABC, l'angle MAP soit aussi le plus grand possible ou, ce qui revient au même, que l'angle PMA = D soit le plus petit possible.

On décrira donc sur le plus grand côté AB du triangle ABC un segment capable du plus petit angle D' du triangle D'E'F et ensuite, sur le côté moyen AC du triangle ABC, un segment capable de l'angle moyen E' du triangle D'E'F'. On mènera par le point A la sécante DE parallèle à la ligne des centres MN, et il ne restera plus qu'à joindre les points D et E aux sommets B et C, pour obtenir en F le troisième sommet du triangle demandé.

Lieux géométriques.

58. *Trouver le lieu géométrique des points d'où l'on voit deux cercles donnés sous des angles égaux* (*fig.* 61).

Soient les deux cercles C et C', et soit M un point du lieu. Si par ce point on mène deux tangentes à chacune des circonférences, les angles AMB et A'MB' formés par ces tangentes devront être égaux d'après l'énoncé. Il en sera de même de leurs moitiés déterminées en joignant le point M, aux centres C et C'. Les triangles rectangles AMC, A'MC', seront donc semblables et donneront

Fig. 61.

$$\frac{MC}{MC'} = \frac{AC}{A'C'} = \text{constante.}$$

La question est donc ramenée à chercher le lieu des points tels, que le rapport de leurs distances aux centres fixes C et C' reste constamment égal à celui des rayons AC et A'C' : ce lieu est, comme nous le savons (*Géom.*, 91), une circonférence de cercle facile à déterminer.

Si l'on demandait, d'après cela, *le point d'où trois circonférences données* C, C', C", *sont vues sous le même angle*, ce point se trouverait à l'intersection de deux circonférences, dont l'une contiendrait tous les

points d'où l'on aperçoit les cercles C et C' sous le même angle, et l'autre tous les points remplissant une condition analogue pour les cercles C et C''.

59. *Trouver le lieu géométrique des points d'un plan également éclairés par deux foyers lumineux placés dans ce plan, les intensités de ces foyers étant représentées à l'unité de distance par les nombres a et b* (*fig.* 62.)

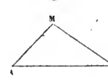


Fig. 62.

Soit M un point du lieu. Si l'on désigne par i et i' les quantités de lumière envoyées par les points A et B au point M, nous aurons, d'après un principe connu et déjà rappelé (*Alg. élém.*, 199),

$$\frac{i}{a} = \frac{1}{\overline{AM}^2}, \quad \frac{i'}{b} = \frac{1}{\overline{BM}^2}.$$

i devant être égal à i', ces proportions auront mêmes antécédents, et il viendra (*Alg. élém.*, 47),

$$\frac{a}{b} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{BM}^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Le lieu des points M est donc une circonférence de cercle (*Géom.*, 91).

La question suivante dépend du problème que nous venons de résoudre : *Trouver dans le plan déterminé par trois points lumineux le point également éclairé par chacun d'eux.*

60. *Un angle droit tourne autour de son sommet, et ses côtés prolongés coupent une circonférence située dans son plan : trouver le lieu des milieux des cordes ainsi déterminées* (*fig.* 63).

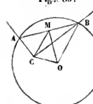


Fig. 63.

Soit ACB l'une des positions de l'angle droit, dont le sommet C est fixe. Prenons le milieu M de la corde AB correspondante, et joignons ce point M au sommet C et au centre O de la circonférence. Le triangle ACB étant rectangle en C, la médiane CM y sera égale à la moitié de l'hypoténuse AB (*Géom.*, 108).

Le triangle rectangle OMB donnant

$$\overline{OM}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{OB}^2,$$

on pourra substituer CM à MB, et il viendra

$$\overline{OM}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{OB}^2;$$

ce qui montre que la somme des carrés des distances du point M aux deux points fixes C et O est constante. Dès lors le lieu cherché est une circonférence de cercle facile à déterminer d'après ce qui précède (*Géom.*, 108), et dont le centre est au milieu de CO.

61. *Trouver le lieu géométrique des points tels, que la somme des carrés de leurs distances au sommet d'un polygone régulier d'un nombre pair de côtés, soit égale à une constante donnée* (*fig.* 64).

Fig. 64.

Le polygone étant régulier et ayant un nombre pair de côtés, les lignes qui joignent deux sommets diamétralement opposés, passent par son centre. Soit, en supposant $2n$ côtés, A_1OA_{n+1} l'une de ces

lignes, et soit M un point du lieu cherché. O étant le centre du polygone, MO sera médiane du triangle $A_1 M A_{n+1}$, de sorte qu'on pourra écrire

$$A_1 M^2 + A_{n+1} M^2 = 2 MO^2 + 2 A_1 O^2.$$

En considérant toutes les autres lignes qui joignent deux sommets diamétralement opposés, on obtiendra $n - 1$ autres équations analogues. Si l'on ajoute membre à membre toutes ces équations, et si l'on désigne par K^2 la somme donnée, on aura

$$K^2 = 2n . MO^2 + 2n . A_1 O^2,$$

d'où

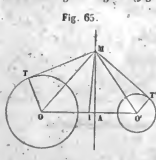
$$MO = \sqrt{\frac{K^2}{2n} - A_1 O^2}.$$

On voit par là que, la distance MO étant constante, le lieu demandé est une circonférence de cercle concentrique au cercle inscrit ou circonscrit au polygone proposé. Il faut d'ailleurs qu'on ait $\frac{K^2}{2n} > A_1 O^2$. Le lieu se réduit à un point si l'on a $K^2 = 2n . A_1 O^2$; il n'existe plus si $\frac{K^2}{2n}$ est $< A_1 O^2$.

Axe radical et centre radical.

62. *Lieu des points d'où l'on peut mener à deux circonférences données des tangentes égales* (*fig.* 65).

Fig. 65.



Soient les deux circonférences O et O', et M un point du lieu : les tangentes MT et MT', menées de ce point aux deux circonférences seront égales. Or on a

$$MT^2 = MO^2 - OT^2,$$
$$MT'^2 = MO'^2 - O'T'^2.$$

Il en résultera

$$MO^2 - OT^2 = MO'^2 - O'T'^2,$$

c'est-à-dire

$$MO^2 - MO'^2 = OT^2 - O'T'^2 = R^2 - R'^2,$$

en désignant par R et R' les rayons des deux circonférences. On voit par là que la question est ramenée à chercher le lieu des points dont la différence des carrés des distances aux centres O et O' est égale à la quantité constante $R^2 - R'^2$. Le lieu de ces points est une perpendiculaire (*) menée à la ligne des centres OO', en un point A déterminé de manière que sa distance AI au milieu de OO' soit égale à $\frac{R^2 - R'^2}{2D}$, en appelant D la distance des centres (*Géom.*, 109).

On donne à la perpendiculaire MA le nom d'*axe radical* des deux circonférences considérées.

(*) Le lieu se compose ici d'une *seule* perpendiculaire, située à *droite* du milieu I, parce que OT étant > O' T', MO doit surpasser constamment MO'.

De

$$AI = \frac{R^2 - R'^2}{2D}$$

on déduit

$$OA = \frac{D}{2} + \frac{R^2 - R'^2}{2D}.$$

Il sera facile de *construire* la longueur OA, et par suite l'axe radical.

On peut aussi, si les deux circonférences proposées sont *extérieures*, leur mener une tangente commune. *Le milieu de cette tangente commune appartient nécessairement à l'axe radical.* On n'aura donc qu'à abaisser de ce milieu une perpendiculaire sur la ligne des centres.

Si les circonférences données sont *tangentes extérieurement ou intérieurement*, on a

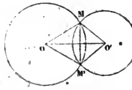
$$D = R \pm R', \quad \text{d'où} \quad OA = \frac{D}{2} + \frac{R^2 - R'^2}{2D} = \frac{R \pm R'}{2} + \frac{R \mp R'}{2} = R;$$

dans ce cas, l'axe radical n'est donc autre chose que la tangente commune aux deux circonférences.

Si les circonférences données sont *sécantes*, les extrémités de la corde commune MM' (*fig.* 66) satisfont identiquement à la relation

$$MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2.$$

Fig. 66.



L'axe radical se confond donc alors avec la corde commune indéfiniment prolongée.

Enfin, lorsque les circonférences données sont *intérieures*, il faut avoir recours à la formule générale

$$OA = \frac{D}{2} + \frac{R^2 - R'^2}{2D},$$

et construire OA.

Si l'on suppose D = o, il vient

$$OA = \frac{R^2 - R'^2}{o} = \infty.$$

Donc *deux circonférences concentriques n'ont pas d'axe radical.*

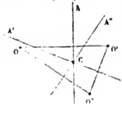
Si les circonférences O et O' sont *égales*, on a

$$R = R' \quad \text{et} \quad OA = \frac{D}{2}:$$

l'axe radical passe par le milieu de la ligne des centres.

63. Considérons trois cercles O, O', O" dont les centres ne soient pas en ligne droite. Prenons-les deux à deux, et désignons respectivement par A, A', A", leurs axes radicaux (*fig.* 67). Les axes A et A' étant perpendiculaires à deux droites OO' et O'O" qui se coupent, se couperont eux-mêmes. De leur point d'intersection partiront donc trois tangentes égales menées aux trois circonférences; c'est-à-dire que ce point d'intersection appartiendra à l'axe radical A" des circonférences O et O". Le point C, commun aux trois axes radicaux, s'appelle *centre radical* des trois circonférences.

Fig. 67.



Il résulte de là que, *si les trois circonférences proposées sont deux à deux sécantes, les cordes communes se croisent en un même point qui est le centre radical* (62).

On peut se servir de cette propriété pour construire l'axe radical de deux circonférences données. On n'a, en effet, qu'à les couper par une troisième circonférence. Les cordes respectivement communes à cette troisième circonférence et aux deux autres se couperont en un point qui appartiendra à l'axe radical demandé.

Réciproquement, *si d'un point de l'axe radical de deux circonférences on leur mène respectivement deux sécantes, les quatre points d'intersection obtenus appartiendront à une même circonférence* (*fig.* 68).

Fig. 68.

On aura

$$MB.MC = MT^2,$$
$$MD.ME = MT'^2.$$

Il en résultera

$$MB.MC = MD.ME,$$

relation qui prouve la proposition énoncée (*Géom.*, 112).

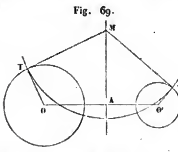
La considération des axes radicaux simplifie beaucoup les problèmes *sur les contacts :* nous en donnerons des exemples.

Application.

64. *Trouver le lieu géométrique des centres des circonférences qui coupent à angle droit deux circonférences données* (*fig.* 69)

L'angle de deux courbes est l'angle de leurs tangentes au point d'intersection. Si cet angle est droit et si les deux courbes sont des circonférences, les rayons menés dans chacune d'elles à un même point d'intersection seront aussi à angle droit. Dans le cas considéré, les rayons OT et O'T' qui joignent les centres O et O' aux points d'intersection des circonférences données avec *l'une* des circonférences cherchées, seront donc *tangents* à cette même circonférence. On obtiendra donc son centre M en menant les perpendiculaires TM et T'M aux rayons OT et O'T'. Mais ces tangentes aux deux circonférences O et O' devant être égales comme rayons du cercle demandé, le centre M de ce cercle appartiendra à l'axe radical des circonférences O et O' : cet axe radical se confond donc avec le lieu géométrique demandé.

Fig. 69.



Il est facile de voir que la ligne des centres OO' est à son tour un axe

radical commun à tous les cercles qui coupent orthogonalement les cercles O et O'. En effet, les tangentes menées du point O à tous ces cercles sont égales comme rayons du cercle O; de même, celles menées du point O', sont égales comme rayons du cercle O'. Par suite, les deux points O et O' appartiennent à tous les axes radicaux des cercles M considérés deux à deux : OO' est donc bien un axe radical commun à tous ces cercles.

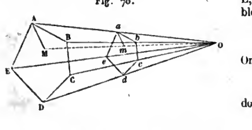
Centres de similitude.

65. Nous avons vu (*Géom.*, 101) ce qu'on entendait par centres de similitude directe ou inverse de deux polygones. Nous voulons compléter ici cette importante théorie.

Deux polygones semblables, placés de manière à avoir leurs côtés deux à deux parallèles et dirigés dans le même sens ou en sens contraire, ont un centre de similitude directe ou inverse (*fig.* 70).

Soient les sommets homologues A, a, B, b. Prolongeons les droites Aa et Bb jusqu'à leur point de rencontre O, puis joignons ce point O aux autres sommets C, c, D, d, E, e. Les triangles semblables ABO, abO, donnent

Fig. 70.



$$\frac{AB}{ab} = \frac{OB}{Ob}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc},$$

donc

$$\frac{BC}{bc} = \frac{OB}{Ob}.$$

Mais les angles ABO et abO étant égaux ainsi que les angles ABC, abc, les angles OBC, Obc, seront nécessairement égaux. Par suite, les triangles OBC, Obc, seront semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. L'angle BOC sera donc égal à l'angle bOc, c'est-à-dire que les points B, b, O, étant en ligne droite, il en sera de même des points C, c, O. On continuera cette démonstration de proche en proche, et l'on en conclura que le point O est un centre de similitude directe ou inverse des deux polygones.

On peut aussi considérer deux points *homologues* M et m, *intérieurs* ou *extérieurs* aux deux polygones, et prouver que la ligne Mm passe également par le centre de similitude O.

En effet, les points M et m étant homologues, AM sera parallèle à am, l'angle OAM égal à l'angle Oam, et l'on aura

$$\frac{AM}{am} = \frac{AO}{aO}.$$

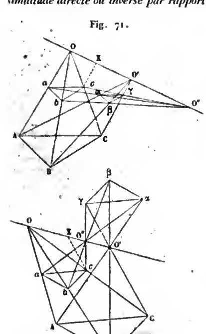
Les deux triangles AOM et aOm seront donc semblables, l'angle AOM sera égal à l'angle aOm, et les trois points M, m, O, seront en ligne droite.

Ainsi, *quand deux polygones semblables sont placés de manière à avoir un centre de similitude* (*), *toute ligne joignant deux points homologues*

(*) Pour abréger, on peut appeler deux pareils polygones : *homothétiques directs ou inverses*. (CHASLES.)

rattachés comme on voudra aux deux polygones, contient le centre de similitude.

66. *Lorsque deux polygones sont placés de manière à avoir un centre de similitude directe ou inverse par rapport à un troisième polygone, ils admettent par rapport à eux-mêmes un troisième centre de similitude directe ou inverse;* en d'autres termes, *deux polygones homothétiques à un troisième sont homothétiques entre eux (fig. 71).*



Soient les polygones ABC, *abc*, homothétiques au polygone αβγ. Les côtés AB, *ab*, parallèles au côté αβ, seront parallèles entre eux, et dirigés dans le même sens ou en sens contraires suivant que leur homothétie par rapport au polygone αβγ sera ou non de même nom. On pourra en dire autant des autres côtés BC, *bc*, CA, *ca*. Par conséquent (65), les deux polygones ABC, *abc*, seront homothétiques *directs* ou *inverses*, suivant que leur homothétie par rapport au polygone αβγ *sera ou non de même nom.*

Il résulte de cette dernière remarque que, *parmi les trois systèmes formés en considérant deux à deux les polygones donnés, il y en aura toujours un nombre impair* (c'est-à-dire *un* ou *trois*) *dont l'homothétie sera directe.*

67. Ceci posé, *les trois centres de similitude qui correspondent aux systèmes obtenus, sont toujours en ligne droite (fig. 71).*

Soient O, O', O", les trois centres de similitude. Désignons par X le point qui, rattaché au polygone *abc*, est l'homologue du point O' rattaché au polygone αβγ. O' étant le centre de similitude des polygones *abc*, αβγ, le point X se trouvera nécessairement sur la droite O"O', *c*X sera parallèle à γO' ou à CO', et l'on aura la proportion (65)

$$\frac{cX}{\gamma O'} = \frac{bc}{\beta\gamma}.$$

Le point O' étant rattaché au polygone ABC, son homologue par rapport au polygone *abc* se trouvera sur la droite OO' et sur la parallèle *c*X à CO', en un point X_1 tel, qu'on ait

$$\frac{cX_1}{CO'} = \frac{bc}{BC}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\gamma O'}{CO'} = \frac{\beta\gamma}{BC}.$$

Les conséquents des deux premières proportions considérées formant proportion, il en sera de même de leurs antécédents, et il viendra

$$\frac{cX}{cX_1} = \frac{bc}{bc}.$$

Le point X_1 se confond donc avec le point X, et la droite O″O′ qui contient le point X, avec la droite OO′ qui contient ce même point.

Quand la similitude est *directe*, le centre de similitude est *externe*; il est *interne*, quand la similitude est *inverse*. Les trois polygones donnés, considérés deux à deux, peuvent donner six centres de similitude, trois externes et trois internes. D'après ce qui précède (66), les trois systèmes qui correspondent à une position donnée des trois polygones, admettent *un* ou *trois* centres de similitude directe. Par conséquent, *les trois centres de similitude externes sont en ligne droite;* ou bien, *deux centres internes et le centre externe correspondant au troisième centre interne, sont en ligne droite.*

68. La théorie des centres de similitude simplifie beaucoup l'emploi de *la méthode des figures semblables* (6). Reprenons, pour le montrer, le problème suivant déjà résolu d'une autre manière (7, 1°) : *Inscrire dans un triangle donné* ABC *un triangle semblable à un autre triangle donné def* (*fig.* 72).

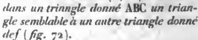
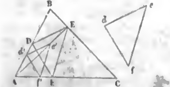
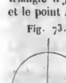


Fig. 72.



Il s'agit d'inscrire dans le triangle ABC un triangle dont les côtés soient parallèles à ceux du triangle *def*. On tracera donc, dans le triangle ABC, *d′f′* parallèle à *df*; puis *d′e′* et *f′e′* respectivement parallèles à *de* et à *fe*. Le triangle *d′f′e′* ainsi formé sera homothétique au triangle cherché DFE, et le point A sera pour ces triangles un centre de similitude externe (65). On mènera donc la droite A*e′* qui viendra couper le côté BC au sommet E. Il ne restera plus qu'à tracer par ce sommet des parallèles aux côtés *ed*, *ef*.

Fig. 73.



69. On peut étendre facilement aux circonférences ce qu'on vient de dire des polygones semblables.

Deux circonférences quelconques sont des figures semblables, et leur rapport de similitude est égal à celui de leurs rayons (*fig.* 73).

Soient les circonférences C et C′. Prolongeons la ligne des centres CC′, et menons les rayons parallèles CA et C′*a*. La ligne A*a* prolongée coupera CC′ au point O, et nous aurons

$$\frac{Oa}{OA} = \frac{C'a}{CA} = \text{constante}.$$

Les deux circonférences sont donc semblables, et leur rapport de similitude est bien celui de leurs rayons.

Les rayons parallèles CA, C'a, étant dirigés dans le même sens, le point O est un centre de similitude externe. Si l'on avait mené le rayon C'n', toujours parallèle au rayon CA, mais dirigé en sens contraire, on aurait obtenu le point O' comme centre de similitude interne.

On a d'ailleurs

$$\frac{Oa}{OA} = \frac{C'n}{CA} = \frac{OC'}{OC} \quad \text{et} \quad \frac{O'n'}{O'A} = \frac{C'a'}{CA} = \frac{O'C'}{O'C},$$

d'où

$$\frac{O'C'}{O'C} = \frac{OC'}{OC}.$$

Les deux centres de similitude O *et* O' *divisent donc harmoniquement la distance des centres* CC' (25).

La démonstration précédente prouve que deux figures *à centres* sont à la fois homothétiques directes et homothétiques inverses.

On voit que les tangentes aux points homologues des deux circonférences considérées sont nécessairement *parallèles*, puisqu'elles sont perpendiculaires à des rayons parallèles.

Les tangentes communes aux deux circonférences joignant deux points homologues de ces circonférences, passent par l'un des deux centres de similitude (65).

On déduit de là une construction simple de la tangente commune à deux circonférences; car, le point O ou le point O' ayant été déterminé comme précédemment, il suffit de mener par ce point une tangente à l'une des circonférences: elle sera nécessairement tangente à l'autre circonférence.

Lorsque les circonférences considérées sont tangentes extérieurement, leur point de contact devient le centre de similitude interne; lorsqu'elles sont tangentes intérieurement, leur point de contact devient le centre de similitude externe.

Lorsque deux circonférences sont concentriques, les centres de similitude se confondent avec le centre commun des deux circonférences.

Lorsque deux circonférences sont égales, le centre de similitude externe s'éloigne à l'infini, et le centre de similitude interne est au milieu de la ligne des centres.

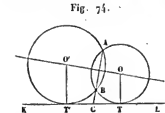
70. Trois circonférences considérées deux à deux étant semblables, conduisent à six centres de similitude. D'après ce que nous avons dit relativement aux polygones (67), les trois centres de similitude externes sont en ligne droite et correspondent à l'axe de similitude externe. En considérant deux centres internes et le centre externe qui correspond au centre interne laissé de côté, on obtient les trois axes de similitude internes.

71. *Remarque.* — Tout ce qu'on vient d'établir relativement à l'homothétie des figures planes, s'applique sans aucun changement aux polyèdres ou aux sphères homothétiques. Ainsi, par exemple, *les centres de similitude externe et interne de deux sphères divisent harmoniquement la distance des centres de ces sphères. Trois sphères présentent six centres de similitude, trois externes, trois internes, et quatre axes, l'un de similitude externe, les trois autres de similitude interne.*

Problèmes sur les contacts.

72. *Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés et touche une droite donnée* (*fig.* 74).

Fig. 74.



Supposons le problème résolu. Soient A et B les deux points donnés, KL la droite donnée.

Si la corde AB prolongée coupe KL, et si CT désigne la distance du point d'intersection C au point de contact de KL avec la circonférence cherchée, on devra avoir (*Géom.*, 111)

$$\overline{CT}^2 = AC.BC.$$

On déterminera donc la longueur CT en cherchant une moyenne proportionnelle aux longueurs AC et BC; puis on portera cette moyenne proportionnelle de part et d'autre du point C, en CT et en CT'. On élèvera alors OO' perpendiculaire sur le milieu de AB, TO et T'O' perpendiculaires sur KL. Les points de rencontre O et O' seront les centres des deux circonférences qui satisfont à l'énoncé.

Si AB était parallèle à KL, il n'y aurait qu'une solution. Le point de contact T s'obtiendrait en élevant une perpendiculaire sur le milieu de AB, jusqu'à la rencontre de KL.

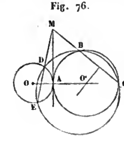
73. *Mener par un point donné une circonférence qui touche deux droites données* (*fig.* 75).

Fig. 75.

Soit D le point donné : il est nécessairement situé dans l'un des quatre angles formés par les droites données; soit xAy cet angle. Si l'on en trace la bissectrice AM, on aura un lieu du centre de la circonférence demandée (*Géom.*, 82). AM donnant la direction d'un diamètre de cette circonférence, si l'on abaisse du point D la perpendiculaire DP sur AM, et si on la prolonge d'une longueur PD' = DP, le point D' appartiendra aussi à la circonférence demandée. La question est donc ramenée à faire passer par les deux points D et D' une circonférence tangente à la droite Ax ou Ay (72).

74. *Faire passer par deux points donnés une circonférence qui touche une circonférence donnée* (*fig.* 76).

Fig. 76.



Soient B et C les deux points donnés et O la circonférence donnée. Le problème n'est évidemment possible que si les points B et C sont ensemble extérieurs ou intérieurs à la circonférence O. Ceci posé, faisons passer par les points B et C une circonférence quelconque qui coupe en D et en E la circonférence O. Les cordes BC et DE venant se couper en M, ce point M sera le centre radical de la circonférence O, de la circonférence sécante et de la circonférence cherchée (62, 63). Par

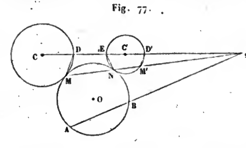
suite, cette circonférence devant être tangente à la circonférence O, on aura l'axe radical de ces deux circonférences ou leur point de contact A, en menant par le point M une tangente MA à la circonférence O (62). La question sera donc ramenée à faire passer une circonférence par trois points donnés. Le problème aura deux solutions, puisqu'on peut mener deux tangentes par le point M à la circonférence O.

S'il arrivait que la corde BC fût parallèle à la corde DE, la question se réduirait à mener une tangente au cercle O, parallèlement à la direction BC; il y aurait encore deux solutions.

75. *Par un point donné, faire passer une circonférence tangente à deux circonférences données* (*fig.* 77).

Supposons le problème résolu. Soient C et C' les circonférences données, A le point donné, et O la circonférence cherchée. Soient M et N les points de contact de la circonférence O avec les deux circonférences C et C'. Les points M et N seront les centres de similitude internes des circonférences C et C' par rapport à la circonférence O (69). Les trois centres de similitude d'un système de trois circonférences étant en ligne droite, le centre de similitude externe des circonférences C et C' se trouvera à la fois sur MN et sur CC' prolongées (69, 70). On peut déterminer à priori ce centre externe S (69), et le joindre au point A. La sécante SA coupe la circonférence O en un second point B, et l'on a

Fig. 77.



$$SB.SA = SN.SM.$$

D'autre part, les lignes MD, M'D', joignant des points homologues dans les circonférences C et C', sont parallèles entre elles : l'angle DMN est donc égal à l'angle D'M'S. Mais le quadrilatère ENM'D' étant inscrit dans la circonférence C', l'angle D'M'S, supplément de l'angle D'M'N, est égal à l'angle NED'. Dans le quadrilatère MDEN, les angles en M et en E sont donc à leur tour supplémentaires, et ce quadrilatère est inscriptible. On a, par conséquent,

$$SN.SM = SE.SD,$$

c'est-à-dire

$$SB.SA = SE.SD.$$

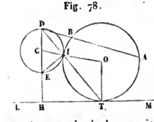
On peut déduire SB de cette relation, et la question est ramenée à faire passer une circonférence par deux points donnés A et B, de manière qu'elle touche l'une ou l'autre des circonférences C et C' (74).

Le problème qu'on vient de traiter admet quatre solutions, suivant que les circonférences données sont ensemble tangentes extérieurement ou intérieurement à la circonférence cherchée, ou bien, suivant que l'une étant tangente extérieurement, l'autre est tangente intérieurement à la même circonférence.

76. *Par un point donné, faire passer une circonférence tangente à une droite et à une circonférence données* (*fig.* 78).

Supposons le problème résolu. Soient C la circonférence donnée, LM la droite donnée, A le point donné et O la circonférence demandée. Cette circonférence touche LM au point T, et la circonférence C au point I. Si l'on mène la corde IT et si on la prolonge jusqu'au point D où elle rencontre de nouveau la circonférence C, le point I étant un centre de similitude des deux circonférences tangentes (69), les cordes IT et ID seront dans le rapport des rayons de ces deux circonférences. Par suite, les deux triangles OIT, CID, seront semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. Le rayon CD sera donc parallèle au rayon OT, c'est-à-dire perpendiculaire sur LM, et l'on pourra à priori déterminer la position du point D, en menant par le centre C une perpendiculaire sur la droite donnée.

Fig. 78.



Joignons maintenant DA, et cherchons à déterminer le second point B d'intersection de cette droite avec la circonférence demandée. On doit avoir

$$DB.DA = DI.DT.$$

Les triangles DIIT, DIE, sont évidemment semblables et donnent

$$\frac{DI}{DH} = \frac{DE}{DT},$$

d'où

$$DI.DT = DE.DH.$$

On aura donc

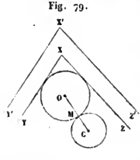
$$DB.DA = DE.DH.$$

Cette relation fera connaître DB, et la question sera ramenée à faire passer par deux points donnés A et B une circonférence tangente à une droite donnée LM (72). On trouvera donc deux solutions en supposant les deux circonférences tangentes extérieurement; on en trouvera deux autres, en les supposant tangentes intérieurement.

77. *Construire une circonférence tangente à deux droites données et à une circonférence donnée* (*fig.* 79).

Supposons le problème résolu. Soient XY et XZ les droites données, C la circonférence donnée, O la circonférence cherchée. La circonférence décrite du point O comme centre, avec OC pour rayon, sera concentrique à la circonférence demandée, et tangente à deux droites X'Y', X'Z', parallèles aux droites XY, XZ, et menées à une distance de ces droites précisément égale au rayon CM de la circonférence donnée. Quand on aura trouvé le centre de la circonférence auxiliaire OC, il suffira de diminuer son rayon de la longueur CM. La question est ainsi ramenée à tracer une circonférence passant par un point donné C, tangentiellement à deux droites données X'Y', X'Z' (73).

Fig. 79.



Le problème proposé est susceptible de quatre solutions, suivant qu'on considère la circonférence O comme tangente extérieurement ou intérieurement à la circonférence donnée.

78. *Construire une circonférence tangente à une droite donnée et à deux circonférences données* (*fig.* 80).

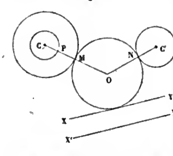


Fig. 80.

Supposons le problème résolu. Soient C et C' les circonférences données, XY la droite donnée, O la circonférence cherchée.

Si l'on augmente le rayon de cette dernière circonférence du rayon C'N, elle passera par le point C' et sera tangente à la circonférence CP, CP étant égal à la différence CM — C'N. De plus, la circonférence auxiliaire OC' devra être tangente à la droite X'Y', menée parallèlement à la droite XY, à une distance C'N.

La question sera donc ramenée à construire la circonférence OC', passant par le point C' et tangente à la circonférence CP et à la droite X'Y' (76); on diminuera ensuite son rayon de la longueur C'N, et l'on aura la circonférence demandée. Le problème admettra quatre solutions.

79. *Construire une circonférence tangente à trois circonférences données* (*fig.* 81).

Supposons le problème résolu, et soient C, C', C", les circonférences données, O la circonférence cherchée. Nous emploierons encore une circonférence auxiliaire. Nous considérerons la circonférence concentrique à la circonférence demandée, qui a pour rayon le rayon de cette circonférence augmenté, par exemple, du rayon C"P de la plus petite des trois circonférences données. Nous prendrons

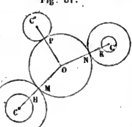


Fig. 81.

$$CH = CM - C''P,\ C'K = C'N - C''P,$$

et la question sera ramenée à faire passer une circonférence par le point C", tangentiellement aux deux circonférences CH et C'K (75). Une fois cette circonférence auxiliaire déterminée, on n'aura qu'à diminuer son rayon de la longueur C"P.

Le problème qu'on vient de résoudre admet huit solutions, suivant les positions relatives des trois circonférences données et de la circonférence demandée.

Des polygones étoilés.

80. Supposons une circonférence divisée en *n* parties égales aux

points A, B, C, D, E, etc. (*fig.* 82). Au lieu de joindre ces points successivement, de manière à former un polygone régulier convexe de n côtés, joignons-les de 2 en 2, de 3 en 3, ..., de p en p. *Supposons d'abord que n et p soient premiers entre eux*, et admettons qu'on ait

Fig. 82.

$$\text{arc AE} = \text{arc AB}.p.$$

Par convention, la circonférence proposée est égale à arc AB.n. La circonférence O et l'arc AE auront donc pour *plus petit commun multiple*

$$\text{arc AB}.n.p;$$

c'est-à-dire qu'on reviendra au point de départ, soit qu'on décrive p fois la circonférence, soit qu'on y porte successivement n fois l'arc AE. Mais, dans ce dernier cas, les cordes menées déterminent un polygone régulier *concave* de n côtés, qu'on appelle *polygone étoilé*.

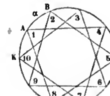
81. *Supposons maintenant que les nombres n et p admettent un plus grand diviseur commun q*. Le plus petit commun multiple de la circonférence et de l'arc AE sera

$$\text{arc AB}.\frac{n.p}{q};$$

et l'on voit qu'on reviendra au point de départ, après avoir décrit un polygone régulier concave étoilé, qui n'aura plus que $\frac{n}{q}$ côtés et dont le périmètre correspondra à $\frac{p}{q}$ circonférences. On retombera donc sur une solution déjà obtenue, en partant du polygone régulier convexe de $\frac{n}{q}$ côtés.

82. *Il y a*, d'après cela, *autant de polygones réguliers d'une certaine espèce, tant convexes qu'étoilés, que d'unités dans la moitié du nombre qui exprime combien il existe de nombres entiers inférieurs à n et premiers avec lui.*

Fig. 83.



Pour plus de simplicité, prenons $n = 10$. Les nombres entiers 1, 3, 7, 9, sont les seuls inférieurs à 10 et premiers avec lui. Donc, si l'on divise (*fig.* 83) une circonférence en 10 parties égales, et si l'on joint les points de division de 1 en 1, de 3 en 3, de 7 en 7 ou de 9 en 9, on ne reviendra au point de départ qu'après avoir compté 10 fois le premier arc considéré, c'est-à-dire qu'on formera ainsi *quatre* décagones réguliers.

Mais le premier et le dernier, le second et le troisième, seront évidemment *égaux* entre eux. En effet, les arcs $\frac{\text{circ}}{10}$ ou AαB et $\frac{9\,\text{circ}}{10}$ ou AβB, par exemple, forment une somme égale à la circonférence entière : ils ont mêmes extrémités et leurs cordes sont égales. Donc, en partant d'un même point A, ces arcs seront AB et AK, c'est-à-dire qu'ils auront toujours des cordes égales et seront seulement comptés en sens contraires. Les polygones correspondants seront donc bien égaux, ce qui achève de démontrer le théorème.

Le raisonnement employé est général. Si a, nombre entier inférieur à n, est premier avec n, le nombre $n-a$ remplira évidemment les mêmes conditions. Par conséquent, les nombres entiers inférieurs à n et premiers avec lui se divisent en deux séries parallèles dont les termes correspondants ont toujours une somme égale à n.

Il n'y a donc en réalité que *deux* décagones réguliers : le ***décagone ordinaire*** et le *décagone étoilé* (*fig.* 83) (*).

Si l'on prend $n=7$, il faut considérer les nombres entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, et l'on voit qu'il existe *trois* heptagones réguliers, dont *deux étoilés*, obtenus en joignant les points de division qui déterminent l'heptagone régulier convexe, de 2 en 2 ou de 3 en 3.

Il n'y a pas d'hexagone étoilé.

83. On peut demander *la somme des angles intérieurs d'un polygone étoilé.*

Si on l'a formé en joignant de p en p les n points de division primitifs, chaque côté d'un angle intérieur sous-tendra un arc égal à $p.\mathrm{AB}$, en désignant par AB le $n^{ième}$ de la circonférence. Dès lors la mesure de cet angle sera égale à $\dfrac{\mathrm{AB}(n-2p)}{2}$. La somme des n angles intérieurs sera donc $\dfrac{n\mathrm{AB}}{2}(n-2p)$. La moitié de la circonférence ou $\dfrac{n\mathrm{AB}}{2}$ correspondant à 2 angles droits, *la somme demandée équivaudra à* $(n-2p).2$ droits.

La somme des angles intérieurs et extérieurs étant, comme pour un polygone convexe, égale à $2n$ droits, *la somme des angles extérieurs sera représentée par*

$$2n^{\mathrm{dr}}-(n-2p).2^{\mathrm{dr}},$$

c'est-à-dire par $4p$ droits.

Si l'on suppose $p=1$, on retombe sur les théorèmes connus relatifs aux polygones convexes quelconques (*Géom.*, 39).

Figures équivalentes.

84. *Partager un triangle en trois parties proportionnelles à des nombres ou à des lignes données, en joignant un point pris dans son intérieur aux trois sommets* (*fig.* 84).

Fig. 84.



Soient ABC le triangle donné, m, p, q les nombres qui représentent les lignes données, et O le point cherché. On devra avoir

$$\frac{\mathrm{AOB}}{m}=\frac{\mathrm{BOC}}{p}=\frac{\mathrm{COA}}{q}=\text{constante.}$$

La constante sera égale à

$$\frac{\mathrm{AOB}+\mathrm{BOC}+\mathrm{COA}}{m+p+q},$$

(*) On démontre facilement que la différence des côtés des deux décagones est égale au rayon du cercle circonscrit. Par suite, le côté du décagone *étoilé* est représenté algébriquement par la racine négative de l'équation du second degré qu'on obtient, lorsqu'on cherche à diviser le rayon du cercle en moyenne et extrême raison (*Géom.*, 120).

c'est-à-dire à

$$\frac{ABC}{m+p+q}.$$

Il en résultera

$$\frac{AOB}{m}=\frac{ABC}{m+p+q} \quad \text{ou} \quad \frac{AOB}{ABC}=\frac{m}{m+p+q}.$$

Mais les triangles AOB, ABC, ayant même base AB, sont entre eux comme leurs bauteurs OK, CD. On aura donc

$$\frac{OK}{CD}=\frac{m}{m+p+q}.$$

On construira facilement la distance OK, qui sera une quatrième proportionnelle aux longueurs connues $m+p+q$, m et CD; et, en menant à cette distance une parallèle au côté AB, on aura un lieu du point O.

En comparant les triangles BOC et ABC, on aura de même

$$\frac{BOC}{ABC}=\frac{p}{m+p+q} \quad \text{et} \quad \frac{OL}{AE}=\frac{p}{m+p+q}.$$

La détermination de OL fera connaître un second point géométrique du point O, qui dès lors sera complétement défini.

Si les trois parties du triangle doivent être *équivalentes*, on fera $m=p=q$. *Le point* O *sera alors le point d'intersection des trois médianes du triangle* (20, *Rem.*).

85. *Partager un triangle en deux parties équivalentes par une droite parallèle à une direction donnée* (*fig.* 85).

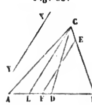


Fig. 85.

Soient ABC et XY le triangle et la direction donnés. Si l'on mène la médiane CD, les deux triangles ACD et DCB seront équivalents. La question est donc ramenée à mener la parallèle EF à XY, de manière que le triangle EFB soit équivalent au triangle DCB. Ces deux triangles, ayant un angle commun, seront entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle (*Géom.*, 147). On devra donc avoir

$$BC.BD = BE.BF.$$

Pour n'avoir qu'une inconnue, menons par le sommet C la parallèle CL à XY; on aura

$$\frac{BC}{BE}=\frac{BL}{BF},$$

d'où

$$BE=\frac{BF.BC}{BL}.$$

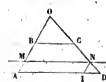
Substituant dans la première égalité posée, et simplifiant, il viendra

$$BF^2 = BD.BL.$$

BF est donc la moyenne proportionnelle des longueurs connues BD et BL. Le point F étant déterminé, le problème sera résolu.

86. *Partager un trapèze en deux parties dont les aires soient dans un rapport donné $\frac{p}{q}$, par une parallèle aux bases* (*fig.* 86).

Fig. 86.



Soient ABCD le trapèze donné, et MN la ligne cherchée. On devra avoir

$$\frac{\text{AMND}}{\text{MBCN}} = \frac{p}{q}.$$

Si l'on prolonge les côtés non parallèles du trapèze jusqu'à leur point de rencontre O, on obtiendra trois triangles semblables OBC, OMN, OAD. Les aires de ces triangles seront proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues. On pourra donc écrire

$$\frac{\text{OBC}}{\overline{\text{BC}}^2} = \frac{\text{OMN}}{\overline{\text{MN}}^2} = \frac{\text{OAD}}{\overline{\text{AD}}^2}.$$

Nous en déduirons

$$\frac{\text{OAD} - \text{OMN}}{\overline{\text{AD}}^2 - \overline{\text{MN}}^2} = \frac{\text{OMN} - \text{OBC}}{\overline{\text{MN}}^2 - \overline{\text{BC}}^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\text{AMND}}{\text{MBCN}} = \frac{\overline{\text{AD}}^2 - \overline{\text{MN}}^2}{\overline{\text{MN}}^2 - \overline{\text{BC}}^2} = \frac{p}{q}.$$

On tire de cette proportion

$$q.\overline{\text{AD}}^2 - q.\overline{\text{MN}}^2 = p.\overline{\text{MN}}^2 - p.\overline{\text{BC}}^2,$$

d'où

$$\text{MN} = \sqrt{\frac{q.\overline{\text{AD}}^2 + p.\overline{\text{BC}}^2}{p+q}}.$$

MN étant déterminée, on porte cette longueur sur la grande base à partir du sommet A, et, par l'extrémité I obtenue, on mène une parallèle au côté AB. Cette parallèle coupe le côté CD au point N.

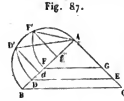
Si les deux parties du trapèze doivent être *équivalentes*, on fait $p = q$, et l'on trouve

$$\text{MN} = \sqrt{\frac{\overline{\text{AD}}^2 + \overline{\text{BC}}^2}{2}}.$$

Dans ce cas, MN est la moitié de la diagonale du carré qui a pour côté l'hypoténuse du triangle rectangle construit avec les deux bases du trapèze donné.

87. *Partager un triangle en un nombre quelconque de parties équivalentes, par des parallèles à l'un de ses côtés* (*fig.* 87).

Fig. 87.



Supposons qu'on veuille partager le triangle ABC en *trois* parties équivalentes, et que les parallèles demandées soient DE et FG. Les triangles AFG, ADE, ABC, satisferont à la relation

$$\frac{\text{AFG}}{1} = \frac{\text{ADE}}{2} = \frac{\text{ABC}}{3}.$$

Ces triangles étant semblables, on aura

d'ailleurs

$$\frac{AFG}{AF^2} = \frac{ADE}{AD^2} = \frac{ABC}{AB^2}.$$

Il en résulte

$$(1) \qquad \frac{AF^2}{1} = \frac{AD^2}{2} = \frac{AB^2}{3}.$$

Décrivons sur AB comme diamètre une demi-circonférence, et reportons sur la courbe les cordes $AF' = AF$, $AD' = AD$. Si nous projetons les points F' et D', en f et en d, sur le diamètre AB, les propriétés connues des triangles rectangles permettront de poser

$$(2) \qquad \frac{AF'^2}{Af} = \frac{AD'^2}{Ad} = \frac{AB^2}{AB}.$$

Si l'on compare les suites de rapports égaux (1) et (2), il viendra donc

$$\frac{Af}{1} = \frac{Ad}{2} = \frac{AB}{3}.$$

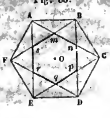
Les points f et d divisent donc AB en *trois* parties égales.

De là on conclut immédiatement la règle suivante : Si l'on veut partager le triangle ABC en m parties équivalentes, on divise l'un de ses côtés AB en m parties égales, et l'on décrit sur ce côté une demi-circonférence; par les points de division obtenus, on élève sur AB des perpendiculaires jusqu'à la rencontre de cette demi-circonférence. Puis l'on reporte sur AB, en partant du point A, les cordes déterminées par ce même point et les points de rencontre des perpendiculaires avec la demi-circonférence. Enfin, par les nouveaux points ainsi marqués sur AB, on trace des parallèles au côté BC.

88. *Étant donné un hexagone régulier, on mène les diagonales qui sous-tendent successivement deux côtés. On demande quelle figure ces diagonales déterminent par leurs intersections, et le rapport de son aire à celle de l'hexagone donné* (*fig.* 88.)

Soit l'hexagone régulier ABCDEF ; menons les diagonales AC, BD, CE, etc. Leurs intersections formeront un hexagone intérieur $mnpqrs$; il faut prouver que cet hexagone est régulier.

Fig. 88.



Les diagonales AC, BD, CE, etc., sont égales, et chaque côté de l'hexagone intérieur est le tiers de l'une d'elles. En effet, considérons le côté mn par exemple. Le triangle Bmn est équiangle, car chacun de ses angles a pour mesure $\frac{1}{6}$ de la circonférence OA circonscrite à l'hexagone proposé. Par suite, $mn = Bm = Bn$. Mais les triangles AmB et BnC sont égaux et isocèles. Il en résulte $Bm = Am$ et $Bn = nC$, c'est-à-dire $mn = \frac{AC}{3}$. Les côtés de l'hexagone $mnpqrs$ sont donc égaux entre eux; de plus chacun de ses angles a pour mesure la moitié des $\frac{4}{6}$ ou $\frac{1}{3}$ de la circonférence OA : cet hexagone est donc bien régulier.

Deux hexagones réguliers étant semblables, on aura

$$\frac{mnpqrs}{ABCDEF} = \frac{mn^2}{AB^2}.$$

On a d'ailleurs $mn = \frac{AC}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$. Il viendra par conséquent

$$\frac{mnpqrs}{ABCDEF} = \frac{1}{3}.$$

89. *Si, sur chacun des trois côtés d'un triangle rectangle* ABC *comme diamètre, on décrit une demi-circonférence, la somme des croissants ou* LUNULES $AmBpA$, $AnCqA$, *sera équivalente à l'aire du triangle* ABC (*fig.* 89).

Fig. 89.



En effet, puisqu'on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, on a aussi

$$\frac{\pi BC^2}{4} = \frac{\pi AB^2}{4} + \frac{\pi AC^2}{4},$$

c'est-à-dire que le demi-cercle décrit sur l'hypoténuse du triangle est égal à la somme des demi-cercles décrits sur les côtés de l'angle droit. Si l'on enlève de part et d'autre les parties communes ApB, AqC, il reste le triangle rectangle équivalent à la somme des deux lunules.

90. *Étant donné un cercle, lui mener un cercle tangent intérieurement et qui divise sa surface en deux parties proportionnelles à des lignes données* p *et* q (*fig.* 90).

Fig. 90.



Si R et x représentent les rayons du cercle donné et du cercle cherché, on devra avoir

$$\frac{\pi x^2}{\pi R^2 - \pi x^2} = \frac{p}{q},$$

c'est-à-dire

$$\frac{x^2}{R^2} = \frac{p}{p+q}.$$

La question est donc ramenée à construire un carré qui soit à un carré donné dans un rapport donné (*Géom.*, 151).

Si les deux parties devaient être équivalentes, on aurait

$$\frac{x^2}{R^2} = \frac{1}{2}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{R\sqrt{2}}{2};$$

x serait alors l'apothème du carré inscrit dans le cercle proposé.

Si le cercle cherché devait être une moyenne proportionnelle entre le cercle donné et leur différence, c'est-à-dire s'il devait le diviser en moyenne et extrême raison, il faudrait écrire

$$\frac{\pi R^2}{\pi x^2} = \frac{\pi x^2}{\pi R^2 - \pi x^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{R^2}{x^2} = \frac{x^2}{R^2 - x^2};$$

on arrive, par suite, à l'équation bi-carrée

$$x^4 + R^2x^2 - R^4 = 0,$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{-R^2 + \sqrt{5R^4}}{2}} = R\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Si c'était, au contraire, *la différence des deux cercles qui dût être moyenne proportionnelle*, on aurait

$$\frac{\pi R^2}{\pi R^2 - \pi x^2} = \frac{\pi R^2 - \pi x^2}{\pi x^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{R^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2 - x^2}{x^2}.$$

On en déduit $$R^2 x^2 = (R^2 - x^2)^2$$

ou $$Rx = R^2 - x^2$$

puisque Rx est une quantité nécessairement positive. De l'équation

$$x^2 + Rx - R^2 = 0,$$

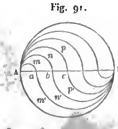
on tire $$x = \frac{-R + \sqrt{5R^2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = R\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Dans ce cas, x est le côté du décagone régulier inscrit dans le cercle donné (*Géom.*, 129).

91. *Partager la surface d'un cercle en m parties équivalentes* (*fig.* 91).

On n'aura qu'à partager le diamètre AB en m parties égales; puis sur chaque division, à partir de A, on décrira des demi-circonférences *au-dessus* de AB et, à partir de B, *au-dessous* de AB. Les surfaces comprises entre deux lignes consécutives telles que A*mam'*B, A*nbn'*B, seront équivalentes entre elles et à la $m^{ième}$ partie du cercle donné.

Fig. 91.



En effet, l'aire qui correspond à la $k^{ième}$ division du diamètre, par exemple, est : au-dessus de ce diamètre

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\left(k\cdot\frac{AB}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\left[(k-1)\frac{AB}{m}\right]^2 = \frac{\pi AB^2}{8m^2}(2k-1)$$

et, au-dessous,

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\left[(m-k+1)\frac{AB}{m}\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\left[(m-k)\frac{AB}{m}\right]^2 = \frac{\pi AB^2}{8m^2}(2m-2k+1).$$

En faisant la somme des deux expressions, on obtient pour l'expression de cette aire

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{\pi AB^2}{4}.$$

Il est facile de voir que chacune des lignes A*mam'*B, A*nbn'*B, est égale à la demi-circonférence proposée. On a, en effet, en considérant encore la $k^{ième}$ division : pour la demi-circonférence au-dessus du diamètre AB,

$$\frac{1}{2}\pi\cdot k\frac{AB}{m}$$

et, pour la demi-circonférence correspondante au-dessous de ce diamètre,

$$\frac{1}{2}\pi(m-k)\frac{AB}{m},$$

c'est-à-dire en somme $$\frac{1}{2}\cdot\pi AB.$$

CHAPITRE IV.

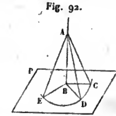
EXERCICES ET QUESTIONS DIVERSES.

(GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.)

Problèmes divers.

92. *Toute droite également inclinée sur trois droites qui passent par son pied dans un plan est perpendiculaire à ce plan* (*fig.* 92).

Fig. 92.

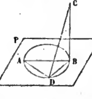


Soit la droite AB également inclinée sur les droites BC, BD, BE, qui passent par son pied dans le plan P. Prenons les trois longueurs égales BC = BD = BE, et joignons les extrémités C, D, E, à un point A pris sur la droite AB. Les trois triangles ABC, ABD, ABE, seront égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Les trois droites AC, AD, AE, seront donc trois obliques égales, et leurs pieds C, D, E, devront être à égale distance du pied de la perpendiculaire abaissée du point de concours A sur le plan P (*Géom.*, 162). Le point B étant le centre du cercle qui passe par les trois points C, D, E, est précisément le pied de cette perpendiculaire, qui dès lors se confond avec la droite AB.

93. *Trouver le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées sur toutes les droites d'un plan qui concourent en un point donné, par un point extérieur à ce plan* (*fig.* 93).

Fig. 93.





Soient le plan P, le point A dans ce plan, le point C hors de ce plan. Abaissons CB perpendiculaire sur le plan P et joignons AB. CB étant perpendiculaire sur AB, le point B appartiendra au lieu. Menons par le point A, dans le plan P, une droite *quelconque* AD, et abaissons dans le plan ACD la perpendiculaire CD sur AD. Si nous joignons BD, cette droite, d'après le théorème des trois perpendiculaires, sera perpendiculaire sur AD. L'angle ADB étant droit, le point D qui est un point quelconque du lieu, se trouvera sur la circonférence décrite dans le plan P sur AB comme diamètre. Il est évident d'ailleurs que tout point de cette circonférence appartient au lieu : le lieu demandé est donc la circonférence AB.

94. *Trouver le lieu géométrique de tous les points d'un plan dont la*

somme des carrés des distances à deux points donnés hors du plan, est constante et égale à m^2 (*fig.* 94).

Fig. 94.

Soient le plan P et les deux points A et B. Je projette AB sur le plan P en *ab*, et je suppose que le point C du plan P appartienne au lieu cherché. Les deux triangles rectangles A*a*C, B*b*C, donneront

$$AC^2 = Aa^2 + aC^2,\quad BC^2 = Bb^2 + bC^2,$$

d'où, par addition,

$$AC^2 + BC^2 = Aa^2 + Bb^2 + aC^2 + bC^2.$$

$AC^2 + BC^2$ peut être remplacée par la constante m^2, la somme $Aa^2 + Bb^2$ est aussi une quantité constante. Les points du lieu doivent donc être ceux du plan P, dont la somme des carrés des distances aux deux points fixes *a* et *b* est égale à la constante

$$m^2 - (Aa^2 + Bb^2).$$

Par suite, le lieu demandé est une circonférence de cercle, dont le centre est au milieu *d* de *ab* et qui a pour rayon

$$\sqrt{\frac{[m^2 - (Aa^2 + Bb^2)] - 2ad^2}{2}} \quad (\textit{Géom.}, 108).$$

On peut simplifier cette expression, en remarquant que

$$Aa^2 + ad^2 = Ad^2$$

et que

$$Bb^2 + bd^2 = Bd^2.$$

Le rayon sera alors représenté par

$$\sqrt{\frac{m^2 - Ad^2 - Bd^2}{2}}.$$

95. *Trouver le lieu géométrique des points de l'espace dont la différence des carrés des distances à deux points donnés est une quantité constante* (*fig.* 95).

Fig. 95.

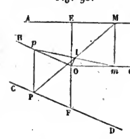
Soient A et B les deux points donnés. Menons par la droite AB un plan quelconque, et déterminons dans ce plan les droites CL et C′L′ qui, perpendiculaires à AB, constituent le lieu géométrique des points de ce plan dont la différence des carrés des distances aux points A et B est égale à la constante donnée (*Géom.*, 109). Faisons alors tourner le plan considéré autour de la droite AB, de manière à le ramener à sa première position après une révolution entière. Le lieu géométrique demandé résultera de la réunion des surfaces engendrées dans ce mouvement par les deux droites CL, C′L′. Ce lieu sera donc composé de deux plans menés perpendiculairement à la droite AB par les points L et L′.

On trouvera de même *le lieu géométrique des points de l'espace dont la somme des carrés des distances à deux points donnés* A *et* B *est une*

quantité constante. En résolvant d'abord le problème par rapport à un plan quelconque passant par la droite que déterminent les deux points fixes A et B, on obtiendra (*Géom.*, 108) une circonférence de cercle dont le centre sera au milieu de AB et, si on la fait tourner autour de son diamètre, la surface sphérique engendrée représentera le lieu cherché.

96. *Trouver le lieu géométrique décrit par le milieu d'une ligne droite* MP *de longueur donnée, dont les extrémités s'appuient constamment sur deux droites rectangulaires* AB *et* CD, *non situées dans un même plan* (*fig.* 96).

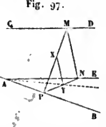
Fig. 96.



Soit EF la perpendiculaire commune aux deux droites AB, CD (*Géom.*, 185). Par son milieu O, je trace OG parallèle à AB, OH parallèle à CD; l'angle GOH sera droit. Le plan de cet angle rencontre la droite MP dans sa position actuelle en un point I. Projetons les extrémités M et P en m et en p sur le plan GOH. Les triangles rectangles $\mathrm{M}m\mathrm{I}$, $\mathrm{P}p\mathrm{I}$, seront égaux, puisqu'on a $\mathrm{M}m = \mathrm{P}p = \frac{\mathrm{EF}}{2}$ et que les angles en M et en P sont alternes-internes. Par suite, le point I sera à la fois le milieu de MP et le milieu de sa projection mp sur le plan GOH. De plus, cette projection mp a une longueur constante. En effet, le triangle rectangle $\mathrm{M}m\mathrm{I}$ ayant toujours une hypoténuse égale à $\frac{\mathrm{MP}}{2}$ et un côté de l'angle droit égal à $\frac{\mathrm{EF}}{2}$, l'autre côté de l'angle droit $\frac{mp}{2}$ est aussi constant. Le problème est ainsi ramené à chercher le lieu décrit par le milieu I de la droite mp, dont les extrémités sont assujetties à décrire les côtés de l'angle droit GOH, lieu qui est une circonférence de cercle dont le centre est au sommet O, car OI dans le triangle rectangle $m\mathrm{O}p$ est toujours la moitié de l'hypoténuse mp.

97. *Une droite se mouvant parallèlement à un plan donné, en s'appuyant sur deux droites données non situées dans un même plan, trouver le lieu des points qui divisent la droite mobile dans un rapport donné* $\frac{p}{q}$ (*fig.* 97).

Fig. 97.



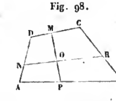
Soient AB et CD les deux droites données. Menons AE parallèle à CD, et coupons le système obtenu par un plan parallèle au plan directeur donné. Ce plan coupera le plan des deux parallèles CD et AE suivant MN, et le plan des droites AB et AE suivant NP : la droite MP représentera alors une position quelconque de la droite mobile. Divisons MP au point X dans le rapport $\frac{p}{q}$. Si l'on trace XY parallèle à MN, le point Y divisera NP dans le même rapport. Le lieu du point Y sera la droite AY, et le point X se trouvera dans le plan conduit suivant cette droite parallèlement à MN. Mais le point X appar-

tient aussi à un plan parallèle aux droites AB et CD, car on peut supposer suivant CD un plan parallèle à AB, suivant AB le plan ABE parallèle à CD, et l'on sait que trois plans parallèles divisent en parties proportionnelles toutes les droites interceptées par les deux plans extrêmes. Il en résulte que le lieu des points X, intersection des deux plans indiqués, est une ligne droite parallèle au plan déterminé par les directions AB et CD.

98. On déduit immédiatement de ce qui précède le théorème suivant : *Si l'on divise respectivement les côtés opposés d'un quadrilatère gauche dans des rapports donnés* $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, *les droites qui joignent les points de division des côtés opposés se croisent en un point qui divise chacune d'elles dans le rapport des segments des côtés qu'elles ne rencontrent pas* (*fig.* 98).

PM divise AB et CD dans le rapport $\frac{p}{q}$. Ces droites s'appuyant sur AD et BC et étant parallèles à un certain plan que leurs directions déterminent, MP sera parallèle au plan déterminé par les directions AD et BC, et représentera le lieu des points qui partagent les droites glissant sur AD et BC parallèlement au plan qui correspond aux directions AB et CD, dans le rapport $\frac{p}{q}$ (97). Mais NR, qui divise les côtés AD et BC dans le même rapport $\frac{p'}{q'}$, (c'est-à-dire qui est parallèle au plan déterminé par AB et CD), est nécessairement l'une de ces droites : elle coupe donc MP en un point O. De plus, trois plans parallèles coupant deux droites quelconques en parties proportionnelles, on a la fois

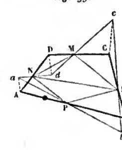
Fig. 98.



$$\frac{DN}{NA} = \frac{MO}{OP} \quad \text{et} \quad \frac{AP}{PB} = \frac{NO}{OR}.$$

99. Réciproquement, *si par les points* N *et* R *qui divisent les côtés opposés* AD *et* BC *d'un quadrilatère gauche* ABCD *en segments proportionnels, on fait passer un plan, ce plan coupera aussi les deux autres côtés* AB *et* CD *en segments proportionnels* (*fig.* 99).

Fig. 99.



Supposons que le plan conduit suivant NR coupe les côtés AB et CD en P et en M. Admettons que la projection du quadrilatère gauche ABCD sur le plan NMRP, soit représentée par le quadrilatère *abcd*. Les côtés *ad*, *dc*, *cb*, *ba*, passeront respectivement par les points N, M, R, P, du plan NMRP. Ceci posé, les triangles rectangles semblables MD*d*, MC*c* donneront

$$\frac{DM}{CM} = \frac{Dd}{Cc}.$$

De même, les triangles semblables PA*a*, PB*b*,

donneront

$$\frac{AP}{BP} = \frac{Aa}{Bb}.$$

Mais, en comparant les triangles rectangles NAa et NDd, RBb et RCc, on peut aussi écrire

$$\frac{AN}{DN} = \frac{Aa}{Dd}, \quad \frac{BR}{CR} = \frac{Bb}{Cc}.$$

On a, par hypothèse,

$$\frac{AN}{DN} = \frac{BR}{CR};$$

il viendra donc

$$\frac{Aa}{Dd} = \frac{Bb}{Cc} \quad \text{ou} \quad \frac{Aa}{Bb} = \frac{Dd}{Cc},$$

et l'on en conclura

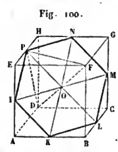
$$\frac{AP}{BP} = \frac{DM}{CM}.$$

100. *Couper un cube par un plan de manière que la section soit un hexagone régulier* (*fig.* 100).

Si on laisse de côté deux sommets opposés du cube, D et F par exemple, on obtient un hexagone gauche tel que ABCGHEA. Tout plan qui rencontrera les six côtés de cet hexagone gauche, coupera donc le cube proposé suivant un hexagone. Je dis maintenant que les milieux I, K, L, M, N, P, des côtés de l'hexagone gauche forment l'hexagone demandé.

Ces milieux sont d'abord dans un même plan. En effet, soit O le milieu de la diagonale DF qui joint les sommets laissés de côté dans le cube proposé. Joignons le sommet P de la figure IKLMNP aux extrémités D et F. Les deux triangles rectangles PHD, PEF, seront égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. On aura donc PD = PF. Le triangle DPF étant isocèle, la droite PO sera sa hauteur. On prouvera de même que toutes les droites qui joignent les autres sommets de la figure IKLMNP au milieu O de la diagonale DF, sont perpendiculaires à cette diagonale. La figure IKLMNP est donc plane, et les rayons OP, OL, qui sont dans un même plan BCEH, sont en prolongement l'un de l'autre, comme les rayons ON et OK, OM et OI.

Fig. 100.



Je dis maintenant que la figure IKLMNP est un hexagone régulier. Car le triangle OPN est un triangle équilatéral, puisque PN, OP, ON, sont respectivement les moitiés des diagonales des carrés égaux EFGH, ABFE, BCGF: on le voit immédiatement pour PN, et OP et ON sont moitiés de PL et de NK, le point O étant le centre du cube. Les six triangles qui composent l'hexagone IKLMNP étant équilatéraux et égaux, cette figure est bien un hexagone régulier perpendiculaire à la diagonale DF en son milieu.

Le cube ayant quatre diagonales, le problème admet quatre solutions. Les quatre plans sécants se croisent en son centre.

Questions sur les angles trièdres et les tétraèdres.

101. *Trouver le lieu géométrique de tous les points de l'espace également distants de deux plans qui se coupent* (*fig.* 101).

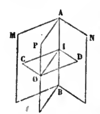


Fig. 101.

Soient MAB, NAB, deux plans dont l'intersection est AB; soit O un point du lieu. Abaissons de ce point sur les deux plans les perpendiculaires OC et OD, elles détermineront un plan perpendiculaire à l'arête AB au point I. Les deux triangles rectangles OCI, ODI, seront égaux comme ayant l'hypoténuse OI commune et un côté de l'angle droit égal (OC = OD). Par suite, il en sera de même des angles CIO et DIO. Si l'on mène par la droite IO et l'arête AB un plan PAB, ce plan partagera l'angle dièdre MABN en deux parties égales, puisque les angles plans CIO, DIO mesureront respectivement les dièdres MABP, PABN. Le lieu cherché se confond donc avec *le plan bissecteur* de l'angle dièdre proposé.

Il résulte de là que *le lieu géométrique des points également distants des trois faces d'un angle trièdre est une droite passant par son sommet et intersection commune des trois plans bissecteurs des dièdres de ce trièdre.*

Il est facile de voir que, si l'on considère les faces de l'angle dièdre ou de l'angle trièdre donné comme indéfiniment prolongées, le lieu se compose de deux plans distincts perpendiculaires entre eux dans le cas de l'angle dièdre, de quatre droites distinctes passant par le sommet dans le cas de l'angle trièdre.

Tout triangle sphérique correspondant à un angle trièdre dont le sommet est au centre de la sphère, les bissectrices des angles du triangle sphérique sont les arcs de grand cercle déterminés sur la sphère par les plans bissecteurs des angles dièdres du trièdre. On peut donc dire, en remarquant de nouveau que les propriétés des triangles plans, des angles trièdres et des triangles sphériques, sont identiques (*Géom.*, 266), que *les bissectrices des trois angles d'un triangle sphérique se croisent en un même point.*

102. *Trouver le lieu géométrique des points de l'espace également distants des côtés d'un angle donné* BAC (*fig.* 102).

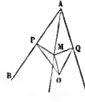


Fig. 102.

Soit O un point du lieu. J'abaisse de ce point OM perpendiculaire sur le plan BAC. Du pied M de cette perpendiculaire, je trace sur les côtés de l'angle donné les perpendiculaires MP, MQ; puis je joins OP et OQ. Les droites OP et OQ, représentant les distances du point O aux côtés AB et AC (*Géom.*, 164), sont égales par hypothèse. Les triangles rectangles OMP, OMQ seront donc aussi égaux, et l'on aura MP = MQ, c'est-à-dire que le point M appartiendra à la bissectrice de l'angle BAC. Les perpendiculaires abaissées des points du lieu sur le plan BAC, ayant leurs pieds sur la bissectrice AM, le lieu demandé est le plan conduit perpendiculairement au plan BAC par cette même bissectrice.

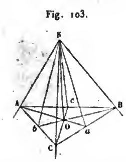
Si l'on regarde les côtés de l'angle BAC comme indéfiniment prolongés, le

lieu se compose de deux plans distincts menés par les bissectrices des angles supplémentaires formés par ces côtés. Ces plans sont perpendiculaires entre eux, car leur angle dièdre est précisément mesuré par l'angle des bissectrices des deux angles supplémentaires.

Le problème qu'on vient de résoudre prouve que *le lieu géométrique des points également distants des arêtes d'un angle trièdre est formé d'une ou de quatre droites passant par son sommet, suivant qu'on suppose les arêtes de l'angle trièdre non prolongées ou prolongées au delà du sommet.*

103. *Les plans menés perpendiculairement aux faces d'un angle trièdre par les arêtes opposées, se croisent suivant une même droite* (*fig.* 103).

Fig. 103.

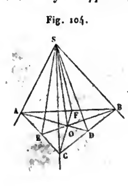


Soit l'angle trièdre SABC. Je mène par l'arête SA le plan ASa, perpendiculaire sur la face BSC et, par l'arête SB, le plan BSb perpendiculaire sur la face ASC. Par un point quelconque C de la troisième arête, j'abaisse CB perpendiculaire sur Sa, CA perpendiculaire sur Sb, et je joins les points A et B. La droite CB étant, dans le plan BSC, perpendiculaire sur l'intersection Sa de ce même plan et du plan ASa, qui lui est perpendiculaire, sera perpendiculaire au plan ASa (*Géom.*, 183), et par suite à Aa. On prouvera de la même manière que CA est perpendiculaire sur Bb. Aa et Bb sont donc deux hauteurs du triangle ABC, et leur point d'intersection O appartient à la troisième hauteur Cc de ce triangle. Le plan ABC étant à la fois perpendiculaire aux plans ASa, BSb, comme contenant deux droites perpendiculaires à ces plans (*Géom.*, 182), est aussi perpendiculaire à leur intersection SO. Dès lors, en vertu du théorème des trois perpendiculaires, AB, perpendiculaire à Cc, l'est aussi à Sc, c'est-à-dire au plan CSc de ces deux droites. Ce plan est donc le troisième plan mené perpendiculairement par l'arête SC sur la face ASB, et le théorème énoncé est démontré.

En se reportant à la remarque du n° 101, ce théorème prouve que *les trois hauteurs d'un triangle sphérique se coupent en un même point.*

104. *Les plans menés par les arêtes d'un angle trièdre et les bissectrices des faces opposées, se croisent suivant une même droite* (*fig.* 104).

Fig. 104.



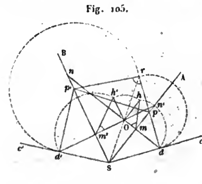
Je prends sur les arêtes de l'angle trièdre trois longueurs égales, SA = SB = SC, de manière à former les triangles isocèles SAB, SAC, SBC. Les bissectrices des angles au sommet de ces triangles isocèles passeront par les milieux des bases de ces mêmes triangles, c'est-à-dire par les milieux des côtés du triangle ABC. Les médianes AD, BE, CF, de ce triangle, se coupant en un même point O (20), les trois plans ASD, BSE, CSF, se couperont suivant la même droite SO.

Il résulte du théorème qu'on vient de démontrer, que *les trois médianes d'un triangle sphérique se coupent en un même point.*

105. *Les trois faces d'un angle trièdre* SABC *étant données, trouver ses trois angles dièdres* (*fig.* 105).

Soit ASB l'une des faces données, la plus grande si l'on veut. Rabattons dans son plan les deux autres faces ASC, BSC, en les faisant tourner autour des arêtes SA et SB, de manière à les amener en ASc et BSc'. Prenons sur Sc et sur Sc' deux points d et d' tels qu'on ait $Sd = Sd'$. Abaissons du point d la perpendiculaire dmn sur l'arête SA et, du point d', la perpendiculaire $d'm'n'$ sur l'arête SB : ces perpendiculaires se couperont en un point O (*Géom.*, 197). Si l'on ramène les faces ASc, BSc', dans leur première position, de manière à reproduire l'angle trièdre en réunissant Sc et Sc' suivant SC, les points d et d' décriront, autour des centres m et m', des circonférences de cercle dont les plans seront respectivement perpendiculaires aux arêtes SA, SB, et viendront se réunir en un même point D de l'arête SC, qui aura le point O pour projection sur le plan de la face ASB (*Géom.*, 184). A ce moment les droites md et $m'd'$ formeront avec mo et $m'o$ les angles rectilignes des angles dièdres qui ont pour arêtes SA et SB.

Fig. 105.



Pour obtenir ces angles rectilignes, il suffit de rabattre sur le plan de la face ASB les deux plans perpendiculaires décrits par md et $m'd'$. Le point d se trouvera alors à la fois sur une circonférence décrite, du point m comme centre avec md pour rayon, et sur la perpendiculaire Oh menée par le point O à la droite dmn; en effet, la droite dmn est l'axe de rotation adopté, et le point D où se réunissent dans l'espace les points d et d' se projetant en O, appartient à la perpendiculaire élevée en ce point au plan ASB. On obtiendra ainsi l'angle Omh, mesure du dièdre SA. Une construction toute semblable donnera l'angle O$m'h'$, mesure du dièdre SB.

Pour trouver la mesure du troisième angle dièdre, nous tracerons les droites dp, $d'p'$, respectivement perpendiculaires aux arêtes Sc, Sc'. Ces droites représenteront en rabattement les intersections des faces ASC, BSC, par un plan conduit perpendiculairement à la troisième arête SC, et passant par le point D. La droite pp' représentera évidemment l'intersection de ce plan avec le plan de la troisième face ASB. L'angle cherché est donc l'angle au sommet d'un triangle ayant pour base pp', et dont les deux autres côtés sont dp, $d'p'$. Il suffira donc de décrire, des points p et p' comme centres avec pd et $p'd'$ pour rayons, des arcs de cercle qui viendront se couper au point r, de sorte que l'angle prp' sera la mesure du troisième dièdre SC.

Comme vérifications, les droites oh, oh', devront être égales comme rabattements de la même perpendiculaire OD; la droite SO, projection de l'arête SC sur le plan ASB, devra être perpendiculaire à la trace pp' du plan Dpp' sur ce même plan (*Géom.*, quest. 6, p. 135); enfin, le point r, qui représente la position prise par le point D lorsqu'on fait tourner le

triangle Dpp' autour de sa base pp' pour le rabattre dans le plan ASB, devra se trouver sur le prolongement de la perpendiculaire SO à pp' (*Géom.*, 164).

On peut déduire, des constructions précédentes, ce théorème déjà démontré (*Géom.*, 193) : *A des faces égales, dans un trièdre, sont opposés des dièdres égaux.*

Si l'on demandait de *trouver les trois faces d'un angle trièdre, ses trois angles dièdres étant donnés*, on ramènerait ce cas à celui que nous venons de résoudre, en ayant recours aux propriétés des angles trièdres supplémentaires (*Géom.*, 190).

106. *Étant donnés deux faces d'un angle trièdre et l'angle dièdre compris, trouver les trois autres éléments du trièdre* (*fig.* 105).

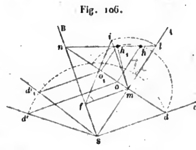
En se reportant au numéro précédent et à la figure correspondante, on voit qu'on connaît les faces ASB, ASc, ainsi que l'angle Omh, mesure du dièdre SA. On peut donc facilement construire le triangle rectangle hOm, c'est-à-dire déterminer le point O. Le point d' devra alors se trouver à la fois sur la perpendiculaire abaissée du point O sur l'arête SB, et sur la circonférence décrite du point S comme centre avec Sd pour rayon. Connaissant d', on aura la troisième face BSc' de l'angle trièdre, et l'on rentrera dans le premier cas traité.

Si l'on demandait, *étant donnés une face d'un angle trièdre et les deux angles dièdres adjacents, de trouver ses trois autres éléments*, on ramènerait ce cas à celui que nous venons d'examiner à l'aide des propriétés des angles trièdres supplémentaires.

107. *Étant donnés deux faces d'un angle trièdre ainsi que l'angle dièdre opposé à l'une d'elles, trouver les trois autres éléments du trièdre* (*fig.* 106).

Soient ASB et ASc les deux faces données rabattues dans un même plan. On connaît la mesure de l'angle dièdre SB opposé à la face ASc. On peut tracer la droite dmn perpendiculaire à SA : les deux parties dm et mn de cette droite représenteront les intersections des deux faces données et du plan mené perpendiculairement par le point D de l'espace à l'arête SA, D étant le point de l'arête SC qui se rabat en d. L'intersection de ce même plan avec la face inconnue passe par le point n et vient couper la perpendiculaire mk élevée par le point m au plan ASB, en un point k dont il est facile de déterminer le rabattement t sur l'arête SA, l'axe de rotation choisi étant la droite dmn.

Fig. 106.



En effet, menons par le point m un plan perpendiculaire à l'arête SB : il coupera le plan ASB suivant mf perpendiculaire à SB, le plan perpendiculaire à SA qui a mn pour trace sur le plan ASB suivant la perpendiculaire mk, et le plan de la face inconnue suivant une droite faisant avec fm l'angle donné comme mesure du dièdre SB opposé à la face ASC. On pourra donc rabattre le triangle rectangle formé par ces trois intersections en mfi, puis reporter la hauteur mi en ml.

Si l'on rabat maintenant le triangle D*mn* de l'espace autour de *mn*, le rabattement du point D devra donc se trouver à la fois sur *nl* et sur la circonférence décrite du point *m* comme centre avec *md* pour rayon. Une fois ce rabattement de D obtenu en *h* ou en h_1, on connaîtra l'angle *omh* ou $o_1 m h_1$, mesure de l'angle dièdre dont l'arête est SA, et l'on rentrera dans le second cas traité au n° 106.

Suivant que la droite *nl* sera sécante, tangente ou extérieure à la circonférence *md*, le problème admettra deux solutions ou une seule, ou bien sera impossible.

On voit que tout revient à la construction du triangle D*mn* dans lequel on connaît deux côtés *mn* et *md*, et l'angle *mnl* opposé au côté *md*. On peut donc se reporter, pour les cas de possibilité ou d'impossibilité, à ce que nous avons dit sur ce sujet (*Géom.*, 74).

Si l'angle dièdre SB était droit, la construction se simplifierait, puisqu'on aurait immédiatement la droite *nl* en menant, par le point *n*, une perpendiculaire à *mn*.

Si l'on demandait, *étant donnés deux dièdres d'un angle trièdre et la face opposée à l'un d'eux, de trouver ses trois autres éléments,* on ramènerait ce cas à celui que nous venons d'examiner à l'aide des propriétés des angles trièdres supplémentaires.

108. *Les trois droites* LM, NP, QR, *qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre* SABC, *se coupent mutuellement en deux parties égales* (*fig.* 107).

Fig. 107.

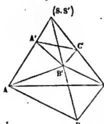
En effet, les droites LP et NM sont toutes deux parallèles à l'arête SB et égales à sa moitié : la figure LPMN sera donc un parallélogramme dont les diagonales LM et NP se croiseront en leurs milieux. On prouverait de même que les droites NP et QR se divisent aussi mutuellement en deux parties égales en un point O, qui est alors le milieu commun des trois droites considérées.

De plus, si l'on joint le point O à l'un des sommets S du tétraèdre, et si l'on prolonge la droite SO jusqu'à la rencontre de la face opposée en G, *ce point* G *sera le point de rencontre des médianes du triangle* ABC, *et le point* O *sera au quart de la ligne* SO *à partir de la base.* Car la ligne SO est dans le plan SCL qui contient LM, et elle coupe le plan ABC en un point de la médiane CL. Si l'on mène MH parallèle à SOG, le point H sera le milieu de CG, puisque le point M est le milieu de SC, et le point G sera le milieu de LH, puisque le point O est le milieu de LM. On aura donc LG = GH = HC, et le point G, situé au tiers de CL à partir de AB, sera bien le point de rencontre des médianes du triangle ABC (20). D'ailleurs, la distance du point O au plan ABC est évidemment la moitié de la distance du point R à ce plan ou le quart de celle du point S à ce même plan.

On voit que si l'on joint le point O aux sommets du tétraèdre, on partage celui-ci en quatre pyramides triangulaires équivalentes; car deux pyramides de même base étant proportionnelles à leurs hauteurs, chacune des pyramides considérées sera le quart du tétraèdre donné.

109. *Si les angles trièdres* S *et* S′ *de deux tétraèdres* SABC, S′A′B′C′, *sont égaux, les volumes de ces tétraèdres seront proportionnels aux produits des arêtes qui correspondent aux angles trièdres égaux* (*fig.* 108).

Fig. 108.



On peut toujours supposer les deux tétraèdres placés l'un dans l'autre comme l'indique la figure. Faisons alors passer un plan par les sommets A, B′, C. Les deux tétraèdres B′A′C′S′ et B′ACS′ auront même hauteur et seront entre eux comme leurs bases; mais ces bases S′A′C′, SAC, ont un angle commun. On pourra donc écrire (*Géom.*, 147)

$$(1)\quad \frac{S'A'B'C'}{S'AB'C} = \frac{S'A'C'}{SAC} = \frac{S'A'.S'C'}{SA.SC}.$$

De même, les tétraèdres CS′AB′ et CSAB ont même hauteur et sont entre eux comme leurs bases S′AB′ et SAB; mais ces bases ont un angle commun, ainsi que l'un des côtés qui comprennent cet angle. On pourra donc écrire

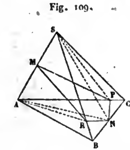
$$(2)\qquad \frac{S'AB'C}{SABC} = \frac{S'AB'}{SAB} = \frac{S'B'}{SB}.$$

Multipliant membre à membre les égalités (1) et (2) et simplifiant, il vient

$$\frac{S'A'B'C'}{SABC} = \frac{S'A'.S'B'.S'C}{SA.SB.SC}.$$

110. *Tout plan conduit par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre, le partage en deux volumes équivalents* (*fig.* 109).

Fig. 109.



Soient le tétraèdre SABC et le plan MNPR qui passe par les milieux M et N des arêtes opposées SA et BC. Le tétraèdre se trouvera décomposé en deux polyèdres ABMPNR et SCMPNR. Menons les plans ANR et SNP; nous partagerons chacun de ces polyèdres en une pyramide triangulaire et en une pyramide quadrangulaire. Les deux pyramides quadrangulaires ont pour base commune la section MNPR et leurs hauteurs sont égales, puisque le point M est le milieu de l'arête SA par hypothèse: ces deux pyramides sont donc équivalentes. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de prouver l'équivalence des deux pyramides triangulaires SCNP et ABNR. Chacune d'elles a un angle trièdre commun avec le tétraèdre proposé. On pourra donc écrire, en remarquant que le point N est le milieu de l'arête BC et en appliquant la proposition précédente (109):

$$\frac{SCNP}{SABC} = \frac{CS.CN.CP}{CS.CB.CA} = \frac{CP}{2CA},$$

$$\frac{ABNR}{SABC} = \frac{BA.BN.BR}{BA.BC.BS} = \frac{BR}{2BS}.$$

Mais les arêtes du tétraèdre SABC forment un quadrilatère gauche. Le plan MNPR qui passe par les milieux des côtés opposés SA et BC, c'est-à-dire qui les divise proportionnellement, doit diviser aussi proportionnellement les deux autres côtés SB et AC (99). On aura donc

$$\frac{CP}{PA} = \frac{BR}{RS},$$

d'où l'on déduira

$$\frac{CP}{2CA} = \frac{BR}{2BS}.$$

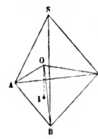
Le théorème est donc démontré.

Questions sur la sphère.

111. *Tout tétraèdre est inscriptible et circonscriptible à la sphère* (*fig.* 110).

Nous avons démontré (*Géom.*, 263) que, par quatre points non situés dans un même plan, on pouvait toujours faire passer une sphère et une seule. Il en résulte que tout tétraèdre SABC est *inscriptible* à la sphère.

Fig. 110.



Les six arêtes du tétraèdre sont des cordes de la sphère *circonscrite*. Par conséquent, si sur ces arêtes et par leurs milieux, on élève des plans perpendiculaires, ces plans viendront passer par un même point qui sera le centre de la sphère déterminée par les quatre sommets du tétraèdre.

Tout tétraèdre est aussi *circonscriptible* à la sphère. Menons, en effet, les trois plans bissecteurs des angles dièdres déterminés par la base ABC et les trois faces latérales du tétraèdre SABC. Ces plans détermineront un nouveau tétraèdre OABC, dont le sommet O sera le centre d'une sphère tangente aux quatre faces du tétraèdre donné; car, d'après les propriétés des plans bissecteurs (101), ce point O sera à égale distance des quatre faces. Le point O est d'ailleurs unique. Donc, à un tétraèdre donné, on ne peut *inscrire* qu'une seule sphère qui aura pour rayon la perpendiculaire OI abaissée du point O sur la base ABC. On voit par là, puisqu'on peut prendre pour base du tétraèdre telle face qu'on voudra, que les six plans bissecteurs des angles dièdres d'un tétraèdre concourent en un même point, centre de la sphère *inscrite*.

En se reportant à ce que nous avons dit relativement au triangle (42), on verra qu'on peut obtenir quatre autres sphères dites *ex-inscrites*, chacune tangente à l'une des faces du tétraèdre donné et aux prolongements des trois autres faces. Il existe en outre trois autres sphères tangentes aux prolongements des quatre faces.

On se rendra facilement compte de l'existence possible de ces *huit* sphères tangentes aux faces du tétraèdre ou à leurs prolongements, en remarquant que les points situés à égale distance des quatre faces du tétraèdre SABC doivent se trouver, à la fois, sur l'une des quatre droites dont l'ensemble constitue le lieu géométrique des points à égale distance des trois faces de l'angle trièdre en S, et sur l'un des deux plans bissec-

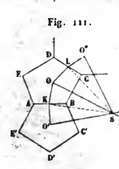
teurs des angles dièdres formés par la base ABC avec l'une des faces latérales.

Les cinq sphères *inscrite* et *ex-inscrites* existent toujours; il n'en est pas de même des trois dernières, dont les rayons peuvent devenir infinis. Nous laisserons de côté cette discussion (*).

112. *Tout polyèdre régulier est inscriptible et circonscriptible à la sphère* (*fig.* 111).

Soient ABCDE, ABC'D'E', deux faces contiguës du polyèdre régulier considéré, O et O' les centres de ces faces. Les perpendiculaires OK, O'K, abaissées des centres O et O' sur le côté ou la corde commune AB, passeront au même point K de cette corde et détermineront un plan qui, perpendiculaire à AB, le sera aux deux faces considérées et contiendra les perpendiculaires OS, O'S, menées respectivement à ces faces par leurs centres. Ces perpendiculaires se couperont *nécessairement* en un point S. Les deux triangles rectangles KOS, KO'S, étant égaux comme ayant l'hypoténuse KS commune et un côté de l'angle droit égal (OK = O'K), KS sera bissectrice de l'angle OKO' qui mesure le dièdre AB ou l'inclinaison de deux faces adjacentes du polyèdre.

Fig. 111.



Ceci posé, considérons la face O" du polyèdre qui a en commun avec la face ABCDE le côté CD. Le plan mené perpendiculairement au milieu L du côté CD, contient les apothèmes OL, O"L, et la perpendiculaire OS à la face ABCDE. Joignons le point S au centre O". Les deux triangles rectangles KOS, LOS, étant égaux, l'angle OLS sera égal à l'angle OKS, c'est-à-dire qu'il sera la moitié de l'angle OLO", puisque dans un polyèdre régulier l'inclinaison de deux faces adjacentes est constante. Les deux triangles LOS, LO"S, seront donc égaux à leur tour, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Par suite, la droite SO" sera perpendiculaire sur O"L, c'est-à-dire sur la face CDO", et elle sera égale à SO.

En continuant ainsi de proche en proche, on prouvera que le point S est à égale distance de toutes les faces du polyèdre régulier donné. De plus, puisque ce point est le point de concours de toutes les perpendiculaires élevées par les centres des différentes faces à ces mêmes faces, il sera aussi à égale distance de tous les sommets du polyèdre (*Géom.*, 162). Par conséquent, le point S représente confondus le centre de la sphère *inscrite* et celui de la sphère *circonscrite*.

113. *Si l'on fait passer, par un point pris dans l'espace, trois droites deux à deux perpendiculaires, la somme des carrés des cordes interceptées sur ces trois droites par une sphère donnée, sera constante.*

Remarquons d'abord que, dans un parallélipipède rectangle, la somme des carrés des diagonales *extérieures* qui partent d'un même sommet, est égale à deux fois le carré d'une diagonale *intérieure* (*fig.* 112).

(*) On pourra consulter avec fruit sur ce sujet la Note I des *Éléments de Géométrie descriptive* de MM. Gerono et Cassanac.

En effet, les triangles rectangles AHG, AFG, ACG, donneront

Fig. 112.

$$AH^2 = AG^2 - GH^2,$$
$$AF^2 = AG^2 - GF^2,$$
$$AC^2 = AG^2 - GC^2,$$

d'où

$$AH^2 + AF^2 + AC^2 = 3AG^2 - (GH^2 + GF^2 + GC^2).$$

Mais on a (*Géom.*, 204) :

$$AG^2 = GH^2 + GF^2 + GC^2;$$

par suite,

$$AH^2 + AF^2 + AC^2 = 2AG^2.$$

Ceci posé, la somme des carrés des moitiés des cordes interceptées sur les trois droites données par la sphère considérée, sera égale à trois fois le carré du rayon de la sphère, moins la somme des carrés des perpendiculaires abaissées du centre de la sphère sur ces mêmes cordes. Or, les trois droites rectangulaires qui passent par le point fixe donné, déterminent trois plans deux à deux perpendiculaires; et si l'on mène par le centre de la sphère des plans parallèles à ceux-là, on formera un parallélipipède rectangle, dans lequel le centre de la sphère et le point fixe seront des sommets opposés. De plus, les perpendiculaires abaissées du centre de la sphère sur les cordes interceptées, seront précisément les diagonales des faces de ce parallélipipède, qui passent par le centre de la sphère. En appelant d la distance de ce centre au point fixe et R le rayon de la sphère, la somme des carrés des *moitiés* des cordes sera donc égale, d'après la remarque précédente, à $3R^2 - 2d^2$, et la somme des *carrés* des cordes à quatre fois cette quantité, c'est-à-dire à $12R^2 - 8d^2$.

On a une vérification immédiate de ce résultat, en supposant le point donné au centre de la sphère.

114. *Lorsque trois sphères se coupent deux à deux, les plans des trois cercles d'intersection passent par une même droite perpendiculaire au plan déterminé par les centres des trois sphères.*

Nous savons en effet que deux sphères se coupent suivant un cercle dont le plan est perpendiculaire à leur ligne des centres (*Géom.*, 262). Les trois cercles d'intersection des trois sphères seront donc respectivement perpendiculaires aux droites qui joignent les centres de ces sphères deux à deux et, par suite, au plan commun des trois centres. De plus, les diamètres des cercles d'intersection, cordes communes des grands cercles générateurs des trois sphères, se croisent en un même point, centre radical de ces grands cercles (63). Donc, les trois plans considérés ayant un point commun et étant perpendiculaires au plan des centres, leur intersection est une droite passant par ce point et perpendiculaire à ce plan.

115. *Trouver le lieu géométrique des centres des sections faites dans une sphère par tous les plans qui passent par une droite donnée* (*fig.* 113).

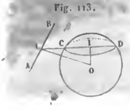


Fig. 113.

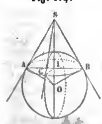
Par la droite donnée AB, je mène un plan quelconque qui coupe la sphère suivant un cercle dont le centre est I. Menons dans ce plan, par le point I, une droite IL perpendiculaire à AB. D'après le théorème des trois perpendiculaires, O étant le centre de la sphère, OL sera perpendiculaire sur AB ainsi que le plan OIL. Le point I se trouvera donc à la fois dans ce plan *fixe* OIL et sur la circonférence décrite sur la distance *fixe* OL comme diamètre. Cette circonférence

est donc le lieu demandé. Si le point L est extérieur à la sphère, il est évident qu'une partie seulement de cette circonférence compose le lieu demandé.

Si l'on demande le lieu géométrique des centres des sections faites dans la sphère par tous les plans qui passent par le point donné L, le plan OIL n'est plus astreint qu'à passer par la droite OL, et le lieu cherché est la surface sphérique décrite sur OL comme diamètre ou la portion de cette surface comprise dans la sphère proposée.

116. *Les tangentes menées à la sphère par un point extérieur* S *sont égales, et leur ensemble forme une surface conique de révolution dont l'axe est la droite qui joint le point donné au centre de la sphère* (*fig.* 114).

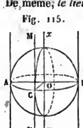

Fig. 114.



Menons par le point S des grands cercles de la sphère et, par ce point, une tangente à chacun d'eux. Ces tangentes seront égales en vertu de l'égalité des triangles rectangles SAO, SBO, SCO, qui entraîne celle des angles ASO, BSO, CSO, et des hauteurs, AI, BI, CI. Par suite, le lieu géométrique des tangentes considérées sera bien une surface conique ayant SO pour axe et touchant la sphère suivant un petit cercle de rayon IA, perpendiculaire à SO; c'est-à-dire que le cercle de contact est un *parallèle* commun aux deux surfaces.

De même; *le lieu des tangentes menées à la sphère parallèlement à une direction donnée, est une surface cylindrique de révolution, dont l'axe est le diamètre* xy *de la sphère parallèle à la direction donnée* (*fig.* 115).

Fig. 115.



Car, si l'on mène par le centre O un plan ABC perpendiculaire au diamètre xy, et qu'on trace par les différents points de la circonférence de grand cercle obtenue des parallèles à xy, ces parallèles seront (comme MN l'est au rayon OC) respectivement perpendiculaires à l'extrémité des rayons correspondants, c'est-à-dire tangentes à la sphère proposée. Le cercle de contact des deux surfaces tangentes sera le grand cercle ABC.

117. *Par une droite donnée, mener un plan tangent à une sphère* (*fig.* 116).

Si la droite donnée est tangente à la sphère considérée, il suffira de faire passer par le point de contact un plan perpendiculaire au rayon correspondant : ce plan sera le plan tangent demandé (*Géom.*, 261).

Fig. 116.



Si la droite donnée est extérieure à la sphère, on lui mènera par le centre de la sphère un plan perpendiculaire, qui la coupera au point C et déterminera dans la sphère un grand cercle MOM'. Par le point C, on mènera à ce grand cercle les tangentes CM et CM'. La droite AB et chacune de ces tangentes détermineront deux

plans qui répondront à la question. En effet, le plan ACM, par exemple, est perpendiculaire au plan MOM' puisqu'il contient AB; et il est perpendiculaire au rayon OM au point M, puisque ce rayon est perpendiculaire à la tangente MC intersection des plans perpendiculaires ACM et MOM'.

118. *Mener à deux sphères un plan tangent commun* (*fig.* 117).

Menons par les centres C et C' des deux sphères un plan quelconque qui les coupera suivant deux grands cercles. Les centres de similitude O et O' de ces grands cercles seront aussi les centres de similitude des deux sphères (71).

Fig. 117.

Tout plan tangent commun aux deux sphères passera par l'un ou l'autre de ces centres de similitude. En effet, les rayons CM, C'M', correspondants aux points de contact M et M' de ce plan avec les deux sphères, seront parallèles, et dès lors la droite qui joindra leurs extrémités ira passer au point O ou au point O', suivant que les rayons considérés seront ou non dirigés dans le même sens. Le plan tangent qui contient MM', ira donc lui-même passer par le point O ou le point O'.

On voit que le problème proposé admet une infinité de solutions.

Pendant que les cercles C et C' engendrent les deux sphères, les tangentes communes à ces cercles engendrent deux surfaces coniques de révolution ayant pour sommets les centres de similitude O et O', et tangentes aux deux sphères (116). Tout plan tangent aux deux sphères, le sera à l'une ou l'autre des deux surfaces coniques, et réciproquement (*voir* la *Géométrie descriptive*, t. III).

Le problème qu'on vient de résoudre permet de *mener, par un point donné, un plan tangent commun à deux sphères données*.

En effet, soit A le point donné. Tout plan tangent commun aux deux sphères devant passer par l'un des centres de similitude O et O', la question sera ramenée à mener à l'une des sphères, par la droite AO ou la droite AO', un plan tangent qui le sera aussi, d'après ce qui précède, à l'autre sphère.

119. *Si une surface conique* S *pénètre dans une sphère suivant une circonférence, elle en sortira aussi suivant une autre circonférence* (*fig.* 118).

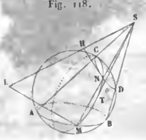


Fig. 118.

Si la courbe d'*entrée* CND est une circonférence, je dis que la courbe *de sortie* AMB sera une autre circonférence. Soit SNM une génératrice de la surface conique. Je trace SH perpendiculaire sur le plan CND, je joins le point H au point N, et je mène ML perpendiculaire sur SM jusqu'à la rencontre de SH prolongée. Le quadrilatère LMNH sera inscriptible, et l'on aura

$$SH.SL = SN.SM.$$

Par l'arête SM, faisons passer un grand cercle de la sphère et, à ce

grand cercle, par le sommet S, menons la tangente ST. Nous pourrons écrire

$$SN.SM = ST^2,$$

d'où

$$SH.SL = ST^2.$$

SH et ST sont des longueurs *constantes*, il en sera donc de même de SL. L'angle SML étant droit, le point M appartiendra à la fois à la sphère donnée et à la sphère décrite sur SL comme diamètre. La courbe AMB, intersection de deux surfaces sphériques, sera donc bien une circonférence de cercle (*Géom.*, 262).

Si le sommet de la surface conique s'éloigne indéfiniment de la courbe CND supposée fixe, en glissant le long de la génératrice SD, cette surface dégénère en surface cylindrique ayant CND pour base et SD pour génératrice. Par conséquent, *la courbe d'entrée d'une surface cylindrique dans une sphère étant une circonférence de cercle, il en est de même de la courbe de sortie.*

Des polyèdres réguliers.

120. Nous avons vu (*Géom.*, 276) qu'on rapportait les triangles ou polygones sphériques au triangle *tri-rectangle*, les pyramides sphériques quelconques à la pyramide *tri-rectangle*, et que ces pyramides étaient proportionnelles à leurs bases (*Géom.*, 282).

Il est évident que les angles polyèdres qui correspondent à ces mêmes pyramides, sont aussi dans la proportion de leurs bases; et, pour comparer deux angles polyèdres quelconques, on peut placer leurs sommets au centre d'une même sphère, et comparer les polygones sphériques interceptés.

De sorte qu'en prenant à la fois, pour unité d'aire le triangle tri-rectangle, et pour unité d'angle polyèdre l'angle trièdre tri-rectangle, si l'aire du polygone sphérique intercepté est $\frac{5}{7}$, l'angle polyèdre correspondant sera aussi les $\frac{5}{7}$ de l'angle trièdre tri-rectangle.

Nous savons ce qu'on entend par angles trièdres supplémentaires et quelles sont leurs propriétés (*Géom.*, 190). Il est clair qu'un angle polyèdre quelconque étant donné, il existe *un angle polyèdre supplémentaire*, et qu'on le formera aussi en abaissant d'un point pris dans l'intérieur de l'angle polyèdre donné des perpendiculaires sur toutes ses faces.

121. Ceci posé, on doit à DESCARTES le théorème suivant (Note de M. Prouhet, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 23 avril 1860) :

De même que dans un polygone plan convexe, la somme des angles extérieurs est égale à quatre angles plans droits (*Géom.*, 39), *de même dans un polyèdre convexe, la somme des angles polyèdres supplémentaires de ceux du polyèdre proposé est égale à huit angles trièdres tri-rectangles.*

En effet, si d'un point O pris dans l'intérieur du polyèdre, on abaisse des perpendiculaires sur toutes ses faces, on formera tous les angles polyèdres supplémentaires des angles polyèdres du polyèdre donné. Mais l'ensemble de ces angles polyèdres supplémentaires remplit tout l'espace

autour du point O, c'est-à-dire intercepte sur une sphère idéale quelconque cette sphère elle-même. Le théorème est donc établi.

122. Voyons quelles conséquences on peut déduire de ce remarquable théorème.

Dans la géométrie plane, c'est la connaissance de la somme des angles intérieurs d'un polygone qui nous a conduit à la valeur de la somme de ses angles extérieurs. Ici, au contraire, la valeur de la somme des angles polyèdres supplémentaires va nous permettre de trouver la somme des angles de toutes les faces du polyèdre, en d'autres termes la somme de ses angles plans.

La somme des angles d'un polygone sphérique de n côtés étant S_1, l'aire de ce polygone a pour expression abstraite $S_1 - 2n + 4$. Telle sera donc aussi l'expression de la valeur d'un angle polyèdre ayant n faces ou n arêtes (120). S_1 représentera alors la somme de ses angles dièdres.

S_1 représentant la somme des dièdres de l'un des angles polyèdres supplémentaires considérés, désignons par S' la somme des faces ou des angles plans de l'angle polyèdre qui lui correspond sur le polyèdre donné. On pourra remplacer chaque angle dièdre de l'angle polyèdre supplémentaire en fonction de la face supplémentaire de l'angle polyèdre du polyèdre proposé, c'est-à-dire la somme S_1 par $2n - S'$. La valeur de l'angle polyèdre supplémentaire deviendra, en faisant cette substitution dans l'expression $S_1 - 2n + 4$ et en simplifiant,

$$4 - S'.$$

En faisant le même raisonnement pour les autres angles polyèdres supplémentaires et en faisant la somme de leurs valeurs, nous aurons, d'après le théorème de Descartes (121), et en représentant par S *le nombre* des sommets du polyèdre, par P la somme de tous ses angles plans,

$$4S - P = 8,$$

d'où

(1) $$P = 4(S - 2).$$

Ce qu'on peut énoncer en disant : *La somme de tous les angles plans d'un polyèdre convexe est égale à autant de fois quatre angles droits qu'il a de sommets moins deux.*

Pour le *tétraèdre*, il faudra faire $S = 4$, et l'on trouvera $P = 8$; pour le parallélipipède, $S = 8$ et $P = 24$.

123. Cherchons une *relation entre le nombre des sommets, celui des faces et celui des arêtes du polyèdre.*

Soient $t, q, p, h, \ldots$, les nombres de faces *triangulaires, quadrangulaires, pentagonales, hexagonales, ...*, existant dans le polyèdre. On aura (*Géom.*, 39):

$$P = 2t + 4q + 6p + 8h + \ldots,$$

puisqu'à chaque triangle correspondent en somme 2 angles droits, à chaque quadrilatère 4 angles droits, etc. Substituant cette valeur de P dans la relation (1) du n° 122, il viendra

(2) $$2S = 4 + t + 2q + 3p + 4h + \ldots.$$

Soient F le nombre des faces et A le nombre des arêtes du polyèdre,

on aura

$$F = t + q + p + h + \dots,$$
$$A = \frac{3t + 4q + 5p + 6h + \dots}{2}.$$

Le second membre de la dernière expression comporte le diviseur 2, parce que chaque arête fait nécessairement partie de deux faces adjacentes. On déduit de là

$$A - F = \frac{t + 2q + 3p + 4h + \dots}{2},$$

c'est-à-dire, d'après la relation (2),

(3) $$A - F = S - 2,$$

expression du *Théorème* d'EULER, qu'on peut énoncer sous cette forme : *En diminuant de 2 le nombre des sommets du polyèdre, on obtient l'excès du nombre des arêtes sur celui des faces.*

124. Il est facile, en se servant de la relation (3), de prouver qu'il n'existe aucun polyèdre convexe dont *toutes* les faces aient plus de *cinq* côtés ou dont *tous* les angles aient plus de *cinq* faces, et d'en déduire une confirmation du raisonnement par lequel nous avons établi (*Géom.*, 198) qu'il ne pouvait y avoir *plus de cinq polyèdres réguliers*. Nous nous contenterons ici de chercher le nombre des faces de ces polyèdres réguliers, en admettant leur existence.

Désignons par c le nombre de côtés des faces dont la quotité est F dans le polyèdre régulier considéré, par f le nombre de faces ou d'arêtes des angles polyèdres dont la quotité est S dans le même polyèdre. Nous aurons, A étant toujours le nombre de ses arêtes,

$$A = \frac{Fc}{2}, \quad A = \frac{Sf}{2},$$

c'est-à-dire

$$F = \frac{2A}{c}, \quad S = \frac{2A}{f}.$$

Substituant dans la formule d'Euler, il viendra

$$A - \frac{2A}{c} = \frac{2A}{f} - 2,$$

d'où

(a) $$A = \frac{2cf}{2c + 2f - cf}.$$

Nous savons qu'on peut former *trois* polyèdres réguliers avec *des triangles équilatéraux*, en en assemblant 3, 4 ou 5, autour d'un même point. Nous devrons donc faire, dans la formule (a), $c = 3$ en même temps que $f = 3$ ou 4 ou 5. Nous obtiendrons d'abord

$$A = \frac{6f}{6 - f},$$

et nous en déduirons :

pour $f=3$ .... $A=6$, $F=4$, $S=4$;
pour $f=4$ .... $A=12$, $F=8$, $S=6$;
pour $f=5$ .... $A=30$, $F=20$, $S=12$.

Le *tétraèdre régulier* aura donc *quatre* faces, l'*octaèdre régulier* aura *huit* faces, et l'*icosaèdre régulier* en aura *vingt*.

Nous savons qu'on ne peut former qu'*un* polyèdre régulier avec des *faces carrées*, en en assemblant 3 autour d'un même point. Si nous faisons $c=4$ dans la formule générale (a), il viendra

$$A=\frac{4f}{4-f}.$$

On voit qu'on ne peut en effet donner à f que la valeur 3. On obtient alors pour l'*hexaèdre régulier*

$$A=12,\quad F=6,\quad S=8.$$

Enfin, on ne peut former qu'*un* polyèdre régulier avec des *faces pentagonales*, en en assemblant 3 autour d'un même point. Si l'on y fait $c=5$, la formule (a) donne

$$A=\frac{10f}{10-3f},$$

et l'on voit encore qu'on ne peut en effet donner à f d'autre valeur que 3. On en déduit, pour le *dodécaèdre régulier*,

$$A=30,\quad F=12,\quad S=20.$$

125. Nous allons maintenant prouver l'existence des cinq polyèdres réguliers, par la construction même qui permet de les obtenir.

Tétraèdre régulier. Il suffira d'élever au centre du triangle équilatéral pris pour base du tétraèdre, une perpendiculaire telle, que la distance de son extrémité à l'un des sommets de ce triangle soit égale à l'arête donnée.

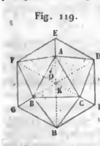
Octaèdre régulier. Soit a le côté du triangle équilatéral employé. On formera un carré de côté a. On élèvera au centre de ce carré une perpendiculaire indéfinie, sur laquelle on prendra de part et d'autre du centre une longueur égale au rayon du carré, c'est-à-dire à $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, puis on joindra les extrémités obtenues aux sommets du carré. Les huit arêtes ainsi tracées seront égales entre elles et à $\sqrt{\frac{2a^2}{4}+\frac{2a^2}{4}}=a$, puisqu'elles sont toutes hypoténuses de triangles rectangles isocèles ayant pour côtés de l'angle droit le rayon du carré. Elles formeront donc, ensemble et avec les côtés du carré, huit triangles équilatéraux égaux et également inclinés.

On peut remarquer, d'après cette construction, que trois droites égales perpendiculaires entre elles, et se coupant en leur milieu, ont pour extrémités les six sommets d'un octaèdre régulier.

Icosaèdre régulier. Formons un pentagone régulier BCDEF (*fig.* 119) ayant pour côté l'arête a, côté du triangle équilatéral donné ABC. Au centre de ce pentagone élevons une perpendiculaire OA, sur laquelle nous déterminerons un point A tel, que la distance AB soit égale à a. En joignant ce point A aux sommets du pentagone, nous formerons cinq triangles équilatéraux égaux à ABC, assemblés autour du point A et également inclinés.

Remarquons que l'angle CAF est égal à l'angle du pentagone BCDEF, puisque les triangles FAC, BCD, sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. On pourra donc sur CA et sur AF achever un pentagone CAFGII identique au précédent. Le point B étant à la distance a des sommets C, A, F, appartiendra à la perpendiculaire élevée au centre du nouveau pentagone, et les distances BG et BII seront aussi égales à a. Enfin, les quatre points D, A, B, H, étant dans un même plan, on pourra sur DA et sur AB achever le pentagone DABHI identique aux deux précédents. En effet, les diagonales d'un pentagone régulier qui ne partent pas d'un même sommet, se coupent mutuellement en moyenne et extrême raison. BD coupe CF de cette manière en un point K qui doit alors appartenir à la diagonale AII. Cette diagonale est donc dans le plan DAB. Le point C sera d'ailleurs, pour le pentagone DABIII, ce que sont les points A et B pour les deux autres, et l'on aura $CI = a$.

Fig. 119.



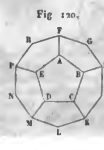
On obtiendra ainsi en tout *dix* triangles équilatéraux égaux et également inclinés, formant une *moitié* de l'icosaèdre; et les sommets de la ligne terminale DEFGHI réuniront successivement *trois* et *deux* triangles. On peut remarquer que cette ligne terminale est *gauche*. Car, si les quatre points D, E, F, G, étaient dans un même plan, les deux pentagones BCDEF, CAFGII, qui ont déjà dans le plan DEF les sommets C et F communs, seraient tous deux dans ce même plan qui contiendrait alors le sommet A : conséquence absurde d'après ce qui précède.

Ceci posé, on peut construire de la même manière l'autre moitié de l'icosaèdre. Seulement, en rapprochant les deux calottes polyédrales et en les joignant par leurs lignes terminales, on fera correspondre les sommets où se réunissent *trois* triangles dans l'une et *deux* triangles dans l'autre; de sorte qu'on aura, en chaque sommet du polyèdre complet, *cinq* triangles équilatéraux égaux et également inclinés.

Hexaèdre régulier. Il suffira d'élever, par les sommets du carré ayant pour côté l'arête donnée a, quatre perpendiculaires à son plan égales à a et d'en joindre les extrémités.

Dodécaèdre régulier. Avec trois pentagones réguliers égaux, ayant pour côté l'arête donnée a, on formera en A (*fig.* 120) un angle trièdre dont les dièdres seront égaux entre eux. Avec d'autres pentagones identiques aux précédents et en employant les faces déjà construites, on formera en B, C, D, E, des angles trièdres égaux à l'angle trièdre A. Le pentagone ABCDE sera commun à tous les trièdres; le second, le troisième et le quatrième trièdre nécessiteront l'addition d'un nouveau pentagone. Le dernier angle trièdre en E se trouvera tout formé. Nous aurons ainsi une *moitié* du dodécaèdre, composée de *six* pentagones réguliers égaux et également inclinés. Les différents sommets de la ligne terminale *gauche* FGHIKLMNPR correspondront successivement à *un* et à *deux* pentagones.

Fig 120.



On construira de la même manière la seconde *moitié* du dodécaèdre.

Seulement, on joindra les lignes terminales des deux moitiés, de manière à réunir les sommets correspondants à *un* seul pentagone sur l'une et à *deux* sur l'autre ; on aura ainsi, en chaque sommet du polyèdre complet, *trois* pentagones réguliers égaux et également inclinés.

126. On peut demander de *trouver l'inclinaison de deux faces adjacentes d'un polyèdre régulier*. On y parviendra facilement en se reportant au n° **105**.

Le problème est immédiatement résolu pour l'hexaèdre où l'angle de deux faces adjacentes est droit.

Pour le dodécaèdre, à chaque sommet correspond un angle trièdre, et les faces de ce trièdre sont des angles de pentagone régulier. Il reste donc à chercher le dièdre d'un trièdre dont les trois faces égales sont connues. On trouve, graphiquement ou par le calcul trigonométrique, que l'inclinaison de deux faces adjacentes d'un dodécaèdre régulier est égale à

$$116^\circ\ 33'\ 54'',2.$$

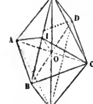
Pour les trois autres polyèdres réguliers, on peut suivre une marche analogue ou avoir recours aux procédés suivants.

Fig. 121.

Tétraèdre. Si l'on joint les sommets S et C au milieu I de l'arête AB (*fig.* 121), l'inclinaison cherchée sera mesurée par l'angle SIC. Il suffit donc de construire le triangle isocèle SIC donc on connaît les côtés. On trouvera ainsi, par la mesure directe ou le calcul trigonométrique, pour l'inclinaison cherchée 70° 31′ 43″,6. (Le triangle rectangle SIK donne $\sin\frac{1}{2}\cdot \text{SIC} = \frac{\text{SK}}{\text{SI}} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$).

Octaèdre. Si l'on joint les sommets A et C (*fig.* 122) au milieu I de l'arête SB, l'angle AIC mesurera l'inclinaison cherchée. Il suffira donc de construire le triangle isocèle AIC dont on connaît les côtés. On trouvera ainsi, par la mesure directe ou le calcul trigonométrique, 109° 28′ 16″,4. (Le triangle rectangle AIO donne $\sin\frac{1}{2}\,\text{AIC} = \frac{\text{AO}}{\text{AI}} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$).

Fig. 122.



Icosaèdre. Enfin, en se reportant à la *fig.* 119, si l'on joint les sommets C et F au milieu I de l'arête AB, on verra que l'angle CIF mesure l'inclinaison demandée. Il suffira donc de construire le triangle CIF dont les trois côtés sont connus : FC est déterminé, puisque dans le triangle isocèle CBF on connaît les côtés BC et BF et l'angle B. La mesure directe ou le calcul donne

$$138^\circ\ 11'\ 22'',8.$$

TRIGONOMÉTRIE.

LIVRE PREMIER.

THÉORIE DES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES.

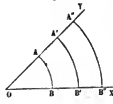
CHAPITRE PREMIER.

DÉFINITIONS.

Notions préliminaires.

1. Les figures de la géométrie présentent des côtés et des angles. Pour soumettre au calcul les relations qui existent seulement entre les côtés d'une figure, il suffit de faire choix d'une unité de longueur et de comparer tous les côtés de la figure à cette unité. La considération d'un côté se trouve ainsi remplacée par celle du nombre qui représente son rapport à l'unité.

Quant aux angles, on les compare *entre eux* de la manière suivante. On remarque qu'à un même angle XOY (*fig.* 1) correspondent un nombre indéfini d'arcs AB, A'B', A''B'',..., décrits de son sommet comme centre et interceptés entre ses côtés. Ces arcs sont semblables, et l'on a (*Géom.*, 134)



$$\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} = \frac{A''B''}{OA''} = \ldots.$$

Ce qu'il y a ici de constant, c'est le rapport de l'arc intercepté (supposé rectifié) au rayon choisi. On peut donc prendre ce rapport pour la mesure de l'angle considéré et, en désignant l'arc AB par S, le rayon OA par R, écrire

$$\text{angle XOY} = \frac{S}{R}.$$

L'unité d'angle est alors l'angle qui, au centre d'un cercle quelconque, intercepte un arc égal en longueur au rayon de ce cercle.

Comme la longueur d'un arc est donnée par la formule gé-

nérale $l = \frac{\pi R n}{180}$ (*Géom.*, 133), on voit, en y faisant $l = R$, que le nombre de degrés de cet angle unité est

$$n = \frac{180}{\pi} = 57^\circ\, 17'\, 44'',75.$$

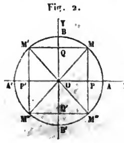
Si l'on choisit le rayon pour unité de longueur, le nombre qui mesure l'arc rectifié mesure aussi l'angle. Dans ce cas, la circonférence étant représentée par 2π, les arcs peuvent être indiqués indifféremment en degrés ou en fractions du nombre π. Ainsi, l'on dira : arc de 45° ou arc $\frac{\pi}{4}$, arc de 60° ou arc $\frac{\pi}{3}$, etc.

Si l'on veut maintenant établir les relations qui lient les côtés et les angles d'une même figure, *il faut pouvoir remplacer la considération des angles par celle de certains rapports entre longueurs;* et la condition expresse pour qu'il en soit ainsi sera la suivante : L'angle étant donné, les rapports dont nous parlons devront être complétement déterminés; réciproquement, ces rapports étant donnés, l'angle devra être à son tour parfaitement défini.

La trigonométrie traite de ces rapports particuliers qu'on a nommés *rapports trigonométriques.* Son but général est l'*introduction des angles dans le calcul*, son but spécial *la résolution des triangles* qui composent toutes les figures.

2. Soit une circonférence quelconque (*fig.* 2). Traçons par son centre deux axes rectangulaires OX, OY. On pourra prendre le point A, commun à la circonférence et à l'axe OX, pour point de départ ou *origine* des arcs comptés sur cette circonférence. D'après la règle de Descartes (*Alg. élém.*, 161), on devra regarder comme *positifs* les arcs comptés dans un certain sens, dans le sens de A vers B, par exemple, et comme *négatifs* les arcs comptés en sens contraire, dans le sens de A vers B'.

Fig. 2.



Les arcs considérés pourront dépasser un nombre quelconque de circonférences; car, après avoir décrit une circonférence et être revenu au point de départ, on peut en décrire une seconde, et ainsi de suite, puis s'arrêter en un point quelconque M, qui sera ce qu'on appelle l'*extrémité* de l'arc.

Deux arcs dont la somme équivaut à un quart de circonférence sont deux arcs *complémentaires.* Deux arcs dont la

somme équivaut à une demi-circonférence sont deux arcs *supplémentaires*. La somme de deux arcs complémentaires (dans le cercle de rayon 1) est égale à $\frac{\pi}{2}$, la somme de deux arcs supplémentaires est égale à π.

Pour déterminer sur le plan du cercle la position d'un point quelconque M pris sur la circonférence, on mènera par ce point M deux parallèles MQ et MP aux axes OX et OY. Les longueurs $MQ = OP$, $MP = OQ$, étant déterminées, la position du point M le sera. Car, si l'on mène par le point P une parallèle à l'axe OY, par le point Q une parallèle à l'axe OX, elles viendront se croiser sur la circonférence au point M.

La distance OP s'appelle l'*abscisse* du point M, la distance MP en est l'*ordonnée :* les longueurs OP et MP considérées simultanément sont les *coordonnées* du point M.

OX est l'*axe des abscisses*, OY l'*axe des ordonnées :* ces axes considérés simultanément sont *les axes des coordonnées*, leur intersection O est l'*origine des coordonnées*. On indique l'abscisse d'un point par la lettre x, son ordonnée par la lettre y.

Il est important de remarquer que les abscisses devront être affectées de signes différents, suivant qu'elles seront comptées *à droite* ou *à gauche* du point O : ainsi, les points M et M‴ ayant pour abscisse commune $+ OP$, les points M′ et M″ auront pour abscisse commune $- OP'$. De même, les ordonnées devront être affectées de signes contraires, suivant que les points considérés seront situés *au-dessus* ou *au-dessous* de l'axe des abscisses. En effet, les ordonnées peuvent être reportées et comptées sur l'axe des ordonnées, soit au-dessus, soit au-dessous du point O, à partir de ce point : ainsi, les points M et M′ ayant pour ordonnée commune $+ OQ$, les points M″ et M‴ auront pour ordonnée commune $- OQ'$.

Ces détails reviendront et seront tout à fait à leur place, lorsque nous commencerons la *Géométrie analytique*. Nous n'avons indiqué ce mode de détermination d'un point dans un plan, que pour rendre nos définitions plus simples et plus nettes.

3. Étant donné l'angle AOM ou l'arc AM (*fig.* 2), on appelle *sinus* de cet angle ou de cet arc *le rapport de l'ordonnée* MP *du point* M, *extrémité de l'arc, au rayon* OM *de cet arc*, et l'on écrit

$$\sin AM = \frac{MP}{OM}.$$

On appelle *cosinus* de cet angle ou de cet arc *le rapport*

de l'abscisse OP *du point* M *au rayon* OM, et l'on écrit

$$\cos AM = \frac{OP}{OM}.$$

On appelle *tangente* de cet angle ou de cet arc *le rapport de l'ordonnée* MP *à l'abscisse* OP, et l'on écrit

$$\operatorname{tang} AM = \frac{MP}{OP}.$$

Les inverses des rapports que nous venons d'indiquer ont reçu des noms spéciaux. La *cosécante* de l'arc AM est l'inverse du sinus, et l'on écrit

$$\operatorname{coséc} AM = \frac{OM}{MP}.$$

La *sécante* de l'arc AM est l'inverse du cosinus, et l'on écrit

$$\operatorname{séc} AM = \frac{OM}{OP}.$$

La *cotangente* de l'arc AM est l'inverse de la tangente, et l'on écrit

$$\cot AM = \frac{OP}{MP}.$$

Désignons d'une manière générale l'arc AM par a, le rayon OM par r; soient x et y les coordonnées du point M extrémité de l'arc AM. On aura

$$\sin a = \frac{y}{r}, \quad \cos a = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tang} a = \frac{y}{x},$$
$$\operatorname{coséc} a = \frac{r}{y}, \quad \operatorname{séc} a = \frac{r}{x}, \quad \cot a = \frac{x}{y}.$$

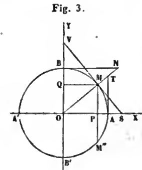
Il est essentiel de remarquer que le choix du rayon n'influe en rien sur la valeur des rapports trigonométriques d'un angle, précisément parce que ce sont des rapports. Si le rayon OM change, on passe, pour le même angle, du triangle OPM à un autre triangle qui lui est semblable, et dont les côtés présentent par conséquent entre eux des rapports égaux à ceux qui lient les côtés du triangle OPM.

4. Il est facile de justifier les dénominations employées. *Si l'on suppose que le rayon de l'arc soit pris pour unité*, on aura

$$\sin a = y, \quad \cos a = x, \quad \operatorname{tang} a = \frac{y}{x},$$
$$\operatorname{coséc} a = \frac{1}{y}, \quad \operatorname{séc} a = \frac{1}{x}, \quad \cot a = \frac{x}{y}.$$

Dans ce cas, le sinus égal à l'ordonnée MP (*fig.* 3) *est la moitié de la corde qui sous-tend l'arc* MM″ *double de l'arc* AM *considéré. Semi-inscripta* signifiant demi (corde) inscrite, la lettre *s* et les deux lettres *in* ont formé avec la terminaison *us* le mot sinus.

Fig. 3.



Si l'on mène par l'origine de l'arc jusqu'au rayon qui passe par son extrémité la tangente AT, les triangles semblables OPM, OAT, donnent

$$\frac{y}{x} = \frac{AT}{1} = AT.$$

Le rapport $\frac{y}{x}$ est donc alors représenté par la *tangente* AT. Il est bon de remarquer qu'il est également représenté par la tangente $MS = AT$ en vertu de l'égalité des triangles OAT, OMS.

Les deux triangles OPM, OAT, donnent également, dans le cas du rayon égal à l'unité,

$$\frac{1}{x} = \frac{OT}{1} = OT.$$

Le rapport $\frac{1}{x}$ est donc alors représenté par la portion de *sécante* comprise, sur la direction du rayon OM, entre le centre de l'arc et le point T. Il est important de remarquer que ce rapport est également représenté par la portion de sécante $OS = OT$.

L'arc $a = AM$ a pour complément l'arc $BM = \frac{\pi}{2} - a$. Si l'on prend pour origine de ce dernier arc le point B et si on le suppose par suite décrit positivement de B vers M, MQ ou $OP = x = \cos a$, représentera son sinus. De même, $BN = MV$ représentera sa tangente, $ON = OV$ représentera sa sécante. D'ailleurs, les triangles semblables OAT, OBN, donnent

$$\frac{BN}{1} = \frac{1}{AT} = \cot a;$$

de même, les triangles semblables OPM, OBN, donnent

$$\frac{ON}{1} = \frac{1}{y} = \operatorname{coséc} a.$$

En résumé, on aura donc

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a,$$

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a,$$

$$\text{séc}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{coséc}\, a.$$

Ainsi, *le cosinus, la cotangente, la cosécante d'un arc, ne sont autre chose que le sinus, la tangente, la sécante de l'arc complémentaire;* d'où les noms donnés à ces rapports. Le cosinus, la cotangente et la cosécante d'un arc sont quelquefois appelés rapports trigonométriques *indirects*, tandis que le sinus, la tangente et la sécante constituent les rapports trigonométriques *directs*.

On fait un usage continuel des formules précédentes.

En terminant ce paragraphe et en se reportant à la *fig.* 3, il est utile de rappeler que, *lorsque le rayon est pris pour unité*, la perpendiculaire MP représente le sinus de l'arc AM, la distance OP son cosinus, la tangente AT sa tangente; de même, la distance ON = OV représente sa cosécante, la distance OT = OS sa sécante, la tangente BN = MV sa cotangente. *Mais il ne faut pas perdre de vue que les définitions du n° 3 sont les seules générales.*

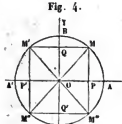
5. Il est évident que l'arc étant donné, les rapports trigonométriques correspondants le sont également. Réciproquement, si l'on suppose l'arc considéré plus petit que $\frac{\pi}{2}$, il sera déterminé si l'on connaît son rayon et l'un quelconque de ses rapports trigonométriques, son sinus par exemple.

En effet, r étant donné ainsi que $\sin a$, on déduira de la relation $\sin a = \frac{y}{r}$, $y = r \sin a$. On prendra alors, à partir du point O, sur l'axe OY et dans le sens convenable (2), une longueur $OQ = y$ (*fig.* 3). On mènera par le point Q une parallèle QM à l'axe OX, et le point M sera l'extrémité de l'arc demandé.

6. Les rapports trigonométriques les plus employés sont le sinus, le cosinus et la tangente. Nous allons donc étudier spécialement les variations de ces rapports. Celles de la cosécante, de la sécante et de la cotangente, qui sont leurs inverses, pourront ensuite être immédiatement définies.

Variations du sinus.

7. Si du point O comme centre (*fig.* 4), avec un rayon égal à l'unité, on décrit une circonférence, l'arc a intercepté sur cette circonférence par l'angle AOM, mesurera cet angle et aura, d'après ce qui précède (3), le même sinus que l'arc AM. On pourra donc poser



$$\sin a = \frac{y}{r}.$$

Supposons l'arc a plus petit que 90°. A mesure que l'arc croîtra, depuis 0 jusqu'à 90°, l'ordonnée y croîtra : *le sinus croît donc alors avec l'arc.*

Pour $a = 0$, on a $y = 0$. Pour $a = \frac{\pi}{4}$, la corde MM''' est égale au côté du carré inscrit; y, qui en est la moitié, est donc égale à $\frac{r\sqrt{2}}{2}$. Enfin, pour $a = \frac{\pi}{2}$, on a $y = r$. On peut donc écrire :

$$\sin 0 = 0, \quad \sin\frac{\pi}{4} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1.$$

Lorsque l'extrémité de l'arc est dans le second quadrant, le sinus repasse par les mêmes valeurs que dans le premier, prises en ordre inverse.

En effet, *les sinus de deux arcs supplémentaires sont égaux et de même signe.* Soit l'arc AM (*fig.* 4). Menons par l'extrémité M la parallèle MM' à l'axe OX. Les arcs AM et AM' seront évidemment supplémentaires, puisque les arcs AM et A'M' seront égaux. Mais les extrémités M et M' ayant des ordonnées égales et de même signe, les sinus des arcs AM et AM' seront égaux et de même signe.

La formule

$$\sin(\pi - a) = \sin a$$

exprime cette importante propriété.

On voit que, l'arc croissant depuis 90° jusqu'à 180°, le sinus diminuera depuis 1 jusqu'à 0.

Lorsque l'extrémité de l'arc tombe dans le troisième ou le quatrième quadrant, le sinus est négatif (2); mais, de 180° à 360°, il repasse d'*une manière absolue* par les mêmes valeurs que de 0 à 180°. En effet, les ordonnées des points symétri-

quement placés par rapport à l'axe des abscisses étant égales et de signes contraires, des arcs tels que AM et AM‴ ou tels que AM′ et AM″ ont nécessairement des sinus égaux et de signes contraires. L'arc croissant depuis 180° jusqu'à 270°, le sinus décroîtra donc depuis 0 jusqu'à — 1, et l'arc croissant depuis 270° jusqu'à 360°, le sinus croîtra algébriquement depuis — 1 jusqu'à 0.

La figure montre que les arcs qui diffèrent d'une demi-circonférence, comme les arcs AM et AM″, ont des sinus égaux et de signes contraires. C'est ce qu'exprime la formule

$$\sin(\pi + a) = -\sin a.$$

Quand on augmente un arc d'un nombre quelconque de circonférences, son sinus ne change pas; puisque l'arc conservant toujours la même extrémité, c'est aussi la même ordonnée qu'on doit comparer au rayon. Désignons par $2n\pi$ un nombre quelconque de circonférences de rayon égal à l'unité, n étant un entier quelconque. Nous aurons

$$\sin(2n\pi + a) = \sin a.$$

La formule

$$\sin(\pi - a) = \sin a$$

donnera alors

$$\sin(2n\pi + \pi - a) = \sin a,$$

ce qui revient à

$$\sin[(2n+1)\pi - a] = \sin a.$$

Il en résulte que *tous les arcs qui ont même sinus que l'arc a sont renfermés dans les deux formules*

$$2n\pi + a \quad \text{et} \quad (2n+1)\pi - a.$$

Les arcs égaux et de signes contraires ont aussi des sinus égaux et de signes contraires; car leurs extrémités sont symétriquement placées par rapport à l'axe OX. Ainsi, les arcs AM et AM‴ (*fig.* 4) ont des sinus égaux et de signes contraires : c'est ce qu'exprime la formule

$$\sin(-a) = -\sin a.$$

On voit que les variations du sinus ont pour limites + 1 *et* — 1. Le sinus peut prendre toutes les valeurs positives possibles entre 0 et 1, toutes les valeurs négatives possibles entre 0 et — 1. *Une quantité plus petite que* 1 *et plus grande que* — 1 *peut donc toujours être représentée par le sinus d'un certain arc.*

On peut trouver directement, à l'aide des polygones réguliers, les sinus de certains arcs.

L'ordonnée de l'extrémité de l'arc de 60° est la moitié de la corde qui sous-tend l'arc de 120° (3, 4), c'est-à-dire la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit, qui est égal a $r\sqrt{3}$ (*Géom.*, 128). On aura donc

$$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'ordonnée de l'extrémité de l'arc de 30° est la moitié de la corde qui sous-tend l'arc de 60°, c'est-à-dire la moitié du côté de l'hexagone régulier inscrit, qui est égal à r. On aura donc

$$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

De même, l'ordonnée de l'extrémité de l'arc de 18° est la moitié de la corde qui sous-tend l'arc de 36°, c'est-à-dire la moitié du côté du décagone régulier inscrit, qui est égal à $\frac{r(-1+\sqrt{5})}{2}$ (*Géom.*, 129).
On aura donc

$$\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Variations du cosinus.

8. Le cosinus d'un arc étant égal au sinus de son complément (4), tout ce que nous venons de dire (7) se reproduira dans un autre ordre pour le cosinus. Néanmoins, il n'est pas inutile d'indiquer directement les variations du cosinus.
On a

$$\cos a = \frac{x}{r}.$$

Supposons l'arc a plus petit que 90°. A mesure que l'arc croîtra, depuis 0 jusqu'à 90°, l'abscisse x décroîtra : *le cosinus diminue donc alors en même temps que l'arc augmente.*

Pour $a=0$, on a $x=r$. Pour $a=\frac{\pi}{4}$, la distance OP est égale à l'ordonnée MP (*fig.* 4), c'est-à-dire à $\frac{r\sqrt{2}}{2}$. Enfin, pour $a=\frac{\pi}{2}$, on a $x=0$. On peut donc écrire :

$$\cos 0 = 1,\quad \cos\frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0.$$

Lorsque l'extrémité de l'arc est dans le second quadrant, le

cosinus repasse par les mêmes valeurs que dans le premier, prises en ordre inverse et affectées d'un signe contraire.

En effet, *les cosinus de deux arcs supplémentaires sont égaux et de signes contraires.* Les arcs AM et AM′ (*fig.* 4) étant supplémentaires, leurs extrémités M et M′ ont des abscisses égales et de signes contraires, et les cosinus de ces arcs sont eux-mêmes égaux et de signes contraires.

La formule

$$\cos(\pi - a) = -\cos a$$

exprime cette importante propriété.

On voit que l'arc croissant depuis 90° jusqu'à 180°, le cosinus diminuera depuis 0 jusqu'à -1.

Lorsque l'extrémité de l'arc tombe dans le troisième quadrant, le cosinus est négatif; il est positif lorsque cette extrémité tombe dans le quatrième quadrant. Mais, de 180° à 360°, le cosinus repasse *d'une manière absolue* par les mêmes valeurs que de 0 à 180°. En effet, les abscisses des points symétriquement placés par rapport à l'axe des abscisses étant égales et de même signe, des arcs tels que AM et AM‴ ou tels que AM′ et AM″ ont nécessairement des cosinus égaux et de même signe. L'arc croissant depuis 180° jusqu'à 270°, le cosinus croîtra donc depuis -1 jusqu'à 0, et l'arc croissant depuis 270° jusqu'à 360°, le cosinus croîtra depuis 0 jusqu'à 1.

La figure montre que les arcs qui diffèrent d'une demi-circonférence, comme les arcs AM et AM″, ont des cosinus égaux et de signes contraires; et que les arcs dont la somme est égale à une circonférence entière, comme les arcs AM et AM‴, ont des cosinus égaux et de même signe. C'est ce qu'expriment les formules

$$\cos(\pi + a) = -\cos a, \quad \cos(2\pi - a) = \cos a.$$

Quand on augmente un arc d'un nombre quelconque de circonférences, son cosinus ne change pas, puisque l'arc conservant toujours la même extrémité, c'est aussi la même abscisse qu'on doit comparer au rayon. Désignons par $2n\pi$ un nombre quelconque de circonférences, n étant un entier quelconque. Nous aurons

$$\cos(2n\pi + a) = \cos a.$$

La formule

$$\cos(2\pi - a) = \cos a$$

donnera alors

$$\cos(2n\pi - a) = \cos a.$$

Il en résulte que *tous les arcs qui ont même cosinus que l'arc a sont renfermés dans les deux formules*

$$2n\pi + a \quad \text{et} \quad 2n\pi - a.$$

Les arcs égaux et de signes contraires ont des cosinus égaux et de même signe; car leurs extrémités sont symétriquement placées par rapport à l'axe OX. Ainsi, les arcs AM et AM''' ont des cosinus identiques. C'est ce qu'exprime la formule

$$\cos(-a) = \cos a.$$

On voit que les variations du cosinus sont comprises entre $+1$ *et* -1. *Une quantité plus petite que* 1 *et plus grande que* -1 *peut donc toujours être représentée par le cosinus d'un certain arc.*

Variations de la tangente.

9. On a $\tang a = \frac{y}{x}$. Supposons l'arc a plus petit que 90°. A mesure que l'arc croîtra depuis o jusqu'à 90°, l'ordonnée y croîtra et l'abscisse x diminuera. Pour cette double raison, *la tangente croît donc alors avec l'arc.*

Pour $a = 0$, on a $y = 0$ et $x = r$. Pour $a = \frac{\pi}{4}$, on a $y = x$, puisque le triangle OPM devient isocèle (*fig.* 4). Pour $a = \frac{\pi}{2}$, on a $y = r$ et $x = 0$. On peut donc écrire

$$\tang 0 = 0,$$

$$\tang \frac{\pi}{4} = \tang 45° = 1,$$

$$\tang \frac{\pi}{2} = \tang 90° = \frac{r}{0} = \infty.$$

Lorsque l'extrémité de l'arc est dans le second quadrant, la tangente repasse par les mêmes valeurs que dans le premier, mais prises en ordre inverse et affectées d'un signe contraire. En effet, *les tangentes de deux arcs supplémentaires sont égales et de signes contraires.* Car, si l'on se reporte à la figure, on voit que les extrémités des arcs supplémentaires AM et AM' ont des ordonnées égales et de même signe en même temps que des abscisses égales et de signes contraires, les points M et M' étant symétriques par rapport à l'axe OY. Il en résulte que les rapports qui expriment les tangentes de deux arcs supplémentaires, sont nécessairement égaux et de signes contraires. C'est ce que rappelle la formule

$$\tang(\pi - a) = -\tang a.$$

L'arc croissant de 90° jusqu'à 180°, la tangente croîtra donc algébriquement, depuis $-\infty$ jusqu'à o. Nous disons depuis $-\infty$, parce que l'arc de 90° peut être regardé à la fois comme

la limite des arcs qui, croissant depuis o jusqu'à 90°, ont des tangentes positives, et comme la limite des arcs qui, décroissant depuis 180° jusqu'à 90°, ont des tangentes négatives.

Lorsque l'arc croît de 180° jusqu'à 270°, la tangente repasse par les mêmes valeurs que dans le premier quadrant; et lorsque l'arc croît de 270° jusqu'à 360°, la tangente repasse par les mêmes valeurs que dans le second quadrant. En effet, les arcs qui diffèrent d'une demi-circonférence, comme les arcs AM et AM'', ou comme les arcs AM' et AM''', ont la même tangente, parce que leurs extrémités coïncidant avec celles d'un même diamètre, ont nécessairement des coordonnées égales en valeur absolue, mais de signes contraires. Il en résulte que le rapport de ces coordonnées reste toujours le même en valeur et en signe. C'est ce qu'exprime la formule

$$\tang(\pi + a) = \tang a.$$

Ainsi, de 180° à 270°, la tangente croît de o à $+\infty$; de 270° à 360° elle croît algébriquement de $-\infty$ à o.

La remarque précédente montre que *lorsqu'on augmente un arc d'un nombre quelconque de demi-circonférences, sa tangente ne varie pas.* Désignons par $n\pi$ un nombre quelconque de demi-circonférences, n étant un entier quelconque. Nous aurons

$$\tang(n\pi + a) = \tang a.$$

Tous les arcs qui ont même tangente que l'arc a, sont donc compris dans la formule

$$n\pi + a.$$

Les arcs égaux et de signes contraires ont aussi des tangentes égales et de signes contraires; car leurs extrémités sont symétriquement placées par rapport à l'axe OX, de sorte que ces extrémités ayant des ordonnées égales et de signes contraires et la même abscisse, les rapports formés par leurs coordonnées respectives sont égaux et de signes contraires. C'est ce qu'exprime la formule

$$\tang(-a) = -\tang a.$$

On voit que les variations de la tangente ont pour limites $+\infty$ *et* $-\infty$. La tangente peut prendre toutes les valeurs positives possibles entre o et $+\infty$, toutes les valeurs négatives possibles entre o et $-\infty$. *Une quantité réelle quelconque peut donc toujours être représentée par la tangente d'un certain arc.*

10. *Remarques.* — Ce qui précède permet d'établir pour les

trois autres rapports trigonométriques le tableau suivant :

$$\text{coséc}\,0 = \frac{1}{\sin 0} = \infty,$$

$$\text{coséc}\,45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2},$$

$$\text{coséc}\,90^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ} = 1.$$

$$\text{séc}\,0 = \frac{1}{\cos 0} = 1,$$

$$\text{séc}\,45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2},$$

$$\text{séc}\,90^\circ = \frac{1}{\cos 90^\circ} = \infty.$$

$$\cot 0 = \frac{1}{\text{tang}\,0} = \infty,$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{\text{tang}\,45^\circ} = 1,$$

$$\cot 90^\circ = \frac{1}{\text{tang}\,90^\circ} = 0.$$

Le sinus, le cosinus et la tangente prennent, dans le premier quadrant, toutes les valeurs qu'ils peuvent prendre en valeur absolue. Il en sera donc de même pour leurs inverses. De plus, le signe d'un rapport étant aussi celui de son inverse, le sinus et la cosécante, le cosinus et la sécante, la tangente et la cotangente, ont toujours le même signe.

Par suite, on peut dire que la cosécante, positive lorsque l'extrémité de l'arc tombe dans les deux premiers quadrants, négative lorsque cette extrémité tombe dans les deux derniers, varie depuis $+\infty$ jusqu'à $+1$ et depuis $-\infty$ jusqu'à -1 ; de sorte qu'elle prend toutes les valeurs possibles, à l'exception de celles qui sont comprises entre $+1$ et -1.

La sécante, positive lorsque l'extrémité de l'arc tombe dans le premier et le quatrième quadrant, négative lorsque cette extrémité tombe dans le second et le troisième, varie depuis $+1$ jusqu'à $+\infty$, et depuis -1 jusqu'à $-\infty$; de sorte qu'elle prend toutes les valeurs possibles, à l'exception de celles qui sont comprises entre $+1$ et -1.

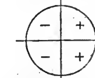
Enfin, la cotangente étant positive dans le premier et le troisième quadrant, négative dans le second et le quatrième, varie comme la tangente depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$.

Il est important de noter que les six rapports trigonomé-

triques sont positifs dans le premier quadrant et que, dans les trois autres quadrants, il y a toujours quatre rapports négatifs contre deux positifs. C'est ce qu'indique la *fig.* 5.

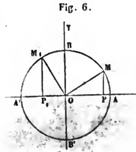
Fig. 5.

Sinus et cosécante. Cosinus et sécante. Tangente et cotangente.



11. Pour terminer ces notions, cherchons ce que deviennent les rapports trigonométriques d'un arc, lorsqu'on le fait croître de 90°.

Fig. 6.



Soient l'arc AM et l'arc AM_1 (*fig.* 6), tels que les deux rayons OM, OM_1, soient perpendiculaires. Le point M aura pour coordonnées MP et OP, le point M_1 aura pour coordonnées M_1P_1 et $-OP_1$; et les deux triangles rectangles OPM, OP_1M_1 étant égaux, on pourra poser

$$M_1P_1 = OP, \quad OP_1 = MP,$$

ou

$$-OP_1 = -MP.$$

Désignons par a l'arc AM, l'arc AM_1 sera $\frac{\pi}{2} + a$. Soient x et y les coordonnées du point M, x' et y' celles du point M_1 : on aura

$$y' = x, \quad x' = -y.$$

Par suite

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos a,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{x'}{r} = \frac{-y}{r} = -\sin a,$$

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{-y} = -\cot a.$$

Ces formules sont importantes à retenir.

Relations entre les rapports trigonométriques d'un même arc.

12. On a, par définitions (3),

$$\sin a = \frac{y}{r},\quad \cos a = \frac{x}{r},\quad \operatorname{tang} a = \frac{y}{x},$$

$$\operatorname{coséc} a = \frac{r}{y},\quad \operatorname{séc} a = \frac{r}{x},\quad \cot a = \frac{x}{y}.$$

Élevons au carré (*) les deux premières égalités et ajoutons-les membre à membre, nous aurons

$$\sin^2 a + \cos^2 a = \frac{y^2 + x^2}{r^2}.$$

Mais le triangle rectangle OPM (*fig.* 6) donne

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

Par suite

(1) $$\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

Si l'on divise membre à membre les deux égalités sur lesquelles on vient d'opérer, on trouve

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{y}{x},$$

c'est-à-dire

(2) $$\operatorname{tang} a = \frac{\sin a}{\cos a}.$$

De même, on peut écrire les trois égalités qui concernent les rapports trigonométriques inverses sous la forme

(3) $$\operatorname{coséc} a = \frac{1}{\sin a},$$

(4) $$\operatorname{séc} a = \frac{1}{\cos a},$$

(5) $$\cot a = \frac{1}{\operatorname{tang} a} = \frac{\cos a}{\sin a}.$$

Telles sont les *cinq* relations fondamentales entre les six rapports trigonométriques. Il en est d'autres utiles à connaître. Divisons par $\cos^2 a$ les deux membres de la relation (1) : il

(*) C'est le rapport sin *a* qui est élevé au carré, ce qu'on pourrait indiquer en écrivant $(\sin a)^2$. On affecte, pour plus de simplicité, le seul signe *sin* de l'exposant convenable.

viendra

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 1 = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

Les relations (2) et (4) donnent alors

$$\text{tang}^2 a = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}$$

et

$$\text{séc}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

Par suite

(6) $$\text{sec}^2 a = 1 + \text{tang}^2 a.$$

Les relations qui existent entre les trois rapports *directs*, existent évidemment entre les trois rapports *indirects* (4). On peut donc poser immédiatement

(7) $$\text{coséc}^2 a = 1 + \cot^2 a.$$

Toutes les relations qu'on vient d'établir sont évidemment générales; car elles ne dépendent en rien de la place occupée sur la circonférence par l'extrémité de l'arc considéré.

13. Entre les *six* rapports trigonométriques, il existe *cinq* relations fondamentales. On peut donc demander d'exprimer cinq de ces rapports en fonction du sixième.

Proposons-nous, par exemple, d'exprimer en fonction de la tangente les cinq autres rapports trigonométriques.

On a immédiatement (rel. 5 et 6)

$$\cot a = \frac{1}{\text{tang}\, a}, \qquad \text{séc}\, a = \sqrt{1 + \text{tang}^2 a}.$$

La relation (7) donne

$$\text{coséc}\, a = \sqrt{1 + \frac{1}{\text{tang}^2 a}},$$

c'est-à-dire

$$\text{coséc}\, a = \frac{\sqrt{1 + \text{tang}^2 a}}{\text{tang}\, a}.$$

De

$$\text{séc}\, a = \frac{1}{\cos a},$$

on déduit alors

$$\cos a = \frac{1}{\text{séc}\, a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 a}};$$

et de

$$\operatorname{coséc} a = \frac{1}{\sin a}$$

on déduit

$$\sin a = \frac{1}{\operatorname{coséc} a} = \frac{\operatorname{tang} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 a}}.$$

On emploie très-souvent les expressions du sinus et du cosinus en fonction de la tangente.

Les valeurs du sinus, du cosinus, de la sécante et de la cosécante exprimées en fonction de la tangente, renferment toutes un radical, c'est-à-dire qu'elles sont susceptibles d'un double signe; la valeur de la cotangente, au contraire, n'est susceptible que d'un signe. En effet, si l'on donne seulement la valeur de la tangente, sans indiquer l'arc correspondant, cette valeur répondra à deux séries d'arcs terminés aux extrémités d'un même diamètre (9). Si la tangente est positive, ces extrémités tomberont dans le premier et le troisième quadrant : la tangente et la cotangente sont alors toujours positives, tandis que les quatre autres rapports trigonométriques peuvent être positifs ou négatifs, suivant qu'on considère l'extrémité située dans le premier ou le troisième quadrant. Au contraire, si la tangente est négative, les extrémités des arcs correspondants tomberont dans le second et le quatrième quadrant : la tangente et la cotangente sont alors toujours négatives, tandis que le sinus et la cosécante, positifs dans le second quadrant, sont négatifs dans le quatrième, et que le cosinus et la sécante, négatifs dans le second quadrant, sont positifs dans le quatrième (10).

CHAPITRE II.

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES.

Théorie des projections.

14. D'une manière générale, on entend par *projection* d'une droite AB sur une autre droite OX prise pour axe de projection, la portion *ab* de l'axe OX interceptée par les deux plans menés perpendiculairement des extrémités de AB sur OX. Les points *a* et *b* sont les projections des points A et B sur l'axe (*fig.* 7).

Fig. 7.

Par le point A, menons AC parallèle à OX. Cette parallèle sera égale à la projection *ab* (*Géom.*, 173). Si AB est dans un même plan avec l'axe, les trois points B, C, *b*,

seront en ligne droite; sinon, ils présenteront la disposition indiquée sur la figure.

L'angle de AB avec l'axe sera l'angle formé par AB avec la parallèle AC (*Géom.*, 158).

Désignons cet angle par α. Le triangle ABC est rectangle en C : on peut donc regarder AC comme l'abscisse du point B par rapport à AC, le point A étant pris pour origine (2). On aura alors par définition (3)

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}.$$

Représentons par l la longueur de la droite AB, par p celle de sa projection. La relation précédente donnera

$$p = l\cos\alpha.$$

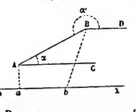
La projection d'une droite sur un axe rectiligne quelconque est donc égale à la longueur de cette droite multipliée par le cosinus de l'angle qu'elle forme avec l'axe.

15. On peut regarder la droite AB comme ayant deux directions, selon qu'on marche de l'extrémité A vers l'extrémité B ou de l'extrémité B vers l'extrémité A. Si, dans le premier cas, la projection ab, comptée alors dans le sens de O vers X, est considérée comme positive, dans le second on doit l'affecter du signe —, puisqu'elle se trouve comptée en sens inverse.

La convention suivante permet de ne pas se préoccuper du sens de la projection. Pour mesurer l'angle d'une droite finie avec un axe rectiligne, on mène par le point de départ de cette droite une parallèle à l'axe; l'angle qu'on obtient en partant de cette parallèle et en décrivant au-dessus d'elle un arc jusqu'à la droite proposée, est l'angle de la droite avec l'axe.

Si l'on parcourt la droite AB (*fig.* 8) en partant du point A, l'angle de AB avec l'axe est l'angle *aigu* CAB $= \alpha$. Si l'on parcourt la droite AB en partant du point B, l'angle de AB ou mieux de BA avec l'axe est l'angle DBA $= \alpha'$, et cet angle tombe entre 180° et 270°. Dans le premier cas, la projection de AB est $p = l\cos\alpha$; dans le second, elle est $p' = l\cos\alpha'$: $\cos\alpha'$ est négatif et donne le signe convenable à la projection, pourvu que la longueur l soit toujours prise en valeur absolue.

Fig. 8.



Remarquons que $\cos\alpha' = \cos(2\pi - \alpha') = \cos$ ABD. On peut

donc remplacer l'angle α' par l'angle ABD, supplément de l'angle α. Les cosinus de deux angles supplémentaires étant égaux et de signes contraires, on a bien $p = -p'$.

En résumé, *l'angle dont on introduira le cosinus dans les calculs sera le plus petit des angles formés par la droite avec la parallèle à l'axe, cette parallèle étant menée par le point de départ de la droite, et l'angle étant mesuré au-dessus ou au-dessous de cette parallèle.*

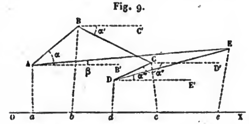
16. *Théorème fondamental. — Étant donné un contour polygonal quelconque* ABCDE, *la somme algébrique des projections des côtés qui le composent sur un axe* OX, *est égale à la projection sur le même axe de la ligne* AE *qui joint les deux extrémités du contour* (*fig.* 9).

En effet, la figure donne immédiatement la relation suivante entre la projection de la ligne résultante AE et les projections des côtés du contour :

$$ae = ab + bc - cd + de.$$

Désignons par α, α', α'', α''', les angles formés par les côtés AB, BC, CD, DE, avec les parallèles AB′, BC′, CD′, DE′, menées à l'axe OX par leurs différents points de départ A, B, C, D; désignons par β l'angle formé par AE avec la parallèle AB′. Soient l, l', l'', l''', les longueurs des côtés du contour; soit L, la longueur de AE. Le théorème précédent (14, 15) permettra de poser

Fig. 9.



$$ae = L\cos\beta, \quad ab = l'\cos\alpha, \quad bc = l'\cos\alpha',$$
$$-cd = l''\cos\alpha'', \quad de = l'''\cos\alpha'''.$$

En substituant dans l'égalité précédente, il viendra donc

$$L\cos\beta = l\cos\alpha + l'\cos\alpha' + l''\cos\alpha'' + l'''\cos\alpha'''.$$

Pour abréger, on écrit souvent

$$L\cos\beta = \Sigma\, l\cos\alpha,$$

en indiquant par le signe Σ la somme de tous les termes semblables dont la notation $l\cos\alpha$ rappelle la forme générale.

Le théorème qu'on vient de démontrer est d'un usage con-

tinuel, comme tous ceux qui peuvent fournir une relation immédiate entre les données et les inconnues d'une figure.

Deux contours polygonaux terminés aux mêmes extrémités ont des projections égales sur un axe quelconque.

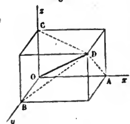
La plus grande valeur de la somme $\Sigma l \cos\alpha$ a lieu lorsque la ligne AE qui ferme le contour est parallèle à l'axe. On a alors

$$\cos\beta = 1 \quad \text{et} \quad \Sigma l \cos\alpha = \text{L}.$$

Lorsque la ligne qui ferme le contour est perpendiculaire à l'axe, on a $\cos\beta = 0$ et $\Sigma l \cos\alpha = 0$. La même conséquence se présente lorsque le contour se ferme de lui-même, c'est-à-dire lorsqu'on a $\text{L} = 0$.

17. Considérons le parallélipipède rectangle OD (*fig.* 10). On aura (*Géom.*, 204)

Fig. 10.



$$\text{OD}^2 = \text{OA}^2 + \text{OB}^2 + \text{OC}^2.$$

Mais les triangles rectangles OAD, OBD, OCD, donnent immédiatement (14)

$$\text{OA} = \text{OD} \cos \text{DOA},$$
$$\text{OB} = \text{OD} \cos \text{DOB},$$
$$\text{OC} = \text{OD} \cos \text{DOC}.$$

Substituant dans l'égalité précédente et divisant les deux membres par OD^2, il viendra

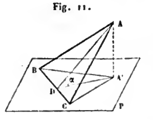
$$1 = \cos^2 \text{DOA} + \cos^2 \text{DOB} + \cos^2 \text{DOC}.$$

On est ainsi conduit à cette remarque : *la somme des carrés des cosinus des angles formés par une droite* OD *avec trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *est égale à l'unité.*

18. Le théorème (14) subsiste pour une aire plane quelconque projetée sur un plan.

Je dis d'abord que la projection d'un triangle sur un plan est égale à l'aire du triangle multipliée par le cosinus de l'angle que son plan forme avec le plan de projection.

Fig. 11.



Supposons que l'un des côtés BC du triangle donné ABC se trouve dans le plan de projection P (*fig.* 11). La projection du triangle ABC sera le triangle A'BC. Menons la hauteur AD du triangle ABC, A'D sera la hauteur du triangle A'BC (*Géom.*, 164), et l'angle de ces deux hauteurs me-

surera l'angle α du plan ABC avec le plan P. On aura donc à la fois

$$ABC = \frac{BC \times AD}{2}, \quad A'BC = \frac{BC \times A'D}{2}, \quad \cos\alpha = \frac{A'D}{AD}.$$

On en déduit

$$A'BC = \frac{BC \times AD \times \cos\alpha}{2} = ABC.\cos\alpha.$$

Considérons le triangle ABC dans une position quelconque par rapport au plan de projection P. On pourra toujours, sans altérer la valeur de la projection de l'aire ABC, transporter le plan P parallèlement à lui-même jusqu'à ce qu'il vienne passer par le point B. Soit alors BD l'intersection du plan ABC et du plan P (*fig.* 12).

Fig. 12.

Projetons les sommets A et C en A' et en C'. Le triangle A'BD sera la projection du triangle ABD, le triangle C'BD celle du triangle CBD. Soit α l'angle du plan ABC et du plan P. On aura, d'après la démonstration précédente,

$$A'BD = ABD.\cos\alpha, \quad C'BD = CBD.\cos\alpha.$$

On en déduit, par soustraction,

$$A'BC' = ABC.\cos\alpha.$$

Mais A'BC' est la projection du triangle ABC : le théorème est donc général.

Soit maintenant un polygone plan quelconque, dont je désignerai l'aire par S. Soit S' l'aire de sa projection orthogonale sur un plan P, soit α l'angle que son plan forme avec le plan P. Le polygone S étant composé des triangles T, T', T'',..., sa projection S' sera composée des triangles correspondants t, t', t'',..., et l'on aura

$$t = T\cos\alpha, \quad t' = T'\cos\alpha, \quad t'' = T''\cos\alpha, \ldots$$

On en déduit immédiatement, par addition,

$$S' = S\cos\alpha.$$

En employant la méthode des limites (*Géom.*, 132), on étend facilement ce résultat au cas d'une aire plane terminée par un contour quelconque, curviligne ou semi-curviligne.

19. Les projections de la surface S sur trois plans deux à deux rectangulaires, étant désignées par S', S'', S''', et les angles de S avec ces trois plans, représentés par α, β, γ, on aura

$$S' = S\cos\alpha,\quad S'' = S\cos\beta,\quad S''' = S\cos\gamma.$$

Si l'on se rappelle que deux droites perpendiculaires à deux plans font entre elles le même angle que ces deux plans (*Géom.*, 190), on verra que les angles α, β, γ, satisfont nécessairement (17) à la relation

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

Par conséquent, en ajoutant les trois équations précédentes après les avoir élevées au carré, on arrivera à cette relation remarquable

$$S'^2 + S''^2 + S'''^2 = S^2.$$

20. Tout ce que nous venons de dire montre qu'il existe entre une aire plane et ses projections sur un plan les mêmes relations qu'entre une droite et ses projections sur un axe. Par suite, si l'on élève des perpendiculaires aux plans des aires considérées, si l'on prend respectivement sur ces perpendiculaires des longueurs proportionnelles aux aires correspondantes, au lieu de projeter toutes les aires sur un plan, on pourra projeter toutes les droites finies obtenues sur un axe perpendiculaire au plan de projection choisi. Les angles formés par les aires avec le plan de projection sont ainsi les mêmes que les angles formés par les droites avec l'axe de projection, et les rapports des aires sont remplacés par des rapports linéaires égaux. Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet.

Rapports trigonométriques de la somme ou de la différence de deux arcs.

21. Soient deux arcs quelconques que je désignerai d'une manière générale par a et par b. Soit A l'origine des arcs sur la circonférence considérée. Je compterai dans le sens convenable : à partir du point A, l'arc $AB = a$, à partir du point B, l'arc $BC = b$. En se reportant à la *fig.* 13 et aux définitions données dans le chapitre I, on aura

Fig. 13.

$$\frac{Bp}{OA} = \sin a,\quad \frac{Op}{OA} = \cos a,$$

$$\frac{Cp'}{OA} = \sin b,\quad \frac{Op'}{OA} = \cos b,$$

$$\frac{-OP}{OA} = \cos(a+b).$$

Ceci posé, les contours OPC, $Op'C$, ayant les mêmes extrémités, leurs projections sur l'axe Ox seront égales (16).

La projection du contour OPC se réduit à $-$OP, parce que PC est perpendiculaire à l'axe, et que OP fait un angle de 180° avec l'axe, de sorte qu'il faut multiplier OP par -1 pour avoir sa projection.

L'angle de Op' avec Ox étant mesuré par a, la projection du côté Op' sera $Op'.\cos a$.

L'angle de $p'C$ avec l'axe étant égal à l'angle a augmenté de 90°, comme le montre la parallèle $p'x'$ à l'axe Ox, la projection du côté $p'C$ sera

$$p'C.\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right),$$

c'est-à-dire (11)

$$-p'C.\sin a.$$

La projection du contour $Op'C$ sera donc

$$Op'.\cos a - p'C.\sin a;$$

et l'on aura la relation

$$-\mathrm{OP} = Op'.\cos a - p'C.\sin a,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{-\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}} = \frac{Op'}{\mathrm{OA}}.\cos a - \frac{p'C}{\mathrm{OA}}.\sin a.$$

Remplaçant les différents rapports obtenus par leurs valeurs, il viendra

$$(1) \qquad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

La démonstration que nous venons de donner ne suppose aucune disposition particulière de la figure, c'est-à-dire qu'elle n'impose aucunes valeurs spéciales aux angles a et b; reposant sur le principe fondamental des projections, elle participe à toute sa généralité. On peut donc remplacer dans la formule (1) l'arc a par $\frac{\pi}{2}-a$ et l'arc b par l'arc $-b$. Il viendra alors

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos(-b)$$
$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin(-b).$$

Mais (3)

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right]=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(a+b)\right]=\sin(a+b).$$

De même

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a.$$

Enfin (8, 7)

$$\cos(-b)=\cos b,\quad \text{et}\quad \sin(-b)=-\sin b.$$

On aura donc en réalité

$$(2)\qquad \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b.$$

En changeant dans les formules (1) et (2) b en $-b$, on trouve

$$\cos(a-b)=\cos a\cos(-b)-\sin a\sin(-b),$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos(-b)+\cos a\sin(-b),$$

c'est-à-dire

$$(3)\qquad \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b.$$
$$(4)\qquad \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b.$$

Les formules (1), (2), (3), (4), sont d'un usage continuel, et l'on doit les savoir par cœur, comme toutes les formules trigonométriques. Il est utile de remarquer que le signe $+$ du second membre correspond à $\cos(a-b)$, le signe $-$ du second membre correspond au contraire à $\sin(a-b)$.

22. On a (12)

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}.$$

Divisons les deux termes du second membre par le produit $\cos a\cos b$, il viendra

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\dfrac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\dfrac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{1-\dfrac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}.$$

Remplaçons $\frac{\sin a}{\cos a}$ par $\operatorname{tang} a$, $\frac{\sin b}{\cos b}$ par $\operatorname{tang} b$, et simplifions. Nous trouverons

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\operatorname{tang} a+\operatorname{tang} b}{1-\operatorname{tang} a\operatorname{tang} b}.$$

Si l'on change dans cette formule b en $-b$, il vient (9)

$$\tang(a-b)=\frac{\tang a+\tang(-b)}{1-\tang a\tang(-b)}=\frac{\tang a-\tang b}{1+\tang a\tang b}.$$

Si l'on suppose que a soit égal à $45°$, on aura $\tang a=1$, et, par suite,

$$\tang(45°-b)=\frac{1-\tang b}{1+\tang b}.$$

Multiplication et division des arcs.

23. *Nous nous proposons d'abord, connaissant les rapports trigonométriques d'un arc, de déterminer les rapports trigonométriques de ses multiples.*

Prenons les formules $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\tang(a+b)$, et supposons que b devienne égal à a. Nous aurons

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a,$$
$$\sin 2a=2\sin a\cos a,$$
$$\tang 2a=\frac{2\tang a}{1-\tang^2 a}.$$

Prenons les mêmes formules et supposons que b devienne égal à $2a$. Nous trouverons, en remplaçant $\cos 2a$, $\sin 2a$, $\tang 2a$, par les valeurs précédentes, et en effectuant les calculs,

$$\cos 3a=\cos^3 a-3\sin^2 a\cos a,$$
$$\sin 3a=3\sin a\cos^2 a-\sin^3 a,$$
$$\tang 3a=\frac{3\tang a-\tang^3 a}{1-3\tang^2 a}.$$

En faisant usage de la relation $1=\cos^2 a+\sin^2 a$, on peut exprimer $\cos 3a$ en fonction de $\cos a$, $\sin 3a$ en fonction de $\sin a$. On a alors

$$\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a,$$
$$\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a.$$

En continuant, on arriverait facilement aux rapports trigonométriques des arcs $4a$, $5a$, etc. Nous donnerons plus loin (*Complément d'Algèbre*) les valeurs générales de $\sin ma$, de $\cos ma$ et de $\tang ma$.

24. La question inverse de la précédente est celle-ci : *Connaissant les rapports trigonométriques d'un arc, déterminer les rapports trigonométriques d'un sous-multiple de cet arc.*

1° *Étant donné* $\cos a$, *cherchons* $\sin\frac{1}{2}a$ *et* $\cos\frac{1}{2}a$.

La relation $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$, appliquée aux arcs a et $\frac{1}{2}a$, donne

$$\cos a = \cos^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}a.$$

On a d'ailleurs

$$1 = \cos^2 \frac{1}{2}a + \sin^2 \frac{1}{2}a.$$

Par addition, il vient

$$1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{1}{2}a,$$

et, par soustraction,

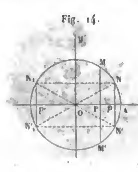
$$1 - \cos a = 2\sin^2 \frac{1}{2}a.$$

On en déduit

$$\cos \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}, \quad \sin \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}.$$

On trouve pour $\cos \frac{1}{2}a$ et $\sin \frac{1}{2}a$ deux valeurs égales et de signes contraires. En effet, supposons que dans le cercle de rayon 1, $\cos a$ soit numériquement représenté par l'abscisse OP. Par le point P, menons à l'axe Oy la parallèle MM' (*fig.* 14). Tous les arcs terminés en M et en M' répondront à la valeur de $\cos a$. Pour avoir toutes les valeurs possibles de $\sin \frac{1}{2}a$ et de $\cos \frac{1}{2}a$, il faut donc prendre la moitié de tous ces arcs; ce qui revient à prendre seulement les moitiés des arcs AM et AM', considérés successivement comme positifs et comme négatifs. On obtient d'abord l'arc positif AN; puis on remarque que l'arc positif AM' étant égal à la circonférence entière moins un arc égal à AM, sa moitié sera égale à une demi-circonférence moins un arc égal à AN : on obtient ainsi un second arc positif AN_1, NN_1 étant parallèle à l'axe Ox. De même, la considération de l'arc négatif AM' conduit à un arc négatif AN', et celle de l'arc négatif AM conduit à un second arc négatif AN'_1, $N'N'_1$ étant aussi parallèle à l'axe Ox. Ainsi, les moitiés des arcs terminés en M et en M' ont leurs extrémités aux sommets du

Fig. 14.



rectangle $NN_1N'_1N'$; et, par suite, il existe pour $\sin\frac{1}{2}a$ deux valeurs égales et de signes contraires représentées numériquement par les ordonnées Np et $N'p'$; il existe de même pour $\cos\frac{1}{2}a$ deux valeurs égales et de signes contraires représentées numériquement par les abscisses Op, Op'.

Si l'on augmentait les arcs AM et AM′ d'un nombre quelconque de circonférences, il faudrait augmenter leurs moitiés du même nombre de demi-circonférences. On passerait alors d'un sommet du rectangle $NN_1N'_1N'$ à ce même sommet ou au sommet diamétralement opposé, c'est-à-dire qu'on retrouverait toujours les mêmes valeurs pour $\sin\frac{1}{2}a$ et $\cos\frac{1}{2}a$.

2° *Étant donné* $\sin a$, *cherchons* $\sin\frac{1}{2}a$ et $\cos\frac{1}{2}a$.

La relation $\sin 2a = 2\sin a\cos a$, appliquée aux arcs a et $\frac{1}{2}a$, donne

$$\sin a = 2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a.$$

On a d'ailleurs

$$1 = \cos^2\frac{1}{2}a + \sin^2\frac{1}{2}a.$$

Par addition, il vient

$$1 + \sin a = \left(\cos\frac{1}{2}a + \sin\frac{1}{2}a\right)^2,$$

et, par soustraction,

$$1 - \sin a = \left(\cos\frac{1}{2}a - \sin\frac{1}{2}a\right)^2.$$

On a donc

$$\cos\frac{1}{2}a + \sin\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{1+\sin a},$$

$$\cos\frac{1}{2}a - \sin\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{1-\sin a},$$

d'où

$$\cos\frac{1}{2}a = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a}\right),$$

$$\sin\frac{1}{2}a = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin a} \mp \sqrt{1-\sin a}\right).$$

Dans ces formules, les signes supérieurs ou inférieurs doi-

vent se correspondre; seulement, le signe extérieur aux parenthèses est indépendant du signe qu'elles renferment.

On trouve quatre valeurs, deux à deux égales et de signes contraires, pour chacun des rapports $\cos\frac{1}{2}a$ et $\sin\frac{1}{2}a$; de plus, les valeurs de $\sin\frac{1}{2}a$ sont les mêmes que celles de $\cos\frac{1}{2}a$. Pour prouver qu'il en doit bien être ainsi, nous nous servirons du même procédé que dans le cas précédent, mais en l'employant sous forme algébrique. Nous avons vu (7) que tous les arcs ayant $\sin a$ pour sinus étaient renfermés dans les deux formules

$$2n\pi + a, \quad (2n+1)\pi - a.$$

Pour avoir toutes les valeurs possibles de $\sin\frac{1}{2}a$ et de $\cos\frac{1}{2}a$, il faut prendre la moitié de tous ces arcs. On doit alors déterminer les sinus et les cosinus des arcs renfermés dans les deux formules

$$n\pi + \frac{1}{2}a, \quad n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}a.$$

Une valeur paire $2k$ donnée à n conduit aux seules valeurs

$$\sin\frac{1}{2}a \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}a\right) = \cos\frac{1}{2}a$$

ou

$$\cos\frac{1}{2}a \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}a\right) = \sin\frac{1}{2}a.$$

En effet, on peut augmenter ou diminuer un arc d'un nombre entier quelconque de circonférences $2k\pi$, sans faire varier la valeur du sinus ou du cosinus de cet arc.

De même, une valeur impaire $2k+1$ donnée à n conduit aux seules valeurs

$$\sin\left(\pi + \frac{1}{2}a\right) = -\sin\frac{1}{2}a$$

et

$$\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}a\right) = -\cos\frac{1}{2}a$$

ou

$$\cos\left(\pi + \frac{1}{2}a\right) = -\cos\frac{1}{2}a$$

et

$$\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}a\right) = -\sin\frac{1}{2}a.$$

3° *Étant donnée* tang a, *cherchons* tang $\frac{1}{2}a$.

La relation $\tang 2a = \frac{2\tang a}{1-\tang^2 a}$, appliquée aux arcs a et $\frac{1}{2}a$, donne

$$\tang a = \frac{2\tang\frac{1}{2}a}{1-\tang^2\frac{1}{2}a};$$

d'où l'équation du second degré

$$\tang a.\tang^2\frac{1}{2}a + 2\tang\frac{1}{2}a - \tang a = 0.$$

Les deux racines de cette équation ont pour produit -1 (*Alg. élém.*, 189), quelle que soit la valeur de tang a. Cherchons ces racines sans résoudre l'équation.

Donner tang a, c'est donner (9) tous les arcs compris dans la formule

$$n\pi + a.$$

Pour avoir toutes les valeurs possibles de tang $\frac{1}{2}a$, il faut déterminer les tangentes des moitiés de tous ces arcs, qui sont renfermées à leur tour dans la formule

$$n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}a.$$

Si l'on donne à n la valeur paire $2k$, on obtient

$$\tang\left(k\pi + \frac{1}{2}a\right) = \tang\frac{1}{2}a,$$

quel que soit k; puisque la tangente d'un arc ne varie pas lorsque cet arc varie d'un nombre exact de demi-circonférences.

Si l'on attribue à n la valeur impaire $2k+1$, on obtient, quel que soit k (11),

$$\tang\left(k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}a\right) = \tang\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}a\right) = -\cot\frac{1}{2}a.$$

Les deux racines demandées sont donc $\tang\frac{1}{2}a$ et $-\cot\frac{1}{2}a$, dont le produit est bien égal à -1.

25. a représente, dans tout ce qui précède, le plus petit des arcs qui correspondent à la valeur attribuée au rapport trigonométrique considéré.

Il est utile de remarquer que lorsque, au lieu de donner seulement $\cos a$, $\sin a$ ou $\tang a$, on donne l'arc a lui-même, le signe de $\cos \frac{1}{2} a$, $\sin \frac{1}{2} a$ ou $\tang \frac{1}{2} a$, ne présente plus aucune ambiguïté.

Soit, par exemple, $a = 50°$. $\frac{1}{2} a$ étant inférieur à $45°$, son sinus et son cosinus seront positifs; mais son cosinus l'emportera sur son sinus. Si l'on connaît $\sin 50°$, on devra donc prendre

$$\sin 25° = +\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin 50°} - \sqrt{1 - \sin 50°}\right),$$

$$\cos 25° = +\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin 50°} + \sqrt{1 - \sin 50°}\right).$$

Pour la trisection de l'arc, on suivrait une marche analogue à celle que nous venons d'indiquer (voir *Note II*).

Formules rendues calculables par logarithmes.

26. Cherchons à rendre calculable par logarithmes la somme ou la différence de deux rapports trigonométriques.

Des formules

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b,\\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b,\\
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b,\\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b,
\end{aligned}$$

on déduit, par addition et soustraction,

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2 \sin a \cos b,\\
\sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2 \cos a \sin b,\\
\cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cos a \cos b,\\
\cos(a-b) - \cos(a+b) &= 2 \sin a \sin b.
\end{aligned}$$

Posons

$$a + b = p, \quad a - b = q,$$

c'est-à-dire

$$a = \frac{1}{2}(p+q) \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2}(p-q);$$

il viendra

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q),$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q),$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q).$$

$$\cos q - \cos p = 2 \sin \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q).$$

On a d'ailleurs

$$\sin p \pm \cos q = \sin p \pm \sin\left(\frac{\pi}{2} - q\right).$$

On peut donc écrire

$$\sin p + \cos q = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sin p - \cos q = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

En divisant entre elles les formules qui expriment la somme ou la différence de deux sinus ou de deux cosinus, on obtient les égalités suivantes, qu'il importe de se rappeler :

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{2\cos\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-q)},$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(p+q),$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos q - \cos p} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{2\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q)} = \cot\frac{1}{2}(p-q),$$

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q)}{2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-q),$$

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos q - \cos p} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q)}{2\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q)} = \cot\frac{1}{2}(p+q),$$

$$\frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos p} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{2\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q)}$$

$$= \cot\frac{1}{2}(p+q)\cot\frac{1}{2}(p-q).$$

On a enfin

$$\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a\cos b \pm \cos a\sin b}{\cos a\cos b},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}.$$

27. Proposons-nous maintenant de rendre calculable par logarithmes une expression de la forme $x = a \pm b$. On suppose que a et b sont des nombres positifs dont on connaît seulement les logarithmes; on suppose de plus $a > b$ dans le cas de $x = a - b$.

On peut écrire

$$x = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right).$$

Si l'on considère le signe $+$, on posera

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tang}^2 \varphi,$$

d'où

$$\log \operatorname{tang} \varphi = \frac{1}{2}(\log b - \log a).$$

Il viendra alors

$$x = a(1 + \operatorname{tang}^2 \varphi) = a \operatorname{séc}^2 \varphi = \frac{a}{\cos^2 \varphi}.$$

Si l'on considère le signe $-$, on posera

$$\frac{b}{a} = \sin^2 \varphi,$$

d'où

$$\log \sin \varphi = \frac{1}{2}(\log b - \log a).$$

Il viendra alors

$$x = a(1 - \sin^2 \varphi) = a \cos^2 \varphi.$$

28. Comme application, *cherchons l'expression trigonométrique des racines de l'équation générale du second degré*

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Les coefficients a, b, c, sont supposés des expressions monômes.

La formule de résolution est

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1° Si l'on a $b^2 - 4ac > 0$, les racines sont réelles et inégales. On peut toujours regarder a comme positif. Considérons d'abord le cas où c est > 0.

En mettant $-b$ en facteur commun, on peut écrire

$$x = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}\right).$$

$\frac{4ac}{b^2}$, quantité positive et plus petite que 1, puisque l'on a $b^2 - 4ac > 0$, peut être égalée à $\sin^2\varphi$. Il vient

$$x = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \cos\varphi\right).$$

On a (24)

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi, \quad 1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi.$$

Par conséquent

$$x' = -\frac{b}{a}\sin^2\frac{1}{2}\varphi, \quad x'' = -\frac{b}{a}\cos^2\frac{1}{2}\varphi.$$

Si l'on a, au contraire, $c < 0$, on égale $-\frac{4ac}{b^2}$, quantité positive, à $\tang^2\varphi$. Il en résulte

$$x = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \text{séc}\,\varphi\right).$$

Remplaçant $\text{séc}\,\varphi$ par $\frac{1}{\cos\varphi}$ et séparant les racines, on obtient facilement

$$x' = \frac{b}{a}\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi}, \quad x'' = -\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi}.$$

2° Si l'on a $b^2 - 4ac < 0$, les racines sont imaginaires. La formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-(4ac - b^2)}}{2a}$$

peut s'écrire

$$x = -\frac{b}{2a}\left[1 \mp \sqrt{-\left(\frac{4ac}{b^2} - 1\right)}\right].$$

La quantité $\frac{4ac}{b^2}$ est positive et plus grande que 1, puisque c est forcément positif (*Alg. élém.*, 191) et que $b^2 - 4ac$ est < 0. On peut donc poser

$$\frac{4ac}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi},$$

d'où

$$\frac{4ac}{b^2} - 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 = \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \text{tang}^2\varphi.$$

Par suite,

$$x = -\frac{b}{2a}(1 \mp \sqrt{-\text{tang}^2\varphi}),$$

c'est-à-dire (*Alg. élém.*, **186**)

$$x = -\frac{b}{2a}(1 \mp i\,\text{tang}\varphi).$$

Il n'y a pas lieu de considérer le cas où l'on a $b^2 - 4ac = 0$: les racines sont alors réelles et égales, et $x = -\frac{b}{2a}$.

Détermination directe des sinus et des cosinus des arcs multiples de 9°, renfermés dans le premier quadrant.

29. Nous avons déjà trouvé (**7**)

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 18° = \cos 72° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Il résulte de cette dernière relation

$$\cos 18° = \sin 72° = \sqrt{1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}.$$

On peut alors obtenir cos 36° et sin 36° à l'aide des formules

$$\cos 36° = 2\cos^2 18° - 1 \quad (\mathbf{24})$$

et

$$\sin 36° = \sqrt{1 - \cos^2 36°},$$

qui conduisent à

$$\cos 36° = \frac{10+2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \sin 54°,$$

et

$$\sin 36° = \sqrt{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \cos 54°.$$

On a de même (24)

$$\sin 9^\circ = \cos 81^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 18^\circ} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 18^\circ}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$
$$\cos 9^\circ = \sin 81^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 18^\circ} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 18^\circ}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$
$$\sin 27^\circ = \cos 63^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 54^\circ} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 54^\circ}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$
$$\cos 27^\circ = \sin 63^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 54^\circ} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 54^\circ}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

En résumé, on obtiendra donc le tableau suivant :

$$\sin 0^\circ = \cos 90^\circ = 0,$$
$$\sin 9^\circ = \cos 81^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$
$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$
$$\sin 27^\circ = \cos 63^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$
$$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$
$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$
$$\sin 63^\circ = \cos 27^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$
$$\sin 72^\circ = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$
$$\sin 81^\circ = \cos 9^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$
$$\sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1.$$

CHAPITRE III.

CONSTRUCTION ET USAGE DES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES.

Notions préliminaires.

30. Pour que les rapports trigonométriques puissent être utiles, il faut nécessairement avoir à sa disposition une table dans laquelle on trouve, en face du nombre de degrés d'un arc, les valeurs de ses rapports trigonométriques ou, mieux, les valeurs des logarithmes de ces mêmes rapports.

Les arcs considérés peuvent atteindre un nombre quelconque de degrés (2); mais il suffit que la table aille depuis 0° jusqu'à 90°.

En effet, on peut toujours trouver un arc plus petit que 90° et ayant, sauf les signes, les mêmes rapports trigonométriques que l'arc proposé. C'est ce qu'on appelle *réduire un arc au premier quadrant.*

Soit, par exemple, l'arc de 1537°. Cet arc représente quatre circonférences ou 1440°, plus 97° : il a donc les mêmes rapports trigonométriques que l'arc de 97°. Cet arc a pour supplément l'arc de 83°. On aura donc, en se reportant aux développements précédents :

$$\sin 1537^\circ = \sin 97^\circ = \sin 83^\circ,$$
$$\cos 1537^\circ = \cos 97^\circ = -\cos 83^\circ,$$
$$\operatorname{tang} 1537^\circ = \operatorname{tang} 97^\circ = -\operatorname{tang} 83^\circ.$$

La table doit aller jusqu'à 90°; mais elle n'a besoin d'être calculée que jusqu'à 45°. En effet, l'on a (4)

$$\sin(45^\circ + a) = \cos(45^\circ - a),$$
$$\cos(45^\circ + a) = \sin(45^\circ - a),$$
$$\operatorname{tang}(45^\circ + a) = \cot(45^\circ - a).$$

Une fois les logarithmes des sinus et des cosinus des arcs compris dans la table, calculés directement, on aura immédiatement

$$\operatorname{tang} a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad \text{ou} \quad \log \operatorname{tang} a = \log \sin a - \log \cos a;$$

de même,

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a} \quad \text{ou} \quad \log \cot a = -\log \operatorname{tang} a.$$

On n'inscrit pas en général dans la table les logarithmes des

sécantes et des cosécantes. On a d'ailleurs

$$\text{séc}\, a = \frac{1}{\cos a} \quad \text{ou} \quad \log \text{séc}\, a = -\log \cos a,$$

et

$$\text{coséc}\, a = \frac{1}{\sin a} \quad \text{ou} \quad \log \text{coséc}\, a = -\log \sin a.$$

31. Nous allons montrer, non pas comment on calcule en réalité les logarithmes des rapports trigonométriques, mais comment on pourrait les calculer à l'aide d'une méthode élémentaire.

Pour exposer cette méthode, nous avons besoin de nous appuyer sur quelques propositions préliminaires, d'ailleurs indispensables à connaître.

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons expressément que les arcs considérés font partie de la circonférence de rayon 1.

1° *Tout arc plus petit que 90° est compris entre son sinus et sa tangente.*

L'arc $AM = a$ (*fig.* 15) est plus grand que sa corde, à plus forte raison plus grand que MP. On a donc

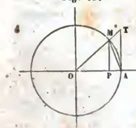


Fig. 15.

$$a > \sin a.$$

D'autre part, le secteur AOM est moindre que le triangle AOT. On a donc

$$\text{arc AM} \cdot \frac{OA}{2} < AT \cdot \frac{OA}{2},$$

c'est-à-dire

$$a < \text{tang}\, a.$$

2° *A mesure que l'arc a tend vers zéro, le rapport* $\frac{\sin a}{a}$ *tend vers une limite égale à l'unité.*

On a en effet

$$\sin a < a < \text{tang}\, a \quad \text{ou} \quad \frac{\sin a}{\cos a}.$$

Divisant tout par $\sin a$, il vient

$$1 < \frac{a}{\sin a} < \frac{1}{\cos a}.$$

A mesure que l'arc a diminue, $\cos a$ converge vers l'unité, tout en restant plus petit que l'unité. Pour $a = 0$, on a $\cos a = 1$. Par conséquent $\frac{a}{\sin a}$ tombant entre 1 et une quantité plus grande que 1, qui a l'unité pour limite, on peut écrire

$$\lim \frac{a}{\sin a} = 1,$$

ce qui donne

$$\lim \frac{\sin a}{a} = 1.$$

Il résulte de ce qui précède que, dans le même cas, on a aussi

$$\lim \frac{\operatorname{tang} a}{a} = 1;$$

car

$$\frac{\operatorname{tang} a}{a} = \frac{\sin a}{a} \cdot \frac{1}{\cos a}.$$

3° *La différence entre un arc et son sinus est plus petite que le quart du cube de l'arc.*

Il est bien entendu qu'il s'agit toujours d'un arc a inférieur à 90°.

On a

$$\frac{1}{2} a < \operatorname{tang} \frac{1}{2} a.$$

Multiplions les deux membres de cette inégalité par $2 \cos^2 \frac{1}{2} a$. Il viendra, après réduction et en se rappelant la formule $\sin a = 2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a$,

$$a \cos^2 \frac{1}{2} a < \sin a,$$

ou

$$a \left(1 - \sin^2 \frac{1}{2} a\right) < \sin a.$$

Cette inégalité revient à

$$a - \sin a < a \sin^2 \frac{1}{2} a.$$

Elle subsistera à fortiori si l'on augmente le second membre en remplaçant $\sin \frac{1}{2} a$ par une quantité plus grande $\frac{1}{2} a$. On aura alors

$$a - \sin a < \frac{a^3}{4}.$$

On a donc pour limite supérieure de $\sin a$ l'arc a lui-même, et pour limite inférieure la différence $a - \frac{a^3}{4}$.

On pourrait obtenir, s'il était nécessaire, deux limites analogues pour $\cos a$. On a (24)

$$\cos a = \cos^2 \frac{1}{2} a - \sin^2 \frac{1}{2} a = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} a.$$

Si l'on remplace dans cette formule $\sin\frac{1}{2}a$ par sa limite supérieure $\frac{1}{2}a$, il vient

$$\cos a > 1 - \frac{a^2}{2};$$

si l'on y remplace $\sin\frac{1}{2}a$ par sa limite inférieure $\frac{1}{2}a - \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^3}{4}$, il vient

$$\cos a < 1 - 2\left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}\right)^2,$$

ou

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16} - \frac{a^6}{512}.$$

Cette dernière inégalité sera à plus forte raison vérifiée, si l'on néglige le dernier terme du second membre. $\cos a$ aura donc $1 - \frac{a^2}{2}$ pour limite inférieure, et $1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}$ pour limite supérieure.

Calcul du sinus et du cosinus de l'arc de 10". — Formules de Th. Simpson.

32. La demi-circonférence π renferme 648000". On aura donc

$$\text{arc } 10'' = \frac{\pi}{64800} = 0{,}00004\,8481368110\ldots.$$

Cette valeur représente *une limite supérieure* de $\sin 10''$. On a

$$\text{arc } 10'' < 0{,}00005,$$

et par suite

$$\frac{(\text{arc } 10'')^3}{4} < 0{,}00000\,00000\,00031\ldots.$$

On aura donc

$$\text{arc } 10'' - \frac{(\text{arc } 10'')^3}{4} > 0{,}00004\,8481368110$$
$$- 0{,}00000\,00000\,00031,$$

c'est-à-dire

$$\text{arc } 10'' - \frac{(\text{arc } 10'')^3}{4} > 0{,}00004\,8481368079\ldots.$$

Mais le premier membre de cette dernière inégalité représente *une limite inférieure* de $\sin 10''$. $\sin 10''$ tombe donc

entre deux expressions qui ne diffèrent qu'à partir de la treizième décimale. On peut donc écrire, à moins d'une demi-unité du treizième ordre décimal,

$$\sin 10'' = 0,0000484813681.$$

Nous venons de trouver

$$\cos a > 1 - \frac{a^2}{2} \quad \text{et} \quad \cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}.$$

Si a désigne l'arc de $10''$, c'est-à-dire si l'on suppose a inférieur à 0,00005, on aura

$$\frac{a^4}{16} < \frac{5^4}{16.10^{20}} \quad \text{ou} \quad \frac{a^4}{16} < \frac{1}{16^2.10^{16}},$$

inégalité qu'on peut encore écrire à fortiori

$$\frac{a^4}{16} < \frac{1}{2.10^{18}}.$$

Par conséquent, les deux limites de $\cos a$ diffèrent de moins d'une demi-unité du dix-huitième ordre décimal : il suffit donc de calculer la première de ces deux limites. Si l'on s'arrête à la treizième décimale, on trouve

$$\cos 10'' = 0,9999999988248.$$

33. Il est facile maintenant de calculer, de dix secondes en dix secondes, les sinus et les cosinus de tous les arcs compris entre 0° et 45°. Prenons les formules

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b,$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b.$$

Posons

$$a = mb.$$

Il viendra, en isolant $\sin(m+1)b$ et $\cos(m+1)b$,

$$\sin(m+1)b = 2\sin mb.\cos b - \sin(m-1)b,$$
$$\cos(m+1)b = 2\cos mb.\cos b - \cos(m-1)b.$$

On fera dans ces formules $b = 10''$, et l'on donnera successivement à m toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à 16200, nombre de fois que l'arc de 45° contient l'arc de $10''$. Si l'on fait $m = 1, 2, 3, \ldots$, il vient

$$\sin 20'' = 2\sin 10'' \cos 10'',$$
$$\cos 20'' = 2\cos^2 10'' - 1,$$
$$\sin 30'' = 2\sin 20'' \cos 10'' - \sin 10'',$$
$$\cos 30'' = 2\cos 20'' \cos 10'' - \cos 10'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nous ne nous arrêterons pas aux abréviations dont on peut faire usage dans ces calculs. C'est ainsi qu'on a d'abord con-

struit des tables de log sinus et de log cosinus; mais on peut disposer aujourd'hui de méthodes beaucoup plus rapides.

Disposition et usage des tables trigonométriques.

34. Nous considérerons, comme nous l'avons fait pour les logarithmes des nombres, les Tables de *Callet* à sept décimales, et celles de *De Lalande* à cinq décimales.

Dans l'ouvrage de Callet, on trouve d'abord une table contenant les logarithmes des sinus et des tangentes des arcs compris entre 0° et 5°, ces arcs croissant successivement d'une seconde. La page de gauche correspond aux sinus, la page de droite aux tangentes. Le nombre de degrés de l'arc est en haut de la page, à gauche et en dehors du cadre. Les secondes sont comptées, pour chaque page, dans la première colonne à gauche; les minutes sont indiquées en haut des autres colonnes. Par suite des propriétés des arcs complémentaires, on a en même temps les logarithmes des cosinus et des cotangentes des arcs compris entre 90° et 85°, ces arcs décroissant successivement d'une seconde. Le titre *sinus* étant en haut de la page, le titre *cosinus* est en bas; il en est de même pour la tangente et la cotangente. Lorsqu'on cherche un cosinus ou une cotangente, le nombre de degrés de l'arc est en bas de la page, à droite et en dehors du cadre; les secondes sont alors comptées pour chaque page dans la dernière colonne à droite; les minutes sont indiquées au bas des autres colonnes. Dans la première colonne à gauche, les secondes sont comptées en descendant de 0 jusqu'à 60; dans la dernière colonne à droite, elles sont comptées en montant de 0 jusqu'à 60. Ainsi, le logarithme du sinus de 0°47′24″ est indiqué dans la table comme égal à 8,1394907; et ce logarithme est en même temps celui de cos 89°12′36″.

Nous devons immédiatement faire une remarque importante. Les sinus et les cosinus des arcs compris entre 0° et 90° sont plus petits que 1; il en est de même des tangentes des arcs compris entre 0° et 45° et des cotangentes des arcs compris entre 45° et 90° : les logarithmes de ces différents rapports auront dès lors des caractéristiques négatives (voir l'*Alg. élém.*, 256). En se plaçant au point de vue typographique, on a voulu éviter dans les tables ces caractéristiques négatives; et, pour y arriver, *on a augmenté de* 10 les logarithmes correspondants. Il faut donc, si l'on veut se conformer au mode de calcul recommandé précédemment, *retrancher* 10 aux caractéristiques de ces mêmes logarithmes. On aura ainsi

$$\log \sin 0°47'24'' = \log \cos 89°12'36'' = \bar{2},1394907.$$

Les tables qui viennent après celles dont nous venons d'in-

diquer la disposition donnent, de dix secondes en dix secondes, les logarithmes des sinus, des cosinus, des tangentes et des cotangentes, des arcs compris entre 0° et 90°. D'après les propriétés des arcs complémentaires, les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes des arcs de 0° à 45°, correspondent aux logarithmes des cosinus, sinus, cotangentes et tangentes des arcs de 90° à 45°. Aux titres *sinus, cosinus, tangentes* et *cotangentes*, placés en haut des pages, correspondront donc les titres *cosinus, sinus, cotangentes* et *tangentes*, placés en bas. Si le titre général 0° est placé en haut d'une page et hors du cadre, le titre général 89° sera placé hors du cadre, en bas de la même page. Si l'on part de 0°, les minutes sont comptées dans la première colonne à gauche et, d'une minute à l'autre, dans une colonne contiguë, sont comptées les dizaines de secondes. On opère alors en descendant. Si l'on part de 89°, les minutes sont comptées dans la dernière colonne à droite et, d'une minute à l'autre, dans une colonne contiguë, sont comptées les dizaines de secondes. On opère alors en montant. C'est ainsi qu'on trouvera

$$\log \sin 0°19'30'' = \log \cos 89°40'30'' = \bar{3},7537584.$$

Après la colonne marquée *sinus*, vient une colonne marquée *différences*; de même, après la colonne marquée *cosinus*. Ces différences sont celles qui existent entre deux logarithmes consécutifs de la table; elles sont exprimées en unités du septième ordre décimal et écrites entre les logarithmes qu'il faut retrancher l'un de l'autre pour les obtenir. Entre la colonne des *tangentes* et celle des *cotangentes*, est une colonne intitulée *différences communes* : ces différences sont celles qui existent entre deux logarithmes consécutifs de la table, tangentes ou cotangentes. Et elles sont *communes* aux logarithmes de ces rapports, parce que le produit de la tangente d'un arc par sa cotangente est égal à 1. Il en résulte qu'on a pour deux arcs quelconques a et b

$$\operatorname{tang} a \cot a = \operatorname{tang} b \cot b,$$

d'où

$$\frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} b} = \frac{\cot b}{\cot a}$$

et

$$\log \operatorname{tang} a - \log \operatorname{tang} b = \log \cot b - \log \cot a.$$

Dans les Tables de De Lalande, la disposition adoptée est analogue à celle que nous venons de décrire; seulement, deux arcs consécutifs de la table diffèrent d'une minute, de sorte que les colonnes de secondes sont supprimées. De plus, les colonnes *sinus* et *cosinus*, au lieu d'être voisines l'une de

l'autre, sont séparées par les colonnes *tangentes* et *cotangentes*.

35. La première question à résoudre à l'aide des tables trigonométriques est celle-ci : *Étant donné un arc, trouver les logarithmes de ses rapports trigonométriques.*

Soit demandé $\log \sin 39°27'43''$.

Les Tables de Callet donnent immédiatement

$$\log \sin 39°27'40'' = \bar{1},8031527.$$

Admettons que, pour de petits accroissements des arcs, il y ait proportionnalité entre ces accroissements et ceux des logarithmes des rapports trigonométriques correspondants. L'examen de la table prouve qu'il en est ainsi, du moins jusqu'à l'ordre décimal considéré, quand les arcs donnés dépassent 5°. La différence entre les *log sin* de deux arcs consécutifs de la table, c'est-à-dire de deux arcs différents de 10″, est en cet endroit égale à 256 unités du septième ordre décimal. En désignant par δ l'accroissement à faire subir au log sin pour un accroissement de l'arc égal à 3″, on devra donc poser

$$\frac{\delta}{256} = \frac{3}{10}, \quad \text{d'où} \quad \delta = 256 \cdot \frac{3}{10} = 76,8.$$

On écrira par suite

$$\begin{array}{ll} \log \sin 39°27'40'' = \bar{1},8031527 \\ \underline{\text{pour } 3'' \text{ (en plus)} \quad 77 \text{ (en plus)}} \\ \log \sin 39°27'43'' = \bar{1},8031604 \end{array}$$

Si l'on opère avec les Tables de De Lalande, on aura

$$\log \sin 39°27' = \bar{1},8030 5.$$

En appliquant la même proportion et en remarquant que les arcs consécutifs de la table diffèrent d'une minute ou de 60 secondes, on aura pour l'accroissement δ

$$\frac{\delta}{15} = \frac{43}{60}, \quad \text{d'où} \quad \delta = 15 \cdot \frac{43}{60} = 10,75.$$

Par suite, on écrira

$$\begin{array}{ll} \log \sin 39°27' = \bar{1},80305 \\ \underline{\text{pour } 43'' \text{ (en plus)} \ 11 \text{ (en plus)}} \\ \log \sin 39°27'43'' = \bar{1},80316. \end{array}$$

S'il s'agit du logarithme d'une tangente, on opérera d'une

manière identique. Mais la recherche du logarithme d'un cosinus ou d'une cotangente exige la modification suivante. Au lieu de considérer l'arc de la table qui approche le plus de l'arc proposé *par défaut*, on prend celui qui en approche le plus *par excès*.

Soit demandé

$$\log \cot 72^\circ 25' 17''.$$

Les Tables de Callet donnent immédiatement

$$\log \cot 72^\circ 25' 20'' = \bar{1},5007740.$$

Si l'arc *diminue* de 10″, la table montre que le logarithme de sa cotangente *augmente* en cet endroit de 731 unités du septième ordre décimal. Si l'arc diminue seulement de 3″, le logarithme de sa cotangente augmentera d'une quantité δ donnée par la proportion

$$\frac{\delta}{731} = \frac{3}{10}, \quad \text{d'où} \quad \delta = 731 \times \frac{3}{10} = 219,3.$$

On aura, par conséquent,

$$\begin{array}{l} \log \cot 72^\circ 25' 20'' = \bar{1},5007740 \\ \underline{\qquad \text{pour } 3'' \text{ (en moins) } 219 \text{ (en plus)}} \\ \log \cot 72^\circ 25' 17'' = \bar{1},5007959. \end{array}$$

Si l'on emploie les Tables de De Lalande, on a

$$\log \cot 72^\circ 26' = \bar{1},50048.$$

En appliquant la proportion précédente et en remarquant que la différence tabulaire 44 correspond à une différence de 60″, on aura

$$\frac{\delta}{44} = \frac{43}{60}, \quad \text{d'où} \quad \delta = 44 \cdot \frac{43}{60} = 31,5.$$

43 représente le nombre de secondes qu'il faut retrancher de l'arc 72°26′ pour obtenir l'arc donné 72°25′17″. Il viendra

$$\begin{array}{l} \log \cot 72^\circ 26' = \bar{1},50048 \\ \underline{\qquad \text{pour } 43'' \text{ (en moins) } 32 \text{ (en plus)}} \\ \log \cot 72^\circ 25' 17'' = \bar{1},50080. \end{array}$$

On opérera absolument de la même manière, si l'on cherche un logarithme cosinus.

En résumé, s'il s'agit d'un *sinus* ou d'une *tangente*, on prend le logarithme sinus ou le logarithme tangente de l'arc de la table qui approche le plus de l'arc proposé *par défaut*. S'il

s'agit d'un *cosinus* ou d'une *cotangente*, on prend le logarithme cosinus ou le logarithme cotangente de l'arc de la table qui approche le plus de l'arc proposé *par excès*. DANS LES DEUX CAS, on *augmente* le logarithme de la table de la quantité $\delta = \Delta \cdot \frac{d}{D}$. Δ est la différence tabulaire qui correspond aux deux logarithmes comprenant le logarithme cherché ; d est la différence entre l'arc donné et celui de la table ; D est la différence constante entre deux arcs consécutifs de la table. On voit que l'approximation de δ est de même ordre au moins que celle de Δ.

36. La seconde question à résoudre est celle-ci : *Étant donné le logarithme d'un rapport trigonométrique, trouver l'arc plus petit que 90° auquel il appartient.*

Soit demandé l'arc x, sachant qu'on a

$$\log \operatorname{tang} x = \bar{1},8750612.$$

Il faut par la pensée augmenter la caractéristique $\bar{1}$ de 10 unités et chercher dans la table de Callet le logarithme tangente qui approche le plus *par défaut* du logarithme proposé. On trouve

$$\log \operatorname{tang} 36°52'10'' = \bar{1},8750541.$$

La différence entre les deux logarithmes est 71 unités du septième ordre décimal ; en cet endroit, la différence tabulaire est égale à 439 unités du même ordre. Si l'on désigne par d le nombre de secondes à ajouter à l'arc de la table pour avoir l'arc cherché, on aura d'après ce qui précède (35)

$$\frac{d}{10} = \frac{71}{439}, \quad \text{d'où} \quad d = 10 \cdot \frac{71}{439} = 1,62.$$

On pourra donc écrire

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{tang} 36°52'10'' = \bar{1},8750541 & \\ \text{pour } 1'',62 \text{ (en plus)} \quad 71 \text{ (en plus)} & \\ \hline \log \operatorname{tang} x = \bar{1},8750612 & \\ x = 36°52'11'',62. & \end{array}$$

Si l'on se sert des Tables de De Lalande, on prendra

$$\log \operatorname{tang} x = \bar{1},87506.$$

On aura alors.

$$\log \operatorname{tang} 36°52' = \bar{1},87501.$$

La différence entre les deux logarithmes étant 5 et la diffé-

rence tabulaire étant 26, on aura

$$\frac{d}{60} = \frac{5}{26}, \quad \text{d'où} \quad d = 60 \cdot \frac{5}{26} = 11,54.$$

Par suite

$$x = 36°52' 11'',54.$$

Nous verrons dans un instant d'où provient la différence entre les valeurs trouvées à l'aide des Tables de Callet ou des Tables de De Lalande.

S'il s'agit de trouver l'arc x, connaissant $\log \sin x$, on opérera d'une manière identique. Mais si l'on donne $\log \cos x$ ou $\log \cot x$, il faudra apporter au calcul la modification suivante.

Soit donné

$$\log \cos x = \overline{1},7280956.$$

On cherchera dans la table le logarithme cosinus qui approche le plus *par excès* du logarithme donné. On trouve ainsi, avec les Tables de Callet,

$$\log \cos 57°40'30'' = \overline{1},7281273.$$

Ce logarithme surpasse le logarithme proposé de 317 unités du septième ordre décimal; d'après la table et, en cet endroit, l'arc *augmentant* de 10'', le logarithme cosinus *diminue* de 332 unités du même ordre. En désignant par d le nombre de secondes à ajouter à l'arc 57°40'30'' pour que le logarithme cosinus de l'arc obtenu devienne égal au logarithme donné, on aura

$$\frac{d}{10} = \frac{317}{332}, \quad \text{d'où} \quad d = 10 \cdot \frac{317}{332} = 9,55.$$

Par suite, on écrira

$$\begin{array}{r} \log \cos 57°40'30'' = \overline{1},7281273 \\ \text{pour } 9'',55 \text{ (en plus)} \quad 317 \text{ (en moins)} \\ \hline \log \cos x = \overline{1},7280956 \\ x = 57°40' 39'',55. \end{array}$$

Si l'on emploie les Tables de De Lalande, on prendra

$$\log \cos x = \overline{1},72810.$$

On aura alors

$$\log \cos 57°40' = \overline{1},72823.$$

La différence entre les deux logarithmes étant 13, et la dif-

férence tabulaire étant 20, on pourra poser

$$\frac{d}{60} = \frac{13}{20}, \quad \text{d'où} \quad d = 60 \cdot \frac{13}{20} = 39.$$

Par suite

$$x = 57^\circ 40' 39''.$$

On opérera absolument de la même manière si l'on donne un logarithme cotangente.

En résumé, si l'on donne *log sin x* ou *log tang x*, on prend le logarithme de la table qui approche le plus du logarithme proposé *par défaut*. Si l'on donne *log cos x* ou *log cot x*, on prend le logarithme de la table qui approche le plus du logarithme proposé *par excès*. Dans les deux cas, on *augmente* l'arc de la table de la quantité $d = \mathrm{D} \cdot \frac{\delta}{\Delta}$. Δ est toujours la différence tabulaire qui correspond aux deux arcs de la table comprenant l'arc cherché; δ est la différence qui existe entre le logarithme donné et celui qu'on considère dans la table; D est la différence constante entre deux arcs consécutifs de la table.

37. Il est important de remarquer que, puisqu'on a (35)

$$\delta = \Delta \cdot \frac{d}{\mathrm{D}},$$

l'approximation de δ par rapport à Δ dépend du quotient $\frac{d}{\mathrm{D}}$. Ce quotient étant nécessairement inférieur à l'unité et la différence tabulaire Δ étant exacte à moins d'une unité, on voit qu'on pourra compter sur le chiffre des unités de δ (δ étant exprimé en cent-millièmes ou en dix-millionièmes comme Δ), qu'on se serve des Tables de De Lalande ou de celles de Callet. C'est pourquoi les résultats fournis par les deux tables doivent être identiques jusqu'aux cent-millièmes.

Dans le problème inverse (36), on a

$$d = \mathrm{D} \cdot \frac{\delta}{\Delta} = \delta \cdot \frac{\mathrm{D}}{\Delta},$$

et l'approximation de d dépend du quotient $\frac{\mathrm{D}}{\Delta}$. Supposons, pour simplifier, que l'erreur sur δ, différence des deux logarithmes comparés, atteigne une unité, et reprenons les exemples précédents en négligeant l'erreur que peut présenter Δ.

Dans le premier exemple, en se servant des Tables de Callet, on a

$$\frac{\mathrm{D}}{\Delta} = \frac{10}{439} = 0,023;$$

par suite, l'arc x sera déterminé à moins de $\frac{1}{10}$ de seconde.
En se servant des Tables de De Lalande, on aura

$$\frac{D}{\Delta}=\frac{60}{26}=2,3,$$

c'est-à-dire que l'arc x pourra n'être pas exact à $1''$ près.

Dans le second exemple, en se servant des Tables de Callet, on a

$$\frac{D}{\Delta}=\frac{10}{332}=0,03;$$

l'arc x sera donc encore déterminé à moins de $\frac{1}{10}$ de seconde.
En se servant des Tables de De Lalande, on aura

$$\frac{D}{\Delta}=\frac{60}{20}=3,$$

c'est-à-dire que l'arc x pourra n'être pas exact à $1''$ près.

On voit pourquoi les résultats donnés par les deux tables ne concordent plus quand il s'agit de résoudre la seconde question (36).

On voit aussi que l'*approximation sur laquelle on peut compter est d'autant plus grande, que la différence tabulaire* Δ *est elle-même plus considérable*. La table montre que les différences tabulaires relatives aux tangentes sont les plus grandes. Et, en effet, puisqu'on a

$$\operatorname{tang} a=\frac{\sin a}{\cos a} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}(a+h)=\frac{\sin(a+h)}{\cos(a+h)},$$

on a aussi

$$\log\operatorname{tang}(a+h)-\log\operatorname{tang} a=[\log\sin(a+h)-\log\sin a]$$
$$+[\log\cos a-\log\cos(a+h)];$$

c'est-à-dire que les différences tabulaires des tangentes peuvent s'obtenir en ajoutant les différences tabulaires des sinus et des cosinus correspondants. D'ailleurs, la tangente croissant depuis 0 jusqu'à $+\infty$, tandis que le sinus et le cosinus restent compris, dans les limites des tables, entre 0 et 1, les différences tabulaires relatives aux tangentes doivent à priori être les plus grandes. En résumé, *un arc est donc toujours mieux déterminé par sa tangente*.

38. Nous avons laissé de côté le cas où les différences de la table variant trop rapidement, on ne peut plus admettre la pro-

portionnalité entre les accroissements des arcs et ceux des logarithmes de leurs rapports trigonométriques.

Dans ce cas, qui est celui des petits arcs, on peut regarder les arcs comme proportionnels à leurs sinus ou à leurs tangentes (31, 2°). Admettons que a soit le nombre entier de secondes de l'arc considéré, et que h en soit la partie décimale, on aura

$$\frac{\sin(a+h)}{\sin a}=\frac{a+h}{a}=\frac{\text{tang}(a+h)}{\text{tang}\,a},$$

d'où

$$\log\sin\ (a+h)=\log\sin a\ \ +\log(a+h)+\bar{\text{L}}.a,$$
$$\log\text{tang}\,(a+h)=\log\text{tang}\,a+\log(a+h)+\bar{\text{L}}.a.$$

On peut remarquer immédiatement que, puisqu'on a

$$\text{tang}\,(a+h)=\frac{\sin(a+h)}{\cos(a+h)},$$

on a aussi

$$\log\cos(a+h)=\log\sin(a+h)-\log\text{tang}\,(a+h);$$

c'est-à-dire, d'après les formules précédentes,

$$\log\cos(a+h)=\log\sin a-\log\text{tang}\,a=\log\cos a.$$

Par conséquent, les arcs $a+h$ et a ont le même logarithme cosinus. C'est ce qu'indiquent les tables. On peut donc, dans ce cas, négliger la fraction décimale h.

Reprenons nos formules et cherchons log sin 1° 2′ 17″,94. On a ici

$$a=3737'' \quad \text{et} \quad h=0'',94.$$

Les Tables de Callet donnent immédiatement

$$\log\sin a=\log\sin 1°\,2'\,17''=\bar{2},2580742.$$

La table de logarithmes des nombres donne

$$\log(a+h)=\log 3737,94=3,5726323,$$
$$\log a \qquad =\log 3737 \qquad =3,5725231,$$

d'où

$$\bar{\text{L}}.a=\bar{4},4274769.$$

Il viendra donc, en faisant la somme,

$$\log\sin(a+h)=\log\sin 1°2'\,17'',94=\bar{2},2581834.$$

On opérerait de même si l'on demandait log tang $(a+h)$. Si l'on voulait avoir log cot $(a+h)$, on chercherait log tang $(a+h)$, et l'on en changerait le signe. Si l'on demandait log cos $(a+h)$, on chercherait, comme nous l'avons déjà dit, log cos a.

Si l'on se sert des tables à cinq décimales données par M. Hoüel (*), on opérera comme il suit. On trouvera, au-dessus de chaque colonne marquée *N* dans la Table de logarithmes des Nombres, l'indication des degrés et minutes renfermés dans les arcs dont les nombres de cette colonne représentent l'expression en secondes (les secondes additionnelles sont marquées de cinq en cinq dans une colonne à gauche de la page. Les Tables de Callet présentent une disposition analogue). Au-dessus de la colonne intitulée *Log.*, se trouve le logarithme qu'il faut ajouter au logarithme du nombre considéré dans la colonne *N*, pour avoir celui du sinus de l'arc qu'il représente; c'est-à-dire que ce logarithme additionnel est celui du rapport $\frac{\sin a}{a}$, *mais augmenté de* 10. Si l'on cherche un logarithme tangente, il faut remplacer les deux derniers chiffres de $\log \frac{\sin a}{a}$ par ceux qui, placés à droite, en sont séparés par le signe (;) : on a alors

$$\log \frac{\operatorname{tang} a}{a} + 10.$$

Reprenons l'exemple précédent. Nous chercherons la colonne qui, dans la Table de logarithmes des Nombres, correspond à 1°2'. Nous prendrons le logarithme du 17° nombre de cette colonne, augmenté de 0,94, et nous aurons

$$\log 1^\circ 2' 17'',94 = \log 3737'',94 = 3,57263.$$

Au-dessus de la colonne *Log.* considérée, nous trouvons le nombre 4,68555. Ce nombre représente le logarithme du rapport $\frac{\sin 3737''}{3737''}$, *mais augmenté de* 10. On devra donc ajouter au logarithme précédemment écrit $\overline{6},68555$, et l'on aura

$$\log \sin 1^\circ 2' 17'',94 = \overline{2},25818.$$

39. La question inverse se traitera en appliquant les mêmes formules. On déduit de ces formules (38):

$$\log(a+h) = \log \sin (a+h) + \overline{\mathrm{L}} \sin a + \log a,$$
$$\log(a+h) = \log \operatorname{tang}(a+h) + \overline{\mathrm{L}} \operatorname{tang} a + \log a.$$

(*) *Tables de logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques*, par M. J. Hoüel; chez Mallet-Bachelier. Nous recommandons ces tables à ceux qui, comme les élèves de l'École Centrale, ont à la fois besoin de calculer sûrement et rapidement.

Soit donné, par exemple,

$$\log \operatorname{tang} x = \bar{2},4578106 = \log \operatorname{tang}(a+h).$$

Pour nous servir des tables, nous devons, par la pensée, ajouter 10 à la caractéristique de ce logarithme. Si l'on emploie les Tables de Callet, on cherchera l'arc qui approche le plus de l'arc x par défaut, et l'on trouvera

$$\log \operatorname{tang} 1^\circ 38' 37'' = \bar{2},4577956 = \log \operatorname{tang} a.$$

On aura donc

$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{tang} a = 1,5422044$$

et en même temps

$$\log a = \log 5917'' = 3,7721016.$$

En ajoutant les trois logarithmes, il vient

$$\log(a+h) = 3,7721166,$$

et la Table de logarithmes des Nombres donne alors

$$x = a + h = 5917'',21 = 1^\circ 38' 37'',21.$$

Si l'on fait usage des Tables de M. Hoüel, on voit que $\log \operatorname{tang} x$ (augmenté de 10 unités) est égal à 8,45781. On cherche alors dans la Table de logarithmes des Nombres la page qui correspond aux nombres 8,44 et 8,46, ces nombres comprenant entre eux le logarithme donné augmenté de 10. Ces nombres sont en haut de la page, en dehors du cadre, et précédés des initiales *S. T.* des mots *sinus* et *tangente*. Pour cette page, on a

$$\log \frac{\operatorname{tang} a}{a} + 10 = 4,68569 \quad \text{ou} \quad \log \frac{\operatorname{tang} a}{a} = \bar{6},68569.$$

Si l'on retranche ce logarithme du logarithme proposé, on aura

$$\log(a+h) = \log \operatorname{tang}(a+h) + \bar{\mathrm{L}} \operatorname{tang} a + \log a,$$

c'est-à-dire

$$\log(a+h) = \log \operatorname{tang}(a+h) - \log \frac{\operatorname{tang} a}{a} = 3,77212.$$

La Table de logarithmes des Nombres donne alors

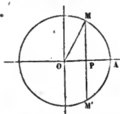
$$x = a + h = 5917'',2 \quad \text{ou} \quad x = 1^\circ 38' 37'',2.$$

On opère de même si l'on donne $\log \sin x$. Si l'on donne $\log \cot x$, on change le signe du logarithme proposé, et l'on a $\log \operatorname{tang} x$. Enfin, lorsqu'il s'agit de déterminer un très-petit arc connaissant le logarithme cosinus de cet arc, on ne peut

le faire exactement, d'après les détails dans lesquels nous sommes entrés (38).

40. Applications. — 1° *Chercher le rayon du cercle dans lequel un arc de 100 mètres et sa corde diffèrent de moins de* $0^m,001$.

Fig. 16.



Supposons le problème résolu. Soit $OM = R$ le rayon cherché, soient $MAM' = a$ l'arc de 100 mètres dans le cercle OM, et $MM' = c$ la corde de cet arc. Menons OA perpendiculaire sur MM' (*fig.* 16).

Rappelons-nous qu'on mesure un angle (2) par le rapport de son arc au rayon, et posons

$$\frac{\text{arc AM}}{R} = \text{angle AOM} = k.$$

Il en résultera

$$a = 2Rk,$$

puisque

$$\text{arc AM} = \frac{a}{2}.$$

D'ailleurs

$$\sin k = \frac{MP}{R}.$$

Par suite

$$c = 2MP = 2R\sin k.$$

On aura donc

$$a - c = 2R(k - \sin k).$$

Nous avons démontré (31, 3°) l'inégalité

$$k - \sin k < \frac{k^3}{4};$$

elle entraîne nécessairement la suivante :

$$a - c < \frac{Rk^3}{2}.$$

De l'égalité

$$a = 2Rk,$$

on déduit

$$k = \frac{a}{2R}.$$

Par conséquent, il vient

$$a - c < \frac{a^3}{16R^2}.$$

Si l'on veut que $a - c$ soit moindre que $0^M,001$, il suffit donc de satisfaire à la condition

$$\frac{a^3}{16 R^2} < 0^M,001, \quad \text{d'où} \quad R^2 > \frac{1000\, a^3}{16}.$$

Si l'on remplace alors a par sa valeur 100 mètres, on voit que R^2 doit surpasser $\frac{10^9}{16}$ ou que R doit être plus grand que $\frac{10^4 \sqrt{10}}{4}$. En effectuant les calculs, on trouve que dans un cercle dont le rayon est égal ou supérieur à $7905^M,7$, la différence entre un arc de 100 mètres et sa corde est moindre que $0^M,001$.

2° *Proposons-nous de trouver tous les arcs qui satisfont à l'équation*

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

a, b et c étant des nombres connus, positifs ou négatifs.

Je divise par a les deux membres de l'équation. Il vient

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}.$$

On peut toujours poser

$$\frac{b}{a} = \tang \omega = \frac{\sin \omega}{\cos \omega}.$$

L'équation prend alors la forme

$$\sin x + \frac{\sin \omega \cos x}{\cos \omega} = \frac{c}{a},$$

c'est-à-dire

$$\sin x \cos \omega + \sin \omega \cos x = \sin(x + \omega) = \frac{c \cos \omega}{a}.$$

ω étant connu, d'après la relation $\frac{b}{a} = \tang \omega$, on pourra déterminer $x + \omega$ et, par suite, l'arc x.

Pour que le problème soit possible, il faut que la quantité $\frac{c \cos \omega}{a}$ tombe entre $+1$ et -1, puisque telles sont les limites du sinus. Si cette condition est remplie, les tables feront connaître un arc α répondant à la relation trouvée. Toutes les valeurs demandées seront ensuite comprises dans les formules (7)

$$2n\pi + (\alpha + \omega) \quad \text{et} \quad (2n + 1)\pi - (\alpha + \omega);$$

c'est-à-dire qu'on aura

$$x + \omega = 2n\pi + \alpha + \omega$$

et

$$x + \omega = (2n+1)\pi - \alpha - \omega.$$

Ces équations reviennent à

$$x = 2n\pi + \alpha$$

et

$$x = (2n+1)\pi - \alpha - 2\omega,$$

n représentant un entier quelconque positif, négatif ou nul.

3° *La somme de deux arcs* α *et* β *étant constante, chercher la condition pour que le produit* $\sin\alpha \sin\beta$ *soit un maximum.*

Nous savons qu'on a (**26**)

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha \sin\beta.$$

On en déduit, la somme $\alpha + \beta$ étant représentée par la constante k,

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos k].$$

On voit alors immédiatement que le maximum du premier membre correspond à celui de

$$\cos(\alpha - \beta) \text{ qui est } 1, \text{ pour } \alpha - \beta = 2n\pi,$$

n étant un nombre entier quelconque.

Des égalités

$$\alpha + \beta = k, \quad \alpha - \beta = 2n\pi,$$

on déduit

$$\alpha = \frac{1}{2}k + n\pi, \quad \beta = \frac{1}{2}k - n\pi.$$

On devra donner à n la même valeur dans ces deux formules. Le maximum du produit $\sin\alpha \sin\beta$ est alors $\frac{1}{2}(1 - \cos k)$ ou $\sin^2 \frac{1}{2}k$.

Les arcs α et β étant supposés positifs, il faudra qu'on ait

$$\frac{1}{2}k > n\pi \quad \text{ou} \quad n < \frac{k}{2\pi}.$$

Si la somme constante k est inférieure à une circonférence, n n'admettra que la valeur 0, et l'on aura

$$\alpha = \frac{1}{2}k, \quad \beta = \frac{1}{2}k,$$

c'est-à-dire que les arcs α et β seront égaux.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1° Rendre la formule

$$\operatorname{tang} z = \frac{a \sin A}{1 + a \cos A}$$

calculable par logarithmes.

2° Démontrer la formule

$$1 \pm \operatorname{tang} a = \sqrt{2} \cdot \frac{\sin(45° \pm a)}{\cos a}.$$

3° Résoudre l'équation

$$(\sin x - \cos x) \sin x = a.$$

4° Résoudre l'équation

$$\sin x + \cos x = \frac{4}{\pi}.$$

5° Résoudre l'équation

$$\sin x + 0,438 \cos 2x - \frac{2}{\pi} = 0.$$

(Ces deux dernières équations se présentent en Mécanique, *Théorie des volants.*)

6° La somme des trois angles a, b, c, étant égale à 180°, on doit avoir :

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c,$$

$$\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c,$$

$$\cot \frac{1}{2} a + \cot \frac{1}{2} b + \cot \frac{1}{2} c = \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b \cot \frac{1}{2} c,$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} a + \sin^2 \frac{1}{2} b + \sin^2 \frac{1}{2} c + 2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c = 1,$$

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 1.$$

7° Démontrer qu'on a

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{3}.$$

8° La corde AB d'un cercle O partage la surface de ce cercle en deux segments tels, que le plus grand est moyen proportionnel entre le plus petit et le cercle entier.

On demande de calculer, *à un dixième de seconde près*, le plus petit des deux arcs sous-tendus par la corde AB.

(*Concours de l'École Polytechnique.*)

9° On donne les côtés d'un contour polygonal ABCD, en même temps que les angles formés par le premier côté avec un axe Ox et par chacun des côtés suivants avec le prolongement de celui qui le précède : trouver l'expression générale de la projection du contour sur l'axe.

LIVRE DEUXIÈME.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES FONDAMENTALES.

41. Un triangle renferme trois côtés et trois angles. *Résoudre* un triangle, c'est déterminer *numériquement* trois de ses six éléments en fonction des trois autres. Il faut nécessairement que, parmi les éléments donnés, il y ait au moins un côté.

Nous conviendrons de désigner les angles du triangle considéré par les lettres A, B, C, et les côtés *opposés* par les lettres correspondantes *a*, *b*, *c*.

Si le triangle est *rectangle*, A désignera toujours l'angle droit et, par suite, *a* l'hypoténuse.

La résolution des triangles repose sur certaines formules fondamentales que nous allons d'abord démontrer.

42. I. *Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé ou le cosinus de l'angle adjacent* (*fig.* 17).

La définition du sinus (3) donne immédiatement

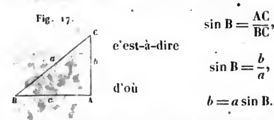


Fig. 17.

$$\sin B = \frac{AC}{BC},$$

c'est-à-dire

$$\sin B = \frac{b}{a},$$

d'où

$$b = a \sin B.$$

Les deux angles aigus B et C étant complémentaires, on peut remplacer sin B par cos C, et il vient

$$b = a \cos C.$$

La définition du cosinus (3) permet de poser immédiatement cette relation.

Il résulte de ce qui précède que, *dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'autre côté multiplié*

par la tangente de l'angle opposé ou la cotangente de l'angle adjacent.

En effet, on a $b = a \sin B$ et $c = a \cos B$. Si l'on divise ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\frac{b}{c} = \frac{a \sin B}{a \cos B} = \tang B, \quad \text{d'où} \quad b = c \tang B.$$

On peut remplacer tang B par cot C, et il vient

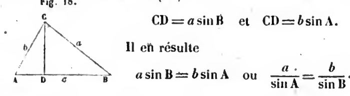
$$b = c \cot C.$$

La définition de la tangente (3) donne d'ailleurs directement

$$\tang B = \frac{b}{c}.$$

43. II. *Dans un triangle quelconque, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés (fig. 18).*

Soit le triangle ABC. J'abaisse sur le côté AB la perpendiculaire CD. Les deux triangles rectangles formés donnent alors (42) :



$$CD = a \sin B \quad \text{et} \quad CD = b \sin A.$$

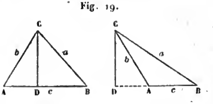
Il en résulte

$$a \sin B = b \sin A \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

On aura, par conséquent, cette suite de rapports égaux

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

44. III. *Dans un triangle quelconque, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins le double produit de ces mêmes côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent (fig. 19).*



Soit le triangle ABC. J'abaisse sur AB la perpendiculaire CD. Si l'angle A est *aigu*, on aura (*Géom.*, 106)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c.AD.$$

Le triangle rectangle ACD donne, dans ce cas,

$$AD = b \cos A.$$

Il viendra, par suite,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Si l'angle A est *obtus*, on aura (*Géom.*, 107)

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c.\mathrm{AD}.$$

Mais le triangle rectangle ACD donne alors

$$\mathrm{AD} = b\cos\mathrm{CAD}.$$

L'angle A du triangle ABC et l'angle CAD étant supplémentaires, on aura (8)

$$\cos\mathrm{CAD} = -\cos\mathrm{A}$$

et, par suite,

$$\mathrm{AD} = -b\cos\mathrm{A}.$$

En substituant, il viendra encore

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A}.$$

On aura donc, en appliquant cette formule à chaque côté, les relations :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A},$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\mathrm{B},$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\mathrm{C}.$$

45. En se rappelant le théorème fondamental des projections (16), on voit que chaque côté d'un triangle représente la somme des projections des deux autres côtés sur sa propre direction. On en déduit immédiatement les trois formules suivantes qu'il peut être utile de connaître :

$$a = b\cos\mathrm{C} + c\cos\mathrm{B},$$
$$b = a\cos\mathrm{C} + c\cos\mathrm{A},$$
$$c = a\cos\mathrm{B} + b\cos\mathrm{A}.$$

46. On peut, comme exercice, prouver que les deux systèmes de formules établis aux n°s 43 et 44 rentrent l'un dans l'autre lorsque la somme $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}$ est supposée égale à 180°.

En effet, de l'égalité

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A}$$

on déduit

$$\cos\mathrm{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

et, par suite,

$$1 - \cos^2\mathrm{A} = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$\sin^2\mathrm{A} = \frac{4b^2c^2 - b^4 - c^4 - a^4 - 2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2}{4b^2c^2};$$

d'où

$$\frac{\sin^2\mathrm{A}}{a^2} = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4a^2b^2c^2}.$$

Quand on permute simultanément les angles A, B, C, et les côtés opposés a, b, c, le second membre de la relation obtenue ne change pas, et l'on obtient, par conséquent, des valeurs identiques pour les rapports $\frac{\sin^2 A}{a^2}$, $\frac{\sin^2 B}{b^2}$, $\frac{\sin^2 C}{c^2}$. Comme la relation

$$A + B + C = 180°$$

entraîne le signe *plus* pour sin A, sin B, sin C, la suite

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\sin^2 B}{b^2} = \frac{\sin^2 C}{c^2}$$

revient à celle-ci :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

On pourrait de même des relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

déduire celles démontrées au n° 45. En effet, on peut évidemment poser

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b \cos C}{\sin B \cos C} = \frac{c \cos B}{\sin C \cos B},$$

d'où

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b \cos C + c \cos B}{\sin B \cos C + \sin C \cos B}.$$

Or le dénominateur du second membre de cette égalité représente sin (B + C) ou sin A, puisque la somme des angles A, B, C, est égale à deux droits. On aura donc

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES.

47. La résolution des triangles rectangles présente *quatre cas*. On peut donner l'hypoténuse en même temps qu'un angle aigu ou un côté de l'angle droit ; ou bien, un côté de l'angle droit avec un angle aigu ou le second côté.

48. PREMIER CAS. *On donne l'hypoténuse a et l'angle aigu* B : *on demande les deux côtés b et c et l'angle* C (*fig.* 20).

On a immédiatement

$$C = 90° - B.$$

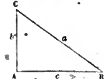


Fig. 20.

La formule

$$b = a \sin B$$

fait connaître b, et l'on en déduit

$$\log b = \log a + \log \sin B.$$

Enfin, on trouve c en posant

$$c = a \cos B,$$

d'où

$$\log c = \log a + \log \cos B.$$

49. Second cas. *On donne l'hypoténuse a et le côté de l'angle droit b : on demande l'autre côté c et les deux angles* B *et* C (*fig.* 20).

On a

$$b = a \cos C,$$

d'où

$$\cos C = \frac{b}{a}$$

et

$$\log \cos C = \log b + \overline{L}:a.$$

Connaissant C, on aura

$$B = 90° - C.$$

Enfin, la relation

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

donnera

$$\log c = \frac{1}{2}\left[\log(a+b) + \log(a-b)\right].$$

Il faut remarquer avec soin que l'hypoténuse a et le côté b diffèrent souvent très-peu. L'angle C est alors très-petit et, comme il est déterminé par son cosinus, on ne peut plus compter sur l'exactitude du résultat (38, 39). On lève cette difficulté de la manière suivante.

Les deux formules (24)

$$\sin\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}, \quad \cos\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{1+\cos C}{2}},$$

divisées l'une par l'autre, donnent

$$\tang\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}.$$

En substituant à cos C sa valeur $\frac{b}{a}$, il vient

$$\tang\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$

d'où

$$\log \text{tang} \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} \left[\log(a-b) + \overline{L}(a+b) \right].$$

L'angle $\frac{1}{2}$ C étant déterminé par sa tangente, le sera aussi exactement que possible (37) : il en sera donc de même de l'angle C. De plus, les logarithmes qui servent au calcul de tang $\frac{1}{2}$ C sont précisément ceux qui servent au calcul du côté c.

50. Troisième cas. *On donne le côté* b *et l'angle* B : *on demande l'hypoténuse* a, *le côté* c *et l'angle* C (*fig.* 20).

La relation

$$B + C = 90^\circ$$

donne

$$C = 90^\circ - B.$$

De la formule

$$b = a \sin B$$

on déduit

$$a = \frac{b}{\sin B},$$

d'où

$$\log a = \log b + \overline{L} \sin B.$$

De même, la formule

$$b = c \text{ tang } B$$

donne

$$c = \frac{b}{\text{tang } B},$$

d'où

$$\log c = \log b + \overline{L} \text{ tang } B.$$

51. Quatrième cas. *On donne les deux côtés* b *et* c : *on demande l'hypoténuse* a *et les deux angles* B *et* C (*fig.* 20).

De la formule

$$b = c \text{ tang } B$$

on déduit

$$\text{tang } B = \frac{b}{c},$$

d'où

$$\log \text{tang } B = \log b + \overline{L} \cdot c.$$

On a ensuite

$$C = 90^\circ - B.$$

Connaissant B, de la relation

$$b = a \sin B$$

on déduit

$$a = \frac{b}{\sin B}$$

et

$$\log a = \log b + \overline{L}.\sin B.$$

52. Nous donnons les différents éléments d'un triangle rectangle, ainsi que les logarithmes de ces éléments, qui peuvent entrer dans le calcul des quatre cas traités. Le lecteur pourra les résoudre successivement en choisissant dans le tableau indiqué les valeurs convenables, et il pourra ensuite vérifier l'exactitude de ses propres résultats en les comparant aux nombres du tableau.

$a = 5692^{M},5$, $b = 4454^{M}$, $c = 3415^{M},4$,
$\log a = 3,7553030$, $\log b = 3,6583930$, $\log c = 3,5334543$,
$a + b = 10246^{M},5$, $a - b = 1138^{M},5$,
$\log(a+b) = 4,0105755$, $\log(a-b) = 3,0563330$,
$A = 90°$, $B = 53°7'48'',4$, $C = 36°52'11'',6$,
$\log \sin B = \overline{1},9030900$, $\log \sin C = \overline{1},7781512$,
$\log \cos B = \overline{1},7781512$, $\log \cos C = \overline{1},9030900$,
$\log \operatorname{tang} B = 0,1249389$, $\log \operatorname{tang} C = \overline{1},8750611$.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES OBLIQUANGLES.

53. La résolution des triangles obliquangles présente *quatre* cas : les trois premiers correspondent aux trois cas d'égalité des triangles. On peut donner *un côté et deux angles, deux côtés et l'angle qu'ils comprennent, trois côtés*. Le quatrième cas est celui où l'on donne *deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux :* nous avons vu (*Géom.*, 74) qu'il pouvait y avoir alors deux triangles construits avec les données; ce cas est donc *un cas douteux* sujet à discussion.

54. Premier cas. *On donne le côté c et les angles* A *et* B : *on demande les côtés a, b, et le troisième angle* C (*fig.* 21).

L'angle inconnu se déduit immédiatement de la relation $A + B + C = 180°$.

Fig. 21.

On a ensuite (43) :

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C},$$

d'où

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C}, \quad b = \frac{c \sin B}{\sin C},$$

et

$$\log a = \log c + \log \sin A + \overline{L} \sin C,$$
$$\log b = \log c + \log \sin B + \overline{L} \sin C.$$

55. Second cas. *On donne les deux côtés a, b, et l'angle compris C : on demande le troisième côté c et les deux angles A et B (fig. 21).*

Comme on a $A + B = 180° - C$, on doit chercher à déterminer la différence $A - B$, de manière à trouver à la fois les deux angles A et B.

En supposant $a > b$, on a

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B},$$

d'où (*Alg. élém.*, 49)

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}.$$

Mais nous avons trouvé (26)

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\tang \frac{1}{2}(A + B)}{\tang \frac{1}{2}(A - B)}.$$

On a donc, en remarquant que

$$\tang \frac{1}{2}(A + B) = \tang \frac{1}{2}(180° - C) = \cot \frac{1}{2} C,$$

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\cot \frac{1}{2} C}{\tang \frac{1}{2}(A - B)},$$

d'où

$$\tang \frac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \cdot \cot \frac{1}{2} C.$$

Par suite,

$$\log \tang \frac{1}{2}(A - B) = \log(a - b) + \log \cot \frac{1}{2} C + \overline{L} \cdot (a + b).$$

Si les tables donnent $\frac{1}{2}(A - B) = n°$, on aura simultanément

$$\frac{A}{2} - \frac{B}{2} = n°, \quad \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90° - \frac{1}{2}C,$$

c'est-à-dire

$$A = 90° + n° - \frac{1}{2}C, \quad B = 90° - n° - \frac{1}{2}C.$$

On pourrait tirer le côté c de la formule $\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$; mais on aurait ainsi trois nouveaux logarithmes à chercher. Il vaut mieux opérer comme nous allons l'indiquer.

De la suite

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

on déduit

$$\frac{a+b}{\sin A + \sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{et} \quad c = \frac{(a+b)\sin C}{\sin A + \sin B}.$$

Mais on a (24, 26)

$$\sin C = 2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C$$

et

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B).$$

D'ailleurs,

$$\sin \frac{1}{2}(A + B) = \sin \frac{1}{2}(180° - C) = \cos \frac{1}{2} C.$$

Le rapport $\frac{\sin C}{\sin A + \sin B}$ se réduira donc à $\frac{\sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A - B)}$ et il viendra

$$c = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A - B)},$$

d'où

$$\log c = \log(a+b) + \log \sin \frac{1}{2} C + \overline{\text{L}} \cos \frac{1}{2}(A - B).$$

Comme le calcul de la différence $\frac{1}{2}(A - B)$ exige la recherche

de $\log(a+b)$, on n'aura en réalité que deux nouveaux logarithmes à trouver.

Par cette première méthode, on a en tout cinq logarithmes à chercher.

Il arrive souvent dans la pratique, lorsqu'on a un *réseau* de triangles à calculer, que les côtés a et b sont donnés par leurs logarithmes. Il faut pouvoir employer directement ces logarithmes et éviter de remonter aux nombres. Les indications précédentes doivent donc être modifiées.

Reprenons la formule

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C.$$

Divisons par a les deux termes de la fraction $\frac{a-b}{a+b}$; elle prendra la forme $\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}$. Posons

$$\frac{b}{a}=\operatorname{tang}\varphi,\quad \text{d'où}\quad \log\operatorname{tang}\varphi=\log b-\log a.$$

Il viendra (22) :

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{1-\operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}\varphi}=\operatorname{tang}(45^\circ-\varphi).$$

Par conséquent, la formule à employer sera celle-ci :

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)=\operatorname{tang}(45^\circ-\varphi)\cot\frac{1}{2}C,$$

d'où

$$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)=\log\operatorname{tang}(45^\circ-\varphi)+\log\cot\frac{1}{2}C.$$

Dans l'hypothèse que nous considérons, le côté c doit être directement calculé à l'aide de la relation $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$, parce qu'on connaît $\log a$. On aura donc

$$\log c=\log a+\log\sin C+\overline{L}\ \sin A.$$

Le procédé qu'on vient de développer n'exige que le calcul de quatre logarithmes; mais la recherche du cinquième logarithme qu'on a à trouver lorsqu'on suit la première méthode, est remplacée par celle de l'angle φ. L'avantage obtenu est cependant réel, puisque la méthode ordinaire exigerait, outre le

calcul de cinq logarithmes, qu'on remontât deux fois aux nombres pour trouver a et b.

Enfin, si l'on donne b directement et a par son logarithme, on pourra employer les formules

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} \quad \text{et} \quad b = a\cos C + c\cos A.$$

On en déduira :

$$c\sin A = a\sin C,$$
$$c\cos A = b - a\cos C.$$

En divisant ces deux relations membre à membre, on trouvera

$$\tang A = \frac{a\sin C}{b - a\cos C}.$$

On aura donc

$$\log\tang A = \log a + \log\sin C + \overline{L}(b - a\cos C).$$

Il faut remarquer que l'angle A sera aigu ou obtus suivant que $\tang A$ sera positive ou négative, c'est-à-dire suivant que le dénominateur $b - a\cos C$ sera positif ou négatif. Les quantités négatives n'ayant pas de logarithmes (*Alg. élém.*, 247), pour que la formule se prête dans tous les cas au calcul logarithmique, on devra donc écrire

$$\log\pm\tang A = \log a + \log\sin C + \overline{L}\pm(b - a\cos C),$$

les signes *plus* et *moins* se correspondant dans les deux membres. C'est-à-dire que si $b - a\cos C$ est une quantité négative, on changera le signe de cette quantité en même temps que celui de $\tang A$; dans ce cas, les tables donneront, au lieu de l'angle A, l'angle $180° - A$.

Une fois A connu, on aura c par la formule $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$, et B par la relation $A + B + C = 180°$.

On a seulement trois logarithmes à chercher, savoir ceux des quantités $\sin C$, $\cos C$, $b - a\cos C$; mais il faut en outre calculer $a\cos C$. Cette dernière méthode est cependant la plus simple des trois qu'on vient d'exposer; car, si l'on voulait avoir recours à la méthode précédente, il faudrait déterminer $\log b$ et l'angle φ, puis calculer ensuite quatre logarithmes ; et si l'on employait la méthode ordinaire, il faudrait remonter aux nombres pour trouver a, et chercher cinq logarithmes.

Comme exercice, et pour montrer de quelle manière on peut introduire dans les relations trigonométriques *un angle auxiliaire* afin de rendre les formules calculables par logarithmes, nous nous proposerons de trouver *directement* le côté c.

On a l'équation

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Multiplions alors $a^2 + b^2$ par $\sin^2 \frac{1}{2}C + \cos^2 \frac{1}{2}C = 1$ et remplaçons $\cos C$ par $\cos^2 \frac{1}{2}C - \sin^2 \frac{1}{2}C$. Il viendra

$$c^2 = (a^2+b^2)\left(\sin^2\frac{1}{2}C + \cos^2\frac{1}{2}C\right) - 2ab\left(\cos^2\frac{1}{2}C - \sin^2\frac{1}{2}C\right),$$

c'est-à-dire

$$c^2 = (a+b)^2\sin^2\frac{1}{2}C + (a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}C.$$

On en déduit

$$c^2 = (a+b)^2\sin^2\frac{1}{2}C\left[1 + \frac{(a-b)^2\cot^2\frac{1}{2}C}{(a+b)^2}\right].$$

Si l'on pose alors

$$\frac{(a-b)\cot\frac{1}{2}C}{a+b} = \tang\varphi,$$

il vient

$$c^2 = \frac{(a+b)^2\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos^2\varphi} \quad \text{et} \quad c = \frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\varphi}.$$

Il faut noter avec soin que l'angle auxiliaire φ est précisément l'angle $\frac{1}{2}(A - B)$: la seconde marche reproduit donc identiquement la première.

56. Troisième cas. — *On donne les trois côtés a, b, c; on demande les trois angles* A, B, C (*fig.* 21).

De la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

on déduit

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

On a d'ailleurs (24)

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \quad \text{et} \quad \cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.$$

Formons les quantités $\frac{1-\cos A}{2}$ et $\frac{1+\cos A}{2}$. On a

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{1-\cos A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc};$$

en se rappelant que la différence de deux quantités est égale au produit de la somme de leurs racines carrées par la différence de ces mêmes racines.

On aura de même

$$1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

d'où

$$\frac{1+\cos A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}.$$

Représentons, pour simplifier, le périmètre du triangle par $2p$. Nous aurons

$$a+b+c=2p,\qquad a-b+c=2(p-b),$$
$$b+c-a=2(p-a),\qquad a+b-c=2(p-c).$$

Il viendra, par conséquent, en supprimant le facteur 4 commun haut et bas :

$$\frac{1-\cos A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc},\qquad \frac{1+\cos A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}.$$

On aura donc

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\qquad \cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

On trouvera de même

$$\sin\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\qquad \cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},$$

$$\sin\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},\qquad \cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

En divisant ces formules membre à membre et deux par deux, on obtiendra les relations suivantes très-symétriques et très-faciles à retenir :

$$\tang\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\tang\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\tang\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Tous les radicaux indiqués doivent être pris avec le signe *plus*, puisque les demi-angles d'un triangle sont nécessairement aigus.

Lorsqu'on ne veut qu'un angle, chaque espèce de formule exige la recherche de quatre logarithmes; mais lorsqu'on les veut tous, les formules *sinus* exigent qu'on calcule six logarithmes, les formules *cosinus* sept, et les formules *tangentes* quatre seulement. Ce sont donc ces dernières qu'il faudra employer. De plus, en y ayant recours, on détermine les angles cherchés avec une plus grande exactitude, comme nous l'avons déjà fait remarquer (37). On aura

$$\log\tan\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\left[\log(p-b) + \log(p-c) + \bar{L}p + \bar{L}(p-a)\right],$$

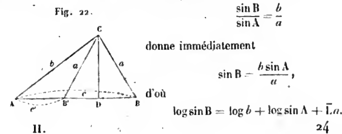
$$\log\tan\frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\left[\log(p-a) + \log(p-c) + \bar{L}p + \bar{L}(p-b)\right],$$

$$\log\tan\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\left[\log(p-a) + \log(p-b) + \bar{L}p + \bar{L}(p-c)\right].$$

Il convient de calculer d'abord les quantités p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, et leurs logarithmes directs et préparés; puis, on n'aura plus qu'à substituer les valeurs trouvées dans les formules ci-dessus.

Pour que le triangle soit possible, il faut que chaque côté soit plus petit que la somme des deux autres. Si cette condition n'est pas remplie, si l'on a, par exemple, $c > a+b$, on aura nécessairement $a < b+c$ et $b < a+c$. Par suite, on trouvera $0 > a+b-c$ ou $p-c$ négatif, $0 < b+c-a$ ou $p-a$ positif, $0 < a+c-b$ ou $p-b$ positif. La valeur de $\tan\frac{1}{2}A$ sera donc imaginaire et indiquera l'impossibilité du problème. Il en sera de même des valeurs de $\tan\frac{1}{2}B$ et de $\tan\frac{1}{2}C$.

57. Quatrième cas. *On donne les deux côtés a, b, et l'angle* A : *on demande les deux angles* B, C, *et le troisième côté c (fig. 22).*



La relation

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}$$

donne immédiatement

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a},$$

d'où

$$\log\sin B = \log b + \log\sin A + \bar{L}a.$$

L'angle B étant connu, on aura

$$C = 180^\circ - (A + B).$$

Enfin, le côté c sera donné par la formule

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

d'où

$$\log c = \log a + \log \sin C + \overline{L}.\sin A.$$

Il faut discuter les valeurs obtenues. A un même sinus, correspondent deux angles supplémentaires. Par suite, les tables faisant connaître l'angle aigu B qui a pour sinus la valeur $\frac{b \sin A}{a}$, il est nécessaire de chercher dans quels cas on doit admettre ou rejeter, comme nouvelle solution, l'angle obtus B', qui satisfait à la relation

$$B' = 180^\circ - B.$$

Or, si l'angle donné A égale ou dépasse 90°, la solution qui correspond à la valeur B' doit évidemment être rejetée (*Géom.*, 37), et la condition de possibilité du problème est $a > b$.

Si A est plus petit que 90° et si la valeur B' est admissible, on aura pour C les deux valeurs

$$C = 180^\circ - (A + B), \quad C' = 180^\circ - (A + B') = B - A.$$

La première valeur de C sera toujours admissible; mais la seconde C' ne le sera que si l'on a $B > A$; ce qui entraîne la condition $b > a$.

En résumé, *il n'y aura donc deux solutions que, lorsque l'angle donné* A *étant aigu, le côté opposé a sera le plus petit des deux côtés donnés a et b.*

Comme vérification, en désignant dans cette hypothèse par c et c' les deux valeurs du côté c, on devra avoir

$$AD = c' + \frac{c - c'}{2} = \frac{c + c'}{2} = b \cos A.$$

Dans tout autre cas, le problème n'admettra qu'une solution et le triangle sera complétement déterminé.

Pour que le triangle soit possible, il faut d'ailleurs qu'on ait toujours $\sin B < 1$ ou $b \sin A < a$. Mais $b \sin A$ représente la hauteur CD. On retrouve ainsi la condition indiquée en géométrie (74).

Expressions trigonométriques de l'aire d'un triangle.

58. Supposons d'abord qu'on donne les deux côtés a, b, et l'angle compris C (*fig.* 22). On aura, en désignant par S l'aire cherchée,

$$S = \frac{c}{2} \cdot CD.$$

Le triangle rectangle ACD donnant $CD = b \sin A$, il viendra

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

L'aire d'un triangle est donc égale à la moitié du produit de deux côtés par le sinus de l'angle qu'ils comprennent.

Si l'on donne les trois côtés du triangle, il faut remplacer dans la formule précédente sin A par sa valeur en fonction des côtés. Or on a

$$\sin A = 2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$$

et

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

c'est-à-dire

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A,$$

on trouve

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Telle est l'expression de l'aire d'un triangle en fonction de ses trois côtés (*).

Enfin, dans le cas où l'on donne un côté c et deux angles A et B, il faut, dans la formule $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, remplacer le côté b par sa valeur

$$b = \frac{c\sin B}{\sin C} = \frac{c\sin B}{\sin(A+B)}.$$

Il viendra alors

$$S = \frac{1}{2}c^2\frac{\sin A\sin B}{\sin(A+B)}.$$

Toutes les expressions obtenues sont calculables par loga-

(*) On peut remarquer qu'en multipliant entre elles les valeurs des sinus, ou celles des cosinus, ou celles des tangentes des demi-angles d'un triangle (56), on obtient d'après l'expression qu'on vient de trouver les formules suivantes :

$$\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C = \frac{S^2}{pabc},$$

$$\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C = \frac{pS}{abc},$$

$$\tang\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}B\tang\frac{1}{2}C = \frac{S}{p^2}.$$

rithmes. On aura :

$$\log S = \log b + \log c + \log \sin A + \overline{L}.2,$$

$$\log S = \frac{1}{2}[\log p + \log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c)],$$

$$\log S = 2\log c + \log \sin A + \log \sin B + \overline{L}.2 + \overline{L}.\sin(A+B).$$

Comme application des formules précédentes, proposons-nous la question suivante : *De tous les triangles inscrits dans un même segment, quel est celui dont l'aire est un maximum ?*

Si l'on désigne par c la corde du segment, l'angle opposé C restera constant pour tous les triangles. L'aire de ces triangles aura pour formule

$$S = \frac{1}{2}c^2 \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B)}.$$

L'angle C étant constant, il en est de même de la somme $A+B$. La question revient donc à déterminer le maximum du produit $\sin A \sin B$. Ce maximum correspond (40, 3°) à la condition $A = B$. Donc, le triangle demandé est le triangle isocèle inscrit dans le segment considéré.

Données de calcul. Nous terminerons en donnant tous les éléments d'un triangle obliquangle qui peuvent entrer dans les calculs précédents, ainsi que leurs logarithmes. On fera usage du tableau indiqué, comme nous l'avons déjà dit au n° 52.

$$a = 5777^{M},0, \quad b = 7157^{M},7 \quad c = 8781^{M},1$$

$$\log a = 3,7617024. \quad \log b = 3,8647735 \quad \log c = 3,9435489,$$

$$p = 10857^{M},9, \quad p-a = 5080^{M},9, \quad p-b = 3700^{M},2, \quad p-c = 2076^{M},8$$

$$\log p = 4,0357459, \quad \log(p-a) = 3,7059406,$$

$$\log(p-b) = 3,5682252, \quad \log(p-c) = 3,3173947,$$

$$A = 40^{\circ}56'0'', \quad B = 54^{\circ}16'8'',48, \quad C = 84^{\circ}47'51'',52,$$

$$\log\sin A = \overline{1},8163609, \quad \log\sin B = \overline{1},9094319, \quad \log\sin C = \overline{1},9982073,$$

$$\log\cos A = \overline{1},8782186, \quad \text{los}\cos B = \overline{1},7663981, \quad \log\cos C = \overline{2},9574805,$$

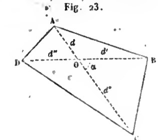
$$\log\text{tang} A = \overline{1},9381423, \quad \log\text{tang} B = 0,1430338, \quad \log\text{tang} C = 1,0407268.$$

CHAPITRE IV.

EXERCICES ET APPLICATIONS.

59. *Expression trigonométrique de l'aire d'un quadrilatère quelconque, en fonction de ses diagonales et de l'angle qu'elles forment* (*fig.* 23).

Fig. 23.



Soient D, D', les deux diagonales AC, BD ; soit α leur angle. On aura, d'après la figure

$$\text{tr AOB} = \frac{1}{2}dd'\sin\alpha,$$

$$\text{tr BOC} = \frac{1}{2}d'd''\sin\alpha,$$

$$\text{tr COD} = \frac{1}{2}d''d'''\sin\alpha,$$

$$\text{tr DOA} = \frac{1}{2}d'''d\sin\alpha.$$

Par suite, en désignant l'aire cherchée par S, il viendra

$$S = \frac{1}{2}\sin\alpha\,(dd' + d'd'' + d''d''' + d'''d)$$

ou

$$S = \frac{1}{2}\sin\alpha\,[(d + d'')d' + (d + d'')d'''],$$

c'est-à-dire

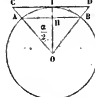
$$S = \frac{1}{2}\sin\alpha\,(d + d'')(d' + d''') = \frac{1}{2}DD'\sin\alpha.$$

On retrouve ainsi ce théorème de Géométrie : *Deux quadrilatères sont équivalents lorsque leurs diagonales se coupent sous le même angle et sont égales.*

60. *Expressions des aires des polygones réguliers de n et de 2n côtés, inscrits et circonscrits au cercle de rayon* R, *en fonction de n et de* R. *Rapports de ces aires* (*fig.* 24).

Le polygone régulier inscrit de n côtés se compose de n fois le triangle AOB. Désignons par $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ l'angle au centre de ce polygone. On aura (58)

Fig. 24.



$$\text{tr AOB} = \frac{1}{2}R^2.\sin\alpha.$$

Par suite, l'aire s du polygone inscrit sera

$$s = \frac{nR^2}{2}\sin\alpha.$$

Le polygone régulier circonscrit de n côtés se compose de n fois le triangle COD. Le triangle COD a pour hauteur R et pour demi-base

$$CI = R\tang\frac{1}{2}\alpha.$$

On aura donc

$$\text{tr COD} = R^2\tang\frac{1}{2}\alpha.$$

L'aire S du polygone circonscrit sera par conséquent

$$S = nR^2\tang\frac{1}{2}\alpha.$$

Cherchons le rapport $\frac{s}{S}$: il viendra

$$\frac{s}{S} = \frac{\sin\alpha}{2\tang\frac{1}{2}\alpha} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}{2\tang\frac{1}{2}\alpha} = \cos^2\frac{1}{2}\alpha.$$

Si l'on suppose $n = 6$, on a

$$\frac{1}{2}\alpha = 30^\circ.$$

De la relation

$$\cos 60^\circ = \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ,$$

on déduit alors

$$\cos^2 30^\circ = \cos 60^\circ + \sin^2 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi, le rapport des aires des hexagones réguliers inscrit et circonscrit est égal à $\frac{3}{4}$: c'est là un théorème connu de géométrie.

Si l'on désigne par s' et par S' les aires des polygones réguliers inscrit et circonscrit de $2n$ côtés, on aura évidemment (en remplaçant n par $2n$ et α par $\frac{1}{2}\alpha$),

$$s' = nR^2 \sin\frac{1}{2}\alpha, \quad S' = 2nR^2 \operatorname{tang}\frac{1}{4}\alpha.$$

Comparons s et S à s' : nous trouverons

$$\frac{s}{s'} = \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha} = \cos\frac{1}{2}\alpha \quad \text{et} \quad \frac{s'}{S} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha} = \cos\frac{1}{2}\alpha.$$

Par suite, on a

$$\frac{s}{s'} = \frac{s'}{S},$$

c'est-à-dire que l'aire du polygone régulier inscrit de $2n$ côtés est la moyenne proportionnelle des aires des polygones réguliers inscrit et circonscrit de n côtés.

Par exemple, l'aire du carré inscrit étant égale à $2R^2$, celle du carré circonscrit à $4R^2$, on en conclura que l'aire de l'octogone régulier inscrit a pour expression $\sqrt{2R^2 \cdot 4R^2}$ ou $2R^2\sqrt{2}$; ce qu'on peut facilement vérifier par la géométrie.

On pourrait facilement trouver S' en fonction de s, S et s'. Comparons s' et S', nous aurons

$$\frac{S'}{s'} = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{4}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{4}\alpha}.$$

Mais $1 + \cos\frac{1}{2}\alpha = 2\cos^2\frac{1}{4}\alpha$. Par suite,

$$\frac{S'}{s'} = \frac{2}{1+\cos\frac{1}{2}\alpha}.$$

Nous avons obtenu précédemment

$$\frac{s}{s'} = \cos\frac{1}{2}\alpha.$$

Il viendra donc

$$\frac{S'}{s'} = \frac{2s'}{s+s'} \quad \text{et} \quad S' = \frac{2s'^2}{s+s'} = \frac{2sS}{s+s'}.$$

61. *Expression générale de l'aire d'un segment circulaire (fig. 23).* Soit le segment AIB. On aura

$$\text{sect AOB} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}, \quad \text{tr AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha.$$

Il viendra donc

$$\text{segment AIB} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right).$$

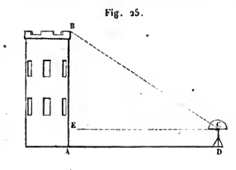
Problèmes de trigonométrie pratique.

62. Nous supposerons (dans ce qui va suivre) les élèves déjà familiarisés avec les applications de la géométrie élémentaire à l'*arpentage* et au *levé des plans* (*).

1° *Déterminer la hauteur d'un édifice dont le pied est accessible, et qui repose sur un terrain sensiblement horizontal (fig. 25).*

Soit AB la hauteur à mesurer. On placera un graphomètre à une distance AD du pied de l'édifice : il faut que AD soit comparable à AB. Le limbe de l'instrument étant vertical et son diamètre horizontal, on fera en sorte que son plan prolongé passe par le point B. On visera alors ce point B avec l'alidade, de manière à mesurer l'angle BCE. Le fil à plomb déterminera la projection D, sur le terrain, du centre C du graphomètre. A partir du point D et parallèlement au diamètre de l'instrument, on tracera et l'on chaînera l'alignement DA, égal et parallèle au côté CE du triangle rectangle BEC. Ce même triangle donnera alors

Fig. 25.



$$BE = CE . \tang BCE.$$

Ajoutant à BE la hauteur CD du centre du graphomètre au-dessus du terrain horizontal, on aura la hauteur cherchée.

(*) Ces applications, qui ne sont pas exigées pour l'admission à l'École centrale parce qu'elles font partie du Cours de Travaux publics professé à cette École, sont néanmoins très-utiles à connaître avant d'y entrer. Nous engageons les élèves studieux à consulter sur ce sujet l'élégant *Abrégé* de M. A. Amiot ou l'excellent *Traité* de MM. Briot et Vacquant.

2° *Déterminer la hauteur d'un édifice qui repose sur un terrain sensiblement horizontal, mais dont le pied est inaccessible* (*fig.* 26).

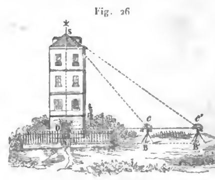


Fig. 26

On installera le graphomètre en c', comme dans le problème précédent, et l'on mesurera l'angle $Sc'D$. Puis on transportera l'instrument parallèlement à lui-même, de manière que la nouvelle position c du centre se projette en B sur l'alignement $B'B$, parallèle au diamètre horizontal du limbe à la première station. On mesurera alors l'angle ScD, et l'on chaînera la distance $B'B = c'c$.

Le triangle $Sc'c$ donnera alors

$$\frac{Sc'}{cc'} = \frac{\sin Scc'}{\sin cSc'}.$$

Les angles Scc' et ScD étant supplémentaires et l'angle cSc' étant égal à la différence des angles ScD et $Sc'D$, cette relation deviendra

$$Sc' = \frac{cc' . \sin ScD}{\sin(ScD - Sc'D)}.$$

Le triangle rectangle $Sc'D$ donne d'ailleurs

$$SD = Sc' . \sin Sc'D.$$

On aura donc en résumé

$$SD = \frac{cc' . \sin ScD . \sin Sc'D}{\sin(ScD - Sc'D)}.$$

Ajoutant à SD la hauteur du graphomètre, on obtiendra la hauteur demandée.

3° *Déterminer la distance d'un point donné à un point inaccessible* (*fig.* 27).

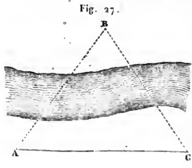


Fig. 27.

Soit AB la distance demandée. On mesurera avec la chaîne une *base* quelconque AC, à partir du point A. Puis on visera le point B à l'aide du graphomètre, en se plaçant successivement aux points A et C. La base AC doit être telle, que les angles CAB, ACB, ainsi déterminés, ne s'écartent pas beaucoup de 45° (on sait que

les angles trop aigus nuisent à l'exactitude des calculs). Le triangle ABC donnera alors

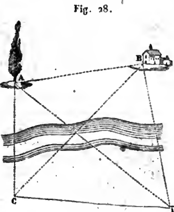
$$AB = \frac{AC.\sin BCA}{\sin ABC}.$$

L'angle ABC est le supplément de la somme des angles mesurés.

4° *Déterminer la distance qui sépare deux points inaccessibles* (*fig.* 28).

Soit AB la distance demandée. On mesurera, sur la partie accessible du terrain une base CD. Puis, à l'aide du graphomètre, on déterminera les quatre angles formés par CD avec les côtés adjacents et les diagonales du quadrilatère ABCD. Si ce quadrilatère est *plan*, l'angle ADB sera connu comme différence des angles CDB et CDA. Mais si, comme il arrive presque toujours, ce quadrilatère est *gauche*, on devra mesurer directement l'angle ADB.

Fig. 28.



Ceci posé, on connaîtra dans le triangle CDA un côté CD et deux angles CDA, ACD : on pourra donc calculer AD. De même, on connaîtra dans le triangle CDB un côté CD et deux angles CDB, BCD : on pourra donc calculer BD. Le triangle ADB dans lequel on connaîtra alors deux côtés et l'angle compris, permettra ensuite de déterminer la distance inaccessible AB.

On aura successivement, en désignant par a, b, d, les côtés du dernier triangle, et par A, B, D, ses angles :

$$b = \frac{CD.\sin ACD}{\sin CAD}, \quad a = \frac{CD.\sin BCD}{\sin CBD}.$$

Pouvant connaître les côtés b et a par leurs logarithmes, on posera

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tang}\varphi,$$

et le triangle ADB donnera (55)

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B - A) = \operatorname{tang}(45° - \varphi)\cot\frac{1}{2}D,$$

relation à l'aide de laquelle on calculera les angles A et B. On aura ensuite

$$AB \quad \text{ou} \quad d = \frac{a\sin D}{\sin A}.$$

Les formules logarithmiques à employer seront, par conséquent,

$$\log \operatorname{tang} \varphi = \log a - \log b,$$

c'est-à-dire

$$\log \operatorname{tang} \varphi = \log \sin BCD + \bar{L} \sin CBD + \bar{L} \sin ACD + \log \sin CAD,$$

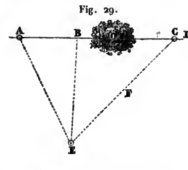
$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(B - A) = \log \operatorname{tang}(45^\circ - \varphi) + \log \cot \frac{1}{2} D;$$

$$\log d = \log CD + \log \sin BCD + \bar{L} \sin CBD + \log \sin D + \bar{L} \sin A.$$

5° *Prolonger un alignement au delà d'un obstacle qui arrête la vue (fig. 29).*

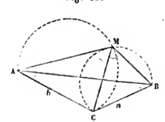
On veut continuer la ligne AB au delà de l'obstacle O. Après avoir chaîné la distance AB, on choisit un point E d'où l'on puisse apercevoir à la fois AB et la partie du terrain où doit se trouver le prolongement de AB. Puis, on vise ce point E avec le graphomètre, en se plaçant successivement aux points A et B. On connaît alors dans le triangle ABE un côté et deux angles, de sorte qu'on peut calculer le côté AE. Soit CD le prolongement cherché, et supposons qu'on trace à partir du point E un alignement EF qui vienne couper ce prolongement au point C : c'est le point C qu'il faut déterminer. Or, dans le triangle AEC, on connaîtra le côté AE et les deux angles adjacents; par suite on pourra calculer EC et fixer ensuite, à l'aide de la chaîne, la véritable position du point C. On connaîtra l'angle ACE, troisième angle du triangle AEC. Il restera donc à tracer CD, de manière que l'angle ECD soit le supplément de l'angle ACE.

Fig. 29.



6° *On donne trois points* A, B, C, *sur une carte : ces points sont situés sur un terrain sensiblement horizontal. Les distances* AC *et* CB *ayant été vues d'un quatrième point* M *sous des angles* α *et* β *qu'on a mesurés, on demande de rapporter ce point* M *sur la carte (fig.* 30).

Fig. 30.



La solution géométrique est évidente. Passons donc immédiatement à la solution trigonométrique.

On connaît le triangle ABC : on connaît par suite le côté $BC = a$, le côté $AC = b$, et l'angle C.

Prenons pour inconnues principales l'angle $MAC = x$ et l'angle $MBC = y$. L'angle AMB représentant la somme des angles α et β, le quadrilatère AMBC donnera immédiatement

$$x + y = 360^\circ - (\alpha + \beta + C).$$

Il faut donc chercher la différence $x - y$. Pour cela, nous exprimerons dans les deux triangles AMC et CMB la valeur du côté MC. Il viendra

$$MC = \frac{b \sin x}{\sin \alpha}, \quad MC = \frac{a \sin y}{\sin \beta},$$

d'où

$$\frac{b \sin x}{\sin \alpha} = \frac{a \sin y}{\sin \beta} \quad \text{et} \quad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta}.$$

Posons $\frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta} = \operatorname{tang} \varphi$. Nous aurons

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\operatorname{tang} \varphi}{1},$$

et nous en déduirons facilement

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tang} \varphi - 1}{\operatorname{tang} \varphi + 1} = \operatorname{tang}(\varphi - 45^\circ)$$

ou (26)

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x - y)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x + y)} = \operatorname{tang}(\varphi - 45^\circ).$$

Or $\frac{1}{2}(x + y) = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + C}{2}$. On aura donc

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x - y) = \operatorname{tang}(\varphi - 45^\circ) \operatorname{tang}\left(180^\circ - \frac{\alpha + \beta + C}{2}\right).$$

Cette formule permettra de déterminer la différence $\frac{1}{2}(x - y)$ et, comme on connaît la somme $\frac{1}{2}(x + y)$, on trouvera immédiatement les inconnues x et y. Dès lors les triangles AMC et CMB seront complétement déterminés puisqu'on y connaîtra un côté et deux angles, et l'on pourra calculer les distances du point M aux points A, B, C.

Il peut arriver qu'on ait

$$180^\circ - \frac{\alpha + \beta + C}{2} = 90^\circ.$$

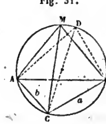
$\tang\left(180^\circ - \frac{\alpha+\beta+C}{2}\right)$ prend alors une valeur infinie. Dans ce cas, on a

$$\alpha + \beta + C = 180^\circ.$$

Les angles C et AMB sont alors supplémentaires, c'est-à-dire que le quadrilatère AMBC est inscriptible, et que les deux segments capables des angles α et β, décrits sur les côtés AC et BC, coïncident.

Le diamètre du cercle circonscrit au quadrilatère AMBC (*fig.* 31) aura pour expression, soit $\frac{b}{\sin\alpha}$ dans le triangle rectangle CAD, soit $\frac{a}{\sin\beta}$ dans le triangle rectangle CBD; et l'on en conclura

Fig. 31.



$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\beta},$$

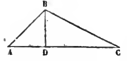
c'est-à-dire

$$\tang\varphi = \frac{a\sin\alpha}{b\sin\beta} = \frac{a}{\sin\beta} : \frac{b}{\sin\alpha} = 1 \text{ et } \varphi = 45^\circ.$$

Le facteur $\tang\left(180^\circ - \frac{\alpha+\beta+C}{2}\right)$ étant infini, et le facteur $\tang(\varphi - 45^\circ)$ étant nul, la valeur de $\tang\frac{1}{2}(x-y)$ se présentera sous une forme indéterminée (*Alg. élém.*, 127); ce qui doit être, puisque le point M peut se trouver en un point quelconque du cercle circonscrit au quadrilatère AMBC.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1° On suppose un remblai de chemin de fer ayant une hauteur de h^{M}, une largeur de l^{M} au sommet, et des talus gazonnés dont l'angle à l'horizon a p pour tangente. Ce remblai étant établi sur une longueur de $m^{K.M}$, on demande combien il a exigé de mètres cubes de terre et de mètres carrés de gazon.



2° Connaissant dans un triangle ABC, b, c et A, calculer la hauteur BD et les segments AD et DC; en conclure l'angle C et le côté a.

3° On donne les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC et la projection BP de l'hypoténuse sur l'axe OX : on demande l'angle x.



Conclure de la marche suivie un moyen de résoudre l'équation

$$m\cos x + n\sin x = q,$$

où m, n, q, sont des nombres donnés.

(On calculera l'angle ABC $= \alpha$ et l'angle CBP $= \beta$.)

3° Calculer la surface d'un trapèze dont on donne les bases et les diagonales.

4° Calculer l'aire d'un trapèze dont on connaît les quatre côtés.

5° On donne deux côtés adjacents d'un parallélogramme et l'angle formé par l'un d'eux avec la diagonale voisine : calculer les angles et les diagonales du parallélogramme.

6° Dans le triangle ABC, on donne un côté et deux angles : calculer les trois bissectrices.

7° On connaît deux côtés d'un triangle et sa surface : résoudre ce triangle.

8° Soient r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit à un triangle ABC ; soient r', r'', r''', les rayons des cercles ex-inscrits à ce triangle ; soient S la surface du triangle et $2p$ son périmètre : démontrer les formules

$$S = pr = (p-a)r' = (p-b)r'' = (p-c)r''',$$

$$r' = p \operatorname{tang} \frac{1}{2} A, \quad r'' = p \operatorname{tang} \frac{1}{2} B, \quad r''' = p \operatorname{tang} \frac{1}{2} C,$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}, \quad S = \sqrt{rr'r''r'''}, \quad R = \frac{r'+r''+r'''-r}{4}.$$

Dans le cas d'un triangle rectangle, on a

$$S = rr' = r''r''', \quad r' - r = r'' + r''' = a.$$

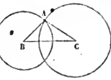
(r' est le rayon du cercle ex-inscrit qui touche le côté a ; r'' celui du cercle qui touche le côté b, etc.)



9° Par un point A pris dans le plan d'un cercle O, on mène une sécante quelconque BC : prouver que le produit $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{AOB} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{AOC}$ est constant.

10° Trouver dans quel cas la surface du triangle formé par deux rayons d'un cercle et la corde de l'arc qu'ils interceptent, est un maximum.

11° On donne la distance des centres BC et les rayons BA et CA de deux cercles qui se coupent : calculer l'aire de la partie commune à ces deux cercles.



12° Résoudre un triangle, connaissant les trois hauteurs.

13° Déterminer le triangle dont les côtés sont exprimés par trois nombres entiers consécutifs, et dans lequel le plus grand angle est le double du plus petit.

14° Partager un arc en deux parties telles, que la somme ou le produit des cordes des deux arcs obtenus soit un maximum.

15° Connaissant les rayons et la distance des centres de deux circonférences, calculer les longueurs de leurs tangentes communes et les angles qu'elles forment avec la ligne des centres.

LIVRE TROISIÈME.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES FONDAMENTALES.

63. Un triangle sphérique renferme trois côtés et trois angles. ***Résoudre*** un triangle sphérique, c'est déterminer ***numériquement*** trois quelconques de ses six éléments en fonction des trois autres.

Nous conviendrons de désigner les angles du triangle considéré par les lettres A, B, C, et les côtés *opposés* par les lettres correspondantes a, b, c.

Si le triangle est *rectangle*, A désignera toujours l'angle droit et, par suite, a l'hypoténuse.

Si l'on connaît les côtés d'un triangle sphérique par leurs nombres de degrés, il est facile de trouver leur longueur en mètres. On a en effet la formule

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Nous ne nous occuperons que des triangles sphériques *dont les côtés sont moindres que* 180°, et nous rappellerons les propositions suivantes.

Nous remarquerons d'abord que, si l'on joint le centre de la sphère aux sommets d'un pareil triangle, on forme un angle trièdre dont les angles plans sont mesurés par les côtés du triangle sphérique et dont les angles dièdres sont précisément ceux du triangle (*Géom.*, 266). Il en résulte que *les angles du triangle doivent aussi être inférieurs à* 180°.

Dans tout triangle sphérique, *chaque côté est plus petit que la somme des deux autres; la somme des trois côtés est inférieure à* 360° (*Géom.*, 267).

Dans tout triangle sphérique, *à un plus grand côté est opposé un plus grand angle, et réciproquement* (*Géom.*, 269).

Étant donné un triangle sphérique, *il en existe toujours un*

autre dont les côtés et les angles sont les suppléments respectifs des angles et des côtés du premier triangle. Ces deux triangles sont appelés supplémentaires ou polaires, et on peut les construire l'un au moyen de l'autre (*Géom.*, 268).

La somme des angles d'un triangle sphérique est toujours comprise entre deux et six droits (*Géom.*, 269).

Enfin, l'*excès sphérique* d'un triangle est l'excès de la somme de ses angles sur 180°. *Le rapport de cet excès à 1 droit mesure précisément l'aire du triangle sphérique, lorsqu'on prend pour unité d'aire le triangle sphérique trirectangle* (*Géom.*, 276).

64. Nous allons chercher à établir des relations numériques entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique.

La relation fondamentale, celle d'où l'on peut déduire toutes les autres, est la relation qui existe entre les trois côtés du triangle et un angle.

Formules renfermant les trois côtés et un angle.

Soit le triangle sphérique ABC, soit O le centre de la sphère à laquelle il appartient. En joignant le point O aux sommets A, B, C, je forme l'angle trièdre OABC (*fig.* 32).

Fig. 32.

Je prends sur l'arête OA une longueur OM égale à 1, et je mène par le point M un plan MNP perpendiculaire à l'arête OA. J'obtiens, comme section, un triangle MNP dont l'angle M mesure le dièdre OA ou l'angle A du triangle ABC. Les deux triangles OMN, OMP, sont d'ailleurs tous deux rectangles en M.

Ceci posé, les deux triangles MNP et ONP donnent (44)

$$\overline{NP}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{MP}^2 - 2MN.MP.\cos A,$$
$$\overline{NP}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{OP}^2 - 2ON.OP.\cos a.$$

Retranchons membre à membre la première égalité de la seconde, et remarquons qu'on peut écrire

$$\overline{ON}^2 - \overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 = 1,$$
$$\overline{OP}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{OM}^2 = 1.$$

On aura en divisant par 2 tous les termes de l'égalité résultante :

$$0 = 1 - ON.OP.\cos a + MN.MP.\cos A.$$

En nous rappelant les définitions des rapports trigonomé-

triques, nous pourrons poser

$$\frac{MN}{OM} = \text{tang}\, c, \quad \text{d'où} \quad MN = \text{tang}\, c = \frac{\sin c}{\cos c},$$

$$\frac{MP}{OM} = \text{tang}\, b, \quad \text{d'où} \quad MP = \text{tang}\, b = \frac{\sin b}{\cos b},$$

$$\frac{MN}{ON} = \sin c, \quad \text{d'où} \quad ON = \frac{\text{tang}\, c}{\sin c} = \frac{1}{\cos c},$$

$$\frac{MP}{OP} = \sin b, \quad \text{d'où} \quad OP = \frac{\text{tang}\, b}{\sin b} = \frac{1}{\cos b}.$$

Substituant, nous aurons

$$0 = 1 - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} + \frac{\sin b \sin c}{\cos b \cos c} \cos A.$$

Isolons $\cos a$ dans le premier membre et multiplions tous les termes par $\cos b \cos c$; il viendra

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

relation complétement générale, comme il est facile de s'en assurer.

En considérant successivement les trois arêtes OA, OB, OC, ou les trois côtés a, b, c, on obtiendra donc un premier groupe de trois formules, savoir

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

65. *Formules renfermant les trois angles et un côté.*

Considérons le triangle sphérique supplémentaire du triangle ABC. Si l'on désigne ses côtés et ses angles par les mêmes lettres accentuées, on aura d'après ce qui précède (64)

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

Mais (63)

$$a' = 180^\circ - A, \quad b' = 180^\circ - B, \quad c' = 180^\circ - C,$$
$$A' = 180^\circ - a;$$

c'est-à-dire

$$\cos a' = -\cos A, \quad \cos b' = -\cos B, \quad \cos c' = -\cos C,$$
$$\sin b' = \sin B, \quad \sin c' = \sin C, \quad \cos A' = -\cos a.$$

On pourra donc écrire

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a$$

ou, en changeant les signes des deux membres,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

On est ainsi conduit à un nouveau groupe de trois formules

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$
$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b,$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.$$

66. *Formules renfermant deux côtés et les deux angles opposés.*

De la relation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

on déduit

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Par suite,

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c},$$

c'est-à-dire, en remplaçant au numérateur après réduction $\sin^2 b \sin^2 c$ par $(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c)$,

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c},$$

ou

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

On en déduit

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

Cette valeur du rapport $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}$ ne change pas quand on permute les angles A, B, C et les côtés a, b, c. On a donc

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c},$$

et, comme il s'agit d'angles et de côtés moindres que 180°, cette première série de rapports égaux entraîne la suivante :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

Ainsi, dans tout triangle sphérique, *les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés.*

67. *Formules renfermant deux côtés, l'angle qu'ils comprennent et l'angle opposé à l'un d'eux.*

Prenons la relation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

et remplaçons $\cos c$ par sa valeur

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C;$$

nous aurons ainsi une relation entre les côtés a, b et les angles C, A. Il viendra

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A,$$

d'où

$$\cos a (1 - \cos^2 b) = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A.$$

Je remplace $1 - \cos^2 b$ par $\sin^2 b$, et je divise les deux membres de l'égalité par $\sin a \sin b$; je trouve

$$\frac{\cos a \sin b}{\sin a} = \cos b \cos C + \frac{\sin c \cos A}{\sin a}.$$

$$\frac{\cos a}{\sin a} = \cot a;$$

de même (66),

$$\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A};$$

le dernier terme du second membre revient donc à $\sin C \cot A$. Par conséquent, la relation cherchée sera

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A.$$

Nous obtiendrons ainsi un dernier groupe de six formules, car on peut considérer, en même temps que les côtés a, b et l'angle C, soit l'angle A opposé au côté a, soit l'angle B opposé au côté b. Ces six formules seront

$$\begin{aligned}
\cot a \sin b &= \cos b \cos C + \sin C \cot A,\\
\cot b \sin a &= \cos a \cos C + \sin C \cot B,\\
\cot a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \cot A,\\
\cot c \sin a &= \cos a \cos B + \sin B \cot C,\\
\cot b \sin c &= \cos c \cos A + \sin A \cot B,\\
\cot c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A \cot C.
\end{aligned}$$

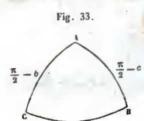
Remarque. En résumé, nous avons *quatre* groupes, contenant en tout *quinze* formules : chacune de ces formules renferme *quatre éléments*, et le nombre 15 est celui des combinaisons qu'on peut former avec *six* objets pris *quatre à quatre*.

68. Pour avoir les formules qui conviennent à la résolution des triangles *rectangles*, il suffit de faire dans les précédentes $A = 90°$. On obtient ainsi les *dix* formules suivantes qui contiennent chacune *trois* éléments : l'angle droit étant toujours donné, il ne reste à considérer que *cinq* éléments dans le triangle, et *dix* est précisément le nombre des combinaisons qu'on peut former avec *cinq* objets pris *trois à trois*. Voici les dix formules :

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \ \cos c,\\
\sin b &= \sin a \ \sin B,\\
\sin c &= \sin a \ \sin C,\\
\tang b &= \tang a \cos C,\\
\tang c &= \tang a \cos B,\\
\tang b &= \sin c \ \tang B,\\
\tang c &= \sin b \ \tang C,\\
\cos a &= \cot B \ \cot C,\\
\cos B &= \sin C \ \cos b,\\
\cos C &= \sin B \ \cos c.
\end{aligned}$$

On en fait un usage continuel. Pour les retrouver, on peut se servir du moyen mnémonique suivant. Soit le triangle rectangle ABC (*fig.* 33). Considérons les cinq éléments de ce triangle dans l'ordre où ils se présentent, en faisant abstraction de l'angle droit A et en ayant soin de remplacer les côtés b et c de cet angle par leurs compléments $\frac{\pi}{2} - b$ et $\frac{\pi}{2} - c$. *Le cosinus de l'un quelconque des cinq éléments sera égal au produit des cotangentes des deux éléments adjacents ou au produit des sinus des deux autres éléments.*

Fig. 33.



Si l'on demande, par exemple, une relation entre les côtés a, b, c, on aura (puisque les côtés b et c sont séparés de a par les angles B et C)

$$\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \text{sn} \left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \cos b \cos c.$$

Si l'on demande une relation entre l'angle B et les côtés a et b, il viendra (puisque le côté b est séparé du côté a et de l'angle B par l'angle C et le côté c)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin a \sin B \quad \text{ou} \quad \sin b = \sin a \sin B.$$

Enfin, si l'on demande une relation entre le côté a et les angles B et C, on aura (le côté a étant adjacent aux angles B et C),

$$\cos a = \cot B \cot C.$$

69. Il est essentiel de s'arrêter un moment sur les propriétés des triangles rectangles qui résultent des relations précédentes (68).

La relation

$$\cos a = \cos b \cos c$$

prouve que *le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cosinus des deux côtés de l'angle droit.* Dès lors les trois cosinus sont positifs, ou il n'y en a que deux négatifs. Le cosinus d'un arc plus petit que 180° étant positif ou négatif, suivant que cet arc est moindre ou plus grand que 90°, il en résulte que, dans tout triangle rectangle, *les trois côtés sont ensemble inférieurs à 90°, ou qu'un seul remplit cette condition.*

Les équations

$$\sin b = \sin a \sin B,$$
$$\sin c = \sin a \sin C,$$

prouvent que *le sinus de chaque côté de l'angle droit est égal au sinus de l'hypoténuse multiplié par le sinus de l'angle opposé.*

Les équations

$$\tan b = \tan a \cos C,$$
$$\tan c = \tan a \cos B,$$

prouvent que *la tangente de chaque côté de l'angle droit est égale à la tangente de l'hypoténuse, multipliée par le cosinus de l'angle adjacent.*

Et les équations

$$\tan b = \sin c \tan B,$$
$$\tan c = \sin b \tan C,$$

montrent que *la tangente de chaque côté de l'angle droit est égale au sinus de l'autre côté multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier côté.* Les sinus d'arcs moindres que 180° étant toujours positifs, il en résulte que *la tangente de chaque angle oblique* (*) *est de même signe que la tangente du côté opposé;* en d'autres termes, *les côtés de l'angle droit et les angles qui leur sont opposés sont de même espèce,* c'est-à-dire *ensemble plus petits ou plus grands que 90°.*

L'équation

$$\cos a = \cot B \cot C$$

(*) On appelle *angles obliques* d'un triangle rectangle les angles non droits.

exprime que *le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cotangentes des deux angles obliques.*

Enfin les équations

$$\cos B = \cos b \sin C,$$
$$\cos C = \cos c \sin B,$$

signifient que *le cosinus de chaque angle oblique est égal au produit du cosinus du côté opposé par le sinus du second angle oblique.*

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES RECTANGLES.

---

70. Nous ne considérerons que les triangles rectangles qui ont *un seul angle droit*. En effet, si le triangle ABC (*fig.* 34) est *birectangle* en A et en B, le sommet C sera le pôle du côté *c* (*Géom.*, 260); de sorte que les côtés *a* et *b* seront égaux à 90°, et que l'angle C aura pour mesure le côté *c* (*Géom.*, 264). Si le triangle ABC est *trirectangle*, chaque sommet sera le pôle du côté opposé, et les trois côtés seront égaux à 90°.

Fig. 34.

Avant de parcourir les six cas distincts que présente la résolution des triangles rectangles, rappelons une fois pour toutes qu'il s'agit de côtés ou d'angles compris entre 0° et 180°. Par conséquent, lorsqu'un côté ou un angle sera donné par *son cosinus, sa tangente ou sa cotangente*, il sera complétement déterminé. Il n'en sera pas de même pour un côté ou un angle donné par *son sinus*, parce qu'à un même sinus, entre 0° et 180°, correspondent deux arcs supplémentaires. Enfin, si la valeur d'un cosinus, d'une tangente ou d'une cotangente est *négative, on la changera de signe*, et l'on prendra ensuite *le supplément* de l'arc ou de l'angle obtenu à l'aide de la formule ainsi modifiée (Livre I, Chapitre I).

71. Premier cas. *On donne l'hypoténuse a et un côté b : on demande de calculer le côté c et les deux angles* B *et* C (*fig.* 34).

L'équation

$$\cos a = \cos b \cos c$$

donne immédiatement

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

On a ensuite

$$\sin b = \sin a \sin B,$$

d'où

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}.$$

Enfin, de

$$\tang b = \tang a \cos C,$$

on déduit

$$\cos C = \frac{\tang b}{\tang a}.$$

L'angle B est donné par son sinus, mais on sait que l'angle B et le côté b doivent être de même espèce (69). Il n'y aura donc aucune ambiguïté, et le triangle sera complétement déterminé.

Il est souvent préférable d'opérer comme nous allons l'indiquer, en déterminant tous les éléments inconnus par leurs tangentes.

On sait (24) que

$$\tang \frac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} c} = \sqrt{\frac{1 - \cos c}{1 + \cos c}}.$$

On a d'ailleurs

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

Nous aurons par conséquent (27)

$$\tang \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a}} = \sqrt{\tang \frac{1}{2}(a+b) \tang \frac{1}{2}(a-b)}.$$

Cette valeur de $\tang \frac{1}{2} c$ est nécessairement positive, puisque c est inférieur à 180°.

Si l'on donnait a et c au lieu de a et b, on trouverait de même

$$\tang \frac{1}{2} b = \sqrt{\tang \frac{1}{2}(a+c) \tang \frac{1}{2}(a-c)}.$$

On a

$$\tang \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}}.$$

Changeons dans cette égalité B en 90° + B, et rappelons-nous que $\cos(90° + B) = -\sin B$. Il viendra

$$\tang\left(45° + \frac{1}{2} B\right) = \sqrt{\frac{1 + \sin B}{1 - \sin B}}.$$

Si l'on remplace $\sin B$ par sa valeur $\frac{\sin b}{\sin a}$, on trouve (26)

$$\tang\left(45° + \frac{1}{2} B\right) = \sqrt{\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}} = \sqrt{\frac{\tang \frac{1}{2}(a+b)}{\tang \frac{1}{2}(a-b)}}.$$

La formule

$$\sin c = \sin a \sin C$$

conduirait de même à

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}C\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+c)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-c)}}.$$

B ou C devant être de même espèce que b ou c, on saura d'avance si l'angle $45^\circ + \frac{1}{2}B$ ou l'angle $45^\circ + \frac{1}{2}C$ surpasse ou non 90°, c'est-à-dire on saura de quel signe affecter le radical correspondant. Enfin, puisqu'on a à la fois

$$\cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}},$$

il en résulte

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}}.$$

Si l'on remplace $\operatorname{tang} a$ par $\frac{\sin a}{\cos a}$ et $\operatorname{tang} b$ par $\frac{\sin b}{\cos b}$, on obtient

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}C = +\sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}.$$

La formule

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B$$

conduirait de même à

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}B = +\sqrt{\frac{\sin(a-c)}{\sin(a+c)}}.$$

En résumé, les formules propres au calcul du premier cas seront (avec les données indiquées a et b)

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}c = +\sqrt{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)},$$

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}B\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}C = +\sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}.$$

On n'aura que *quatre* logarithmes à chercher.

Pour que le problème soit possible, $\sin B$ doit être moindre que 1, c'est-à-dire qu'on doit avoir $\sin b < \sin a$. Cette condition sera *toujours* remplie, si a tombe entre b et $180^\circ - b$. Dans ce cas, on aura nécessairement (*en valeur absolue*)

$$\cos b > \cos a \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} b < \operatorname{tang} a,$$

c'est-à-dire que $\cos c$ et $\cos C$ resteront compris entre $+1$ et -1. Ainsi, pour que le triangle existe, *il faut et il suffit que l'hypoténuse tombe entre le côté donné et le supplément de ce côté.*

72. Deuxième cas. *On donne l'hypoténuse a et un angle B : on demande de calculer l'angle C et les côtés b et c (fig. 34).*

On aura

$$\sin b = \sin a \sin B,$$
$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B,$$
$$\cos a = \cot B \cot C,$$

d'où

$$\cot C = \frac{\cos a}{\cot B}.$$

Le côté b est déterminé par son sinus, mais il est de même espèce que l'angle B, et il n'y a qu'une solution. Si ce côté devait être mal déterminé par son sinus, on commencerait par chercher c ou C, et l'on aurait ensuite recours à la formule

$$\operatorname{tang} b = \sin c \operatorname{tang} B \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C.$$

Ce second cas est toujours possible.

73. Troisième cas. *On donne les deux côtés b et c : on demande l'hypoténuse a et les deux angles B et C (fig. 34).*

On a

$$\cos a = \cos b \cos c,$$
$$\operatorname{tang} b = \sin c \operatorname{tang} B, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin c},$$
$$\operatorname{tang} c = \sin b \operatorname{tang} C, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} c}{\sin b}.$$

Si le côté a devait être mal déterminé par son cosinus, on commencerait par chercher B ou C; puis l'on se servirait de la formule

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C.$$

Ce troisième cas n'admet qu'une solution, et est toujours possible.

74. Quatrième cas. *On donne un côté b de l'angle droit et l'angle B qui lui est opposé : on demande les côtés a et c, et l'angle C (fig. 34).*

On peut se servir des formules

$$\sin b = \sin a \sin B,$$
$$\operatorname{tang} b = \sin c \operatorname{tang} B,$$
$$\cos B = \cos b \sin C,$$

qui donnent

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B}, \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

Mais il vaut mieux, comme dans le premier cas, recourir aux formules suivantes.

Les relations

$$\sin b = \sin a \sin B,$$
$$\sin c = \sin a \sin C,$$

nous ont conduit (71) aux égalités

$$\tang\left(45^\circ+\frac{1}{2}B\right)=\sqrt{\frac{\tang\frac{1}{2}(a+b)}{\tang\frac{1}{2}(a-b)}},$$

$$\tang\left(4^\circ+\frac{1}{2}C\right)=\sqrt{\frac{\tang\frac{1}{2}(a+c)}{\tang\frac{1}{2}(a-c)}}.$$

Remarquons que ces relations ne changent pas quand on permute dans la première les lettres a et B, dans la seconde les lettres a et C ; les égalités qu'on en a déduites resteront donc vraies, lorsqu'on y opérera une permutation analogue. Il viendra alors

$$\tang\left(45^\circ+\frac{1}{2}a\right)=\sqrt{\frac{\tang\frac{1}{2}(B+b)}{\tang\frac{1}{2}(B-b)}}.$$

$$\tang\left(45^\circ+\frac{1}{2}a\right)=\sqrt{\frac{\tang\frac{1}{2}(C+c)}{\tang\frac{1}{2}(C-c)}}.$$

En suivant une marche analogue à celle qui nous a fait connaître (71) la valeur de $\tang\left(45^\circ+\frac{1}{2}B\right)$, on trouve

$$\tang\left(45^\circ+\frac{1}{2}c\right)=\sqrt{\frac{1+\sin c}{1-\sin c}}.$$

On a d'ailleurs

$$\tang b=\sin c\tang B,\quad \text{d'où}\quad \sin c=\frac{\tang b}{\tang B}.$$

Substituant et remplaçant $\tang b$ par $\frac{\sin b}{\cos b}$, $\tang B$ par $\frac{\sin B}{\cos B}$, on arrive facilement à

$$\tang\left(45^\circ+\frac{1}{2}c\right)=\sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}}.$$

La formule $\tang c=\sin b\tang C$ conduit de même à

$$\tang\left(45^\circ+\frac{1}{2}b\right)=\sqrt{\frac{\sin(C+c)}{\sin(C-c)}}.$$

Enfin, nous savons qu'on a (71)

$$\tang\left(45^\circ+\frac{1}{2}C\right)=\sqrt{\frac{1+\sin C}{1-\sin C}}.$$

La relation $\cos B = \cos b \sin C$ donne $\sin C = \frac{\cos B}{\cos b}$. Par suite (26),

$$\tang\left(45^\circ + \frac{1}{2}C\right) = \sqrt{\frac{\cos b + \cos B}{\cos b - \cos B}} = \sqrt{\cot\frac{1}{2}(B+b)\cot\frac{1}{2}(B-b)}.$$

La relation $\cos C = \cos c \sin B$ conduirait de même à

$$\tang\left(45^\circ + \frac{1}{2}B\right) = \sqrt{\cot\frac{1}{2}(C+c)\cot\frac{1}{2}(C-c)}.$$

Pour résoudre le quatrième cas, on emploiera donc de préférence les formules

$$\tang\left(45^\circ + \frac{1}{2}a\right) = \pm\sqrt{\frac{\tang\frac{1}{2}(B+b)}{\tang\frac{1}{2}(B-b)}},$$

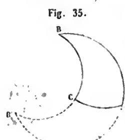
$$\tang\left(45^\circ + \frac{1}{2}c\right) = \pm\sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}},$$

$$\tang\left(45^\circ + \frac{1}{2}C\right) = \pm\sqrt{\cot\frac{1}{2}(B+b)\cot\frac{1}{2}(B-b)},$$

qui donnent les éléments inconnus en fonction de leurs tangentes et n'exigent que la recherche de *quatre* logarithmes.

Le cas qui nous occupe admet *deux solutions distinctes*. Supposons, en effet, que le triangle ABC (*fig.* 35) satisfasse aux données. Si l'on prolonge les arcs BA et BC jusqu'à leur nouvelle rencontre en B', le triangle AB'C répondra aussi à la question: car il aura pour côté $AC = b$ et l'angle B' sera identique à l'angle B. Les côtés B'A et B'C sont d'ailleurs *les suppléments* des côtés BA et BC, et l'angle B'CA est *le supplément* de l'angle BCA. Les doubles signes placés devant les radicaux des formules précédentes correspondent donc aux deux solutions. Il faut voir maintenant de quelle manière les valeurs obtenues doivent être assemblées.

Fig. 35.



B *doit être de même espèce que b.*

On a donc à la fois $b < 90^\circ$ et $B < 90^\circ$. L'équation $\cos a = \cos b \cos c$ montre alors que a et c sont de même espèce; l'équation $\cos C = \cos c \sin B$ prouve que c et C sont aussi de même espèce. Par suite, lorsque b est moindre que 90°, les éléments de la première solution sont donnés par les signes *plus* des radicaux, les éléments de la seconde par les signes *moins* de ces radicaux.

Si b est $> 90^\circ$, on a aussi $B > 90^\circ$. La relation $\sin b = \sin a \sin B$ montre que $\sin b$ est moindre que $\sin B$; par suite, il faut qu'on ait $b > B$. L'équation $\cos a = \cos b \cos c$ exige alors que a et c soient d'espèce différente. La formule $\cos C = \cos c \sin B$ montre que c et C sont toujours de même espèce. Par suite, si l'on prend le signe *plus* pour le premier radical, on prendra le signe *moins* pour les deux autres, et l'on aura les éléments de la première solution. Si l'on prend le signe *moins* pour le pre-

nier radical, on prendra le signe *plus* pour les deux autres, et l'on aura les éléments de la seconde solution.

75. Cinquième cas. *On donne le côté b et l'angle adjacent* C : *on demande les côtés a et c, et l'angle* B (*fig.* 34).

On aura

$$\cos B = \cos b \sin C,$$

$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang} b}{\cos C},$$

$$\operatorname{tang} c = \sin b \operatorname{tang} C.$$

Si l'angle B devait être mal déterminé par son cosinus, on calculerait d'abord a ou c, et B serait ensuite donné par la formule $\cos a = \cot B \cot C$ ou $\operatorname{tang} b = \sin c \operatorname{tang} B$.

Le cinquième cas est toujours possible et n'admet qu'une solution.

76. Sixième cas. *On donne les deux angles* B *et* C : *on demande les trois côtés a, b, c* (*fig.* 34).

On peut employer les formules

$$\cos a = \cot B \cot C,$$

$$\cos B = \cos b \sin C, \quad \text{d'où} \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C};$$

$$\cos C = \cos c \sin B, \quad \text{d'où} \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

Mais il sera préférable, comme pour le premier et le quatrième cas, d'employer les formules suivantes.

On a

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$

Remplaçons $\cos a$ par sa valeur $\cot B \cot C$ ou

$$\frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

Nous aurons

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos(B+C)}{\cos(B-C)}}.$$

De même,

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{1 - \cos b}{1 + \cos b}}.$$

La formule $\cos B = \cos b \sin C$ donne

$$\cos b = \frac{\cos B}{\sin C} = \frac{\cos B}{\cos(90^\circ - C)}.$$

Par suite,

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\cos(90^\circ - C) - \cos B}{\cos(90^\circ - C) + \cos B}},$$

d'où résulte (27)

$$\tang\frac{1}{2}b = \sqrt{\tang\left(\frac{B-C}{2}+45^\circ\right)\tang\left(\frac{B+C}{2}-45^\circ\right)}$$

La formule $\cos C = \cos c \sin B$ donnerait de même

$$\tang\frac{1}{2}c = \sqrt{\tang\left(\frac{C-B}{2}+45^\circ\right)\tang\left(\frac{C+B}{2}-45^\circ\right)}.$$

En résumé, les formules à employer pour le sixième cas seront

$$\tang\frac{1}{2}a = +\sqrt{\frac{-\cos(B+C)}{\cos(B-C)}},$$

$$\tang\frac{1}{2}b = +\sqrt{\tang\left(\frac{B-C}{2}+45^\circ\right)\tang\left(\frac{B+C}{2}-45^\circ\right)},$$

$$\tang\frac{1}{2}c = +\sqrt{\tang\left(\frac{C-B}{2}+45^\circ\right)\tang\left(\frac{C+B}{2}-45^\circ\right)}.$$

Les conditions de possibilité du problème sont que $\frac{B+C}{2}$ tombe entre 45° et 135°, que $\frac{B-C}{2}$ tombe entre -45° et $+45^\circ$. Il est facile de s'assurer que les valeurs des trois tangentes sont alors réelles. Le problème n'admet d'ailleurs qu'une solution.

77. Nous achèverons ce qui a rapport à la résolution des triangles sphériques rectangles, en donnant tous les éléments d'un pareil triangle ainsi que les logarithmes correspondants. On aura soin de se rappeler qu'au point de vue numérique, on ramène toujours les arcs considérés au premier quadrant (30). Ainsi, au lieu de chercher $\cos b = \cos 140^\circ 52' 40''$, on a cherché celui de $-\cos b = \cos 39^\circ 7' 20''$, en prenant négativement dans les formules le facteur $\cos b$ (70).

$a = 71^\circ 24' 30''$, $b = 140^\circ 52' 40''$, $c = 114^\circ 15' 54''$.

$\log\sin a = \bar{1},9767235$, $\log\sin b = \bar{1},8000134$, $\log\sin c = \bar{1},9598303$,

$\log\cos a = \bar{1},5035475$, $\log - \cos b = \bar{1},8897507$, $\log - \cos c = \bar{1},6137969$,

$\log\tang a = 0,4731759$, $\log - \tang b = \bar{1},9102626$, $\log - \tang c = 0,3460333$.

$A = 90^\circ$, $B = 138^\circ 15' 45''$, $C = 105^\circ 52' 39''$.

$\log\sin B = \bar{1},8232909$, $\log\sin C = \bar{1},9831068$,

$\log - \cos B = \bar{1},8728568$, $\log - \cos C = \bar{1},4370867$,

$\log - \tang B = \bar{1},9504341$, $\log - \tang C = 0,5460201$.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES OBLIQUANGLES.

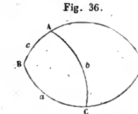
78. On peut quelquefois ramener la résolution du triangle proposé à l'un des cas examinés dans le chapitre précédent.

1° *Si le triangle proposé a un côté égal à* 90°, son triangle supplémentaire a un angle droit, c'est-à-dire est rectangle. On résoudra donc ce triangle supplémentaire (où l'on connaîtra deux éléments) comme il a été indiqué, et l'on reviendra ensuite au triangle considéré.

2° *Si le triangle proposé est isocèle*, c'est-à-dire s'il a deux côtés ou deux angles égaux, on le partagera en deux triangles rectangles égaux, en joignant son sommet au milieu de sa base par un arc de grand cercle. Dans chacun de ces triangles rectangles, outre l'angle droit, on connaîtra nécessairement deux éléments. La question sera donc ramenée à résoudre l'un de ces triangles.

3° Enfin, *si parmi les éléments donnés, se trouvent deux côtés a et b ou deux angles* A *et* B *qui soient supplémentaires*, on prolongera (*fig.* 36) les côtés a et c jusqu'à leur nouvelle rencontre en B′. Le triangle AB′C aura dès lors deux côtés égaux b et CB′ (puisque CB′ est le supplément de a) ou deux angles égaux B′ et CAB′ (puisque le supplément de l'angle A est l'angle CAB′ et que B′ = B). La résolution du triangle AB′C entraîne celle du triangle donné, et le triangle AB′C étant isocèle, sa résolution dépend de celle d'un triangle rectangle (2°).

Fig. 36.



79. La résolution des triangles sphériques quelconques présente six cas distincts; mais on peut les grouper deux à deux, comme il suit, on s'appuyant sur la considération du triangle supplémentaire.

Premier et deuxième cas. *On donne les trois côtés ou les trois angles : on demande de calculer les éléments inconnus.*

Si les trois côtés sont donnés, on a

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

d'où

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

On en déduit

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c},$$

c'est-à-dire (27)

$$\frac{1 - \cos A}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b \sin c}.$$

On trouvera de même

$$1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c},$$

c'est-à-dire (27)

$$\frac{1+\cos A}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c+a)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c}.$$

Posons, pour simplifier, $a+b+c=2p$. Les valeurs trouvées se présenteront sous la forme

$$\frac{1-\cos A}{2} = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c},$$

$$\frac{1+\cos A}{2} = \frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}.$$

On a d'ailleurs

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}, \quad \cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.$$

Il viendra donc

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}}, \quad \cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}}.$$

En répétant les mêmes calculs pour les angles B et C, on aura

$$\sin\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a \sin c}}, \quad \cos\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-b)}{\sin a \sin c}},$$

$$\sin\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a \sin b}}, \quad \cos\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}}.$$

En divisant ces six formules deux à deux, on trouvera

$$\tang\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}},$$

$$\tang\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-b)}},$$

$$\tang\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)}}.$$

Dans toutes ces formules, le radical doit évidemment être pris avec le signe *plus*. Leur complète analogie avec les relations déjà données en trigonométrie rectiligne (56), les rend faciles à retenir. Il est préférable de déterminer les angles $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$, par leurs tangentes, d'après les raisons précédemment exposées.

Supposons, au contraire, qu'on donne les trois angles du triangle ABC. Les formules qu'on vient d'établir seront applicables aux angles $180°-a$, $180°-b$, $180°-c$, de son triangle supplémentaire; les côtés de ce triangle seront d'ailleurs $180°-A$, $180°-B$, $180°-C$, de sorte que leur somme $2P$ sera égale à $360°-(A+B+C-180°)$. La parenthèse représente l'*excès sphérique* du triangle ABC qu'on considère. Si l'on désigne cet excès sphérique par Δ, on aura

$$2P = 360° - \Delta \quad \text{ou} \quad P = 180° - \frac{1}{2}\Delta.$$

La formule

$$\tang\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}}$$

deviendra alors, on remplaçant A par $180° - a$; a, b, c, par les suppléments de A, B, C; p par P :

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(180° - a) = \cot\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin\left(B - \frac{1}{2}\Delta\right)\sin\left(C - \frac{1}{2}\Delta\right)}{\sin\frac{1}{2}\Delta\sin\left(A - \frac{1}{2}\Delta\right)}}$$

ou

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\sin\left(A - \frac{1}{2}\Delta\right)}{\sin\left(B - \frac{1}{2}\Delta\right)\sin\left(C - \frac{1}{2}\Delta\right)}}.$$

Nous aurons donc, pour déterminer les trois côtés inconnus, les trois formules

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\sin\left(A - \frac{1}{2}\Delta\right)}{\sin\left(B - \frac{1}{2}\Delta\right)\sin\left(C - \frac{1}{2}\Delta\right)}},$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\sin\left(B - \frac{1}{2}\Delta\right)}{\sin\left(A - \frac{1}{2}\Delta\right)\sin\left(C - \frac{1}{2}\Delta\right)}},$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\sin\left(C - \frac{1}{2}\Delta\right)}{\sin\left(A - \frac{1}{2}\Delta\right)\sin\left(B - \frac{1}{2}\Delta\right)}}.$$

En examinant les conditions de réalité des expressions trouvées, on est ramené aux conditions de possibilité du triangle. Ces conditions, comme nous l'avons vu en géométrie, sont les suivantes : Si l'on donne les côtés, chacun d'eux doit être plus petit que la somme des deux autres, et leur somme totale doit être moindre que 360°. Si l'on donne les trois angles, leur somme doit tomber entre deux droits et six droits, c'est-à-dire que l'excès sphérique du triangle doit tomber entre 0° et 360° ; chaque angle augmenté de deux droits doit être supérieur à la somme des deux autres angles, c'est-à-dire que chaque angle doit être supérieur à la moitié de l'excès sphérique.

80. TROISIÈME ET QUATRIÈME CAS. *On donne deux côtés et l'angle compris ou un côté et les deux angles adjacents : on demande de calculer les éléments inconnus.*

Pour résoudre ces deux cas le plus simplement possible, nous chercherons d'abord les formules ou *analogies de Neper*, et nous les déduirons des *formules de Delambre*.

Formules de Delambre et de Neper.

On a

$$\sin\frac{1}{2}(A+B) = \sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B + \cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B,$$

$$\cos\frac{1}{2}(A+B) = \cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B - \sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B.$$

Nous avons trouvé d'ailleurs (79) les valeurs de

$$\sin\frac{1}{2}A,\quad \sin\frac{1}{2}B,\quad \cos\frac{1}{2}A,\quad \cos\frac{1}{2}B.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les égalités précédentes, il viendra

$$\sin\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin(p-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}} + \frac{\sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}},$$

$$\cos\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin p}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}} - \frac{\sin(p-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}.$$

Mais

$$\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}} = \cos\frac{1}{2}C,$$

$$\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}} = \sin\frac{1}{2}C.$$

On pourra donc écrire

$$\sin\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin(p-b)+\sin(p-a)}{\sin c}\cdot\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin p-\sin(p-c)}{\sin c}\cdot\sin\frac{1}{2}C.$$

Or (27)

$$\frac{\sin(p-b)+\sin(p-a)}{\sin c} = \frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin p-\sin(p-c)}{\sin c} = \frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a+b)}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}.$$

On aura donc

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

En partant des valeurs de $\sin\frac{1}{2}(A-B)$ et de $\cos\frac{1}{2}(A-B)$ et en opérant d'une manière analogue, on trouverait les deux autres formules de

Delambre qui sont :

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}.$$

Les six éléments du triangle entrent dans ces formules. Si on les divise membre à membre dans l'ordre suivant : la première par la seconde, la troisième par la quatrième, la quatrième par la seconde, la troisième par la première, on obtiendra les formules de *Neper*, savoir :

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}c,$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}c.$$

Si l'on donne a, b, C, on trouvera A et B au moyen des deux premières *analogies*, puis c en faisant usage de la troisième ou de la quatrième. Si l'on donne, au contraire, c, A, B, les deux dernières analogies feront connaître a et b, puis l'une des deux premières donnera C.

Souvent, dans le *troisième cas*, on ne veut connaître que le côté c. On se sert alors de la formule

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Il faut rendre cette valeur calculable par logarithmes. On met $\cos a$ en facteur commun dans le second membre, et il vient

$$\cos c = \cos a\,(\cos b + \sin b \operatorname{tang} a \cos C);$$

posons

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} a \cos C.$$

Nous aurons

$$\cos c = \cos a\,(\cos b + \sin b \operatorname{tang}\varphi),$$

ou, en remplaçant $\operatorname{tang}\varphi$ par $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$,

$$\cos c = \frac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Si, dans le *quatrième cas*, on ne voulait connaître que l'angle C, on prendrait la formule

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,$$

d'où

$$\cos C = -\cos A\,(\cos B - \sin B \operatorname{tang} A \cos c).$$

Posons

$$\operatorname{tang} A \cos c = \cot \psi.$$

Il viendra

$$\cos C = -\cos A\,(\cos B - \sin B \cot \psi),$$

ou, en remplaçant $\cot\psi$ par $\dfrac{\cos\psi}{\sin\psi}$,

$$\cos C = \frac{-\cos A \sin(\psi - B)}{\sin\psi} = \frac{\cos A \sin(B-\psi)}{\sin\psi}.$$

Remarque. Comme les côtés et les angles du triangle sphérique considéré sont toujours supposés moindres que 180°, les quatre cas que nous venons d'examiner n'admettent jamais qu'une solution, et les deux derniers sont toujours possibles.

81. Cinquième et sixième cas. *On donne deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux ou deux angles et le côté opposé à l'un d'eux : on demande de calculer les éléments inconnus.*

Supposons qu'on donne a, b, A ou A, B, a. La relation (66)

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin a}$$

permettra de trouver l'inconnue B ou l'inconnue b.

Les inconnues C et c (communes aux deux cas) seront ensuite déterminées à l'aide de deux des formules de Neper. On aura, par exemple,

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}(A-B),$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b).$$

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que l'inconnue $\sin B$ ou $\sin b$ tombe entre 0 et 1 (puisque B ou b est inférieur à 180°).

Admettons que cette condition soit remplie. Les tables donneront pour B ou b deux valeurs supplémentaires l'une de l'autre. Il s'agit de voir quand ces valeurs sont toutes deux admissibles.

Remarquons que $\operatorname{tang}\frac{1}{2}C$ et $\operatorname{tang}\frac{1}{2}c$ doivent être positives. *Il faut donc que les différences* $A-B$ *et* $a-b$ *soient de même signe*, ce qui correspond au théorème suivant démontré en géométrie : *Dans tout triangle sphérique, à un plus grand angle est opposé un plus grand côté, et réciproquement*,

Si la dernière condition indiquée n'est pas remplie, *le triangle sera*

impossible. Si elle est remplie par l'une des valeurs de B ou de b, à cette valeur correspondra nécessairement *une solution*.

En effet, les formules employées conduiront alors pour C et c à deux valeurs comprises entre 0° et 180°, et ces valeurs seront précisément celles que donneraient les deux autres formules de Neper. Car ces deux formules

$$\tang \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cot \frac{1}{2}(A+B),$$

$$\tang \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} \tang \frac{1}{2}(a+b),$$

se déduisent immédiatement des deux analogies restantes, jointes à la relation

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin a}.$$

C'est ce que nous allons prouver. La relation

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin a}$$

revient à

$$\frac{\sin B + \sin A}{\sin B - \sin A} = \frac{\sin b + \sin a}{\sin b - \sin a}$$

ou à (27)

$$\frac{\tang \frac{1}{2}(A+B)}{\tang \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\tang \frac{1}{2}(a+b)}{\tang \frac{1}{2}(a-b)}.$$

On tire de cette dernière égalité

$$\cot \frac{1}{2}(A-B) = \frac{\tang \frac{1}{2}(a+b)}{\tang \frac{1}{2}(a-b)} \cot \frac{1}{2}(A+B),$$

$$\tang \frac{1}{2}(a-b) = \frac{\tang \frac{1}{2}(A-B)}{\tang \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \tang \frac{1}{2}(a+b).$$

Substituant ces valeurs dans les analogies

$$\tang \frac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cot \frac{1}{2}(A-B),$$

$$\tang \frac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} \cdot \tang \frac{1}{2}(a-b),$$

on retrouve évidemment les deux autres, savoir :

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}(A+B),$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b).$$

La première et la troisième analogie, jointes à la relation des quatre sinus, forment donc un système *équivalent* à la seconde et à la quatrième analogie jointes à cette même relation. Supposons qu'on donne a, b, A : on déterminera à l'aide du premier système les valeurs de B, C, c. Si l'on veut alors former un triangle avec les trois éléments a, b, C [ce qui est *toujours* possible (80)], le second système fera connaître les valeurs correspondantes des éléments restants A, B, c, qui seront précisément les valeurs qui satisfont déjà au premier système.

Il résulte de cette discussion que chaque valeur de B ou de b qui satisfait aux deux conditions posées (sin B *ou* sin b *positif et moindre que* 1, *les différences* A — B *et* $a-b$ *de même signe*); correspond nécessairement à un triangle et à un seul formé avec les éléments donnés. Le cinquième et le sixième cas admettront donc *une* ou *deux* solutions ou n'en admettront *aucune*. Ces cas portent le nom de *cas douteux*.

82. Pour ne rien laisser de côté relativement aux cas douteux, nous indiquerons encore une méthode de résolution plus simple, qui nous donnera d'ailleurs l'occasion d'appuyer sur la marche à suivre pour rendre calculables par logarithmes les formules de la trigonométrie sphérique, et qui nous permettra d'interpréter géométriquement les transformations employées.

CINQUIÈME CAS. *On donne* a, b, A, *on veut calculer* B, C, c.

On a

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}.$$

Le côté c et l'angle C seront donnés par les formules (64, 67)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\sin b \cot a = \cos b \cos C + \sin C \cot A.$$

Pour arriver à des valeurs de c et de C calculables par logarithmes, nous emploierons deux angles auxiliaires φ et ψ.

Posons

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} b \cos A.$$

Il viendra

$$\cos a = \cos b(\cos c + \sin c \operatorname{tang}\varphi) = \frac{\cos b \cos(c-\varphi)}{\cos\varphi},$$

d'où

$$\cos(c-\varphi) = \frac{\cos a \cos\varphi}{\cos b}.$$

Cette relation fera connaître $c-\varphi$ et, par suite, c.

Posons de même

$$\tang\psi = \frac{\cot A}{\cos b},$$

il viendra

$$\sin b \cot a = \cos b \cos C + \sin C \cos b \tang\psi,$$

d'où

$$\tang b \cot a = \cos C + \sin C \tang\psi = \frac{\cos(C-\psi)}{\cos\psi},$$

c'est-à-dire

$$\cos(C-\psi) = \tang b \cot a \cos\psi.$$

Cette relation fera connaître $C-\psi$ et, par suite, C.

Lorsque le problème sera possible, la valeur de $\sin B$ tombera entre 0 et 1, les valeurs de $\cos(c-\varphi)$ et de $\cos(C-\psi)$ tomberont entre $+1$ et -1.

On calculera d'abord les angles auxiliaires φ et ψ qu'on supposera compris entre 0° et 180°.

Les tables donneront alors pour B une valeur comprise entre 0° et 90°; puis, pour $c-\varphi$ et $C-\psi$ des valeurs l et L comprises entre 0° et 180°. Mais on satisfera aussi aux équations précédentes en remplaçant B par $180°-B$, et en prenant $-l$ et $-L$ à la place de l et de L. En effet, les sinus de deux arcs supplémentaires sont égaux et de même signe, les cosinus de deux arcs égaux et de signes contraires sont égaux et de même signe. Pour terminer, il faut montrer de quelle manière les doubles valeurs doivent être assemblées.

On a (67)

$$\sin c \cot b = \cos c \cos A + \sin A \cot B,$$

d'où

$$\sin c \cot b = \cos A (\cos c + \tang A \cot B).$$

De $\tang\varphi = \tang b \cos A$, on déduit

$$\cot b = \frac{\cos A}{\tang\varphi}$$

et, par suite,

$$\frac{\sin c}{\tang\varphi} = \cos c + \tang A \cot B;$$

c'est-à-dire, en remplaçant $\tang\varphi$ par $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ et en faisant passer $\cos c$ dans le premier membre,

$$\frac{\sin(c-\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\tang A}{\tang B}.$$

On a de même (65)

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b.$$

De $\tang\psi = \frac{\cot A}{\cos b}$, on déduit

$$\cos b = \frac{\cot A}{\tang\psi}.$$

d'où

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin C \cos A \cot \psi$$

ou

$$\cos B = -\cos A(\cos C - \sin C \cot\psi) = \frac{-\cos A \sin(\psi - C)}{\sin\psi},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sin(C-\psi)}{\sin\psi} = \frac{\cos B}{\cos A}.$$

Les signes des deux rapports $\frac{\tang A}{\tang B}$ et $\frac{\cos B}{\cos A}$ sont identiques, puisque A et B sont compris entre 0° et 180°. Les différences $c - \varphi$ et $C - \psi$ seront donc *ensemble* positives ou négatives. On prendra donc $+l$ avec $+L$ et $-l$ avec $-L$. On voit, de plus, que A et B sont de même espèce quand on prend les valeurs $+l$ et $+L$, et d'espèce différente quand on prend les valeurs $-l$ et $-L$.

Il n'y a d'ailleurs de solution possible qu'autant que les valeurs trouvées pour c et C sont moindres que 180°.

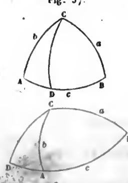


Fig. 37.

Interprétons *géométriquement* les valeurs des angles auxiliaires φ et ψ. Soit ABC (*fig.* 37) le triangle considéré. Partageons-le en deux triangles rectangles par l'arc CD abaissé perpendiculairement du sommet C sur le côté opposé AB.

Il est évident que la perpendiculaire CD tombera *en dedans* ou *en dehors* du triangle, suivant que les angles A et B seront *de même espèce* ou d'*espèce différente*; car les deux triangles rectangles DCA, DCB, exigent que la perpendiculaire CD soit *à la fois* de même espèce que les angles CAD et B qui lui sont opposés dans ces triangles (69).

Supposons le point D entre les points A et B. On aura, dans le triangle rectangle DCA,

$$\tang AD = \tang b \cos A \quad \text{et} \quad \cos b = \cot ACD \cot A.$$

La dernière relation revenant à

$$\tang ACD = \frac{\cot A}{\cos b},$$

on voit que l'arc AD représente précisément l'arc φ et que l'angle ACD représente l'angle auxiliaire ψ. L'arc BD est alors $c - \varphi$, et l'angle BCD $C - \psi$.

Supposons le point D à gauche du point A, le triangle rectangle DCA donnera

$$\tang AD = \tang b \cos(180° - A),$$

ce qui revient à

$$\tang(-AD) = \tang b \cos A;$$

$$\cos b = \cot . ACD . \cot(180° - A),$$

ce qui revient à

$$\tang(-ACD) = \frac{\cot A}{\cos b}.$$

L'arc AD et l'angle ACD représentent alors l'arc φ et l'angle auxiliaire ψ changés de signe. L'arc $BD = c + AD$ est donc encore $c - \varphi$, et l'angle $BCD = C + ACD$ est $C - \psi$.

Ceci posé, on peut ramener la résolution du triangle proposé à celle du triangle rectangle DCB. Si l'on désigne en effet la perpendiculaire CD par χ, le triangle rectangle DCA donnera

$$\operatorname{tang} \chi = \operatorname{tang} b \cos ACD.$$

On connaîtra donc dans le triangle DCB un côté CD et l'hypoténuse CB. On pourra par suite, à l'aide des formules démontrées précédemment (71), calculer l'angle B, le côté $BD = c - \varphi$ et l'angle $BCD = C - \psi$. Ayant trouvé d'abord φ et ψ, les éléments B, C et c, du triangle ABC seront complètement déterminés.

Sixième cas. On pourrait présenter pour le sixième cas une discussion analogue. Nous ne nous y arrêterons pas, puisqu'on peut, en se servant du triangle supplémentaire, ramener ce cas au précédent.

83. Nous terminerons ce paragraphe en donnant tous les éléments d'un triangle sphérique obliquangle, ainsi que les logarithmes correspondants.

$$a = 76°35'36'', \quad b = 50°10'30'', \quad c = 40°0'10''.$$

$\log \sin a = \bar{1},9880008$, $\log \sin b = \bar{1},8853636$, $\log \sin c = \bar{1},8080926$.

$\log \cos a = \bar{1},3652279$, $\log \cos b = \bar{1},8064817$, $\log \cos c = \bar{1},8842363$.

$\log \operatorname{tang} a = 0,6227729$, $\log \operatorname{tang} b = 0,0788819$, $\log \operatorname{tang} c = \bar{1},9238563$.

$$A = 121°36'19'',81, \quad B = 42°15'13'',66, \quad C = 34°15'2'',76.$$

$\log \sin A = \bar{1},9302747$, $\log \sin B = \bar{1},8276379$, $\log \sin C = \bar{1},7503664$.

$\log - \cos A = \bar{1},7193874$, $\log \cos B = \bar{1},8693336$, $\log \cos C = \bar{1},9172860$.

$\log - \operatorname{tang} A = 0,2108873$, $\log \operatorname{tang} B = \bar{1},9583043$, $\log \operatorname{tang} C = \bar{1},8330804$.

Expressions de l'aire d'un triangle sphérique.

84. Nous savons que l'aire d'un triangle sphérique est représentée par son excès sphérique, lorsqu'on prend pour unité d'aire le triangle trirectangle qui fait partie de la sphère considérée. Cherchons donc l'expression de cet excès sphérique, d'abord en fonction de deux côtés et de l'angle compris, puis en fonction des trois côtés.

Soient donnés a, b, C. Nous avons trouvé (79)

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta \sin\left(A - \frac{1}{2}\Delta\right)}{\sin\left(-\frac{1}{2}\Delta\right) \sin\left(C - \frac{1}{2}\Delta\right)}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta \sin\left(B - \frac{1}{2}\Delta\right)}{\sin\left(A - \frac{1}{2}\Delta\right) \sin\left(C - \frac{1}{2}\Delta\right)}}.$$

Multiplions ces égalités membre à membre, il viendra

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{tang}\frac{1}{2}b = \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta}{\sin\left(C-\frac{1}{2}\Delta\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta}{\sin C\cos\frac{1}{2}\Delta - \cos C\sin\frac{1}{2}\Delta} = \frac{1}{\sin C\cot\frac{1}{2}\Delta - \cos C}.$$

Par suite, en renversant, on aura

$$\cot\frac{1}{2}\Delta = \frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b + \cos C}{\sin C}.$$

On peut remarquer que, si l'angle C reste constant et si l'on fait varier les côtés a et b de manière que le produit $\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b$ demeure fixe, la surface du triangle ne changera pas.

Supposons maintenant qu'on connaisse les trois côtés a, b, c. Les formules de Delambre (80) nous donnent

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

On a

$$A + B + C - 180° = \Delta.$$

On en déduit

$$\frac{1}{2}(A+B) = 90° - \frac{1}{2}(C-\Delta).$$

Par suite,

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(C-\Delta)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(C-\Delta)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

La première relation revient à

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(C-\Delta) - \cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(C-\Delta) + \cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b) - \cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a-b) + \cos\frac{1}{2}c},$$

c'est-à-dire (27) à

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}\left(C-\frac{1}{2}\Delta\right)\sin\frac{1}{4}\Delta}{2\cos\frac{1}{2}\left(C-\frac{1}{2}\Delta\right)\cos\frac{1}{4}\Delta}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(p-b)\sin\frac{1}{2}(p-a)}{2\cos\frac{1}{2}(p-b)\cos\frac{1}{2}(p-a)}$$

ou

$$(1)\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(C-\frac{1}{2}\Delta\right)\operatorname{tang}\frac{1}{4}\Delta=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-b)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-a).$$

La seconde relation revient à

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C-\sin\frac{1}{2}(C-\Delta)}{\sin\frac{1}{2}C+\sin\frac{1}{2}(C-\Delta)}=\frac{\cos\frac{1}{2}c-\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c+\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

c'est-à-dire (27) à

$$\frac{2\sin\frac{1}{4}\Delta\cos\frac{1}{2}\left(C-\frac{1}{2}\Delta\right)}{2\sin\frac{1}{2}\left(C-\frac{1}{2}\Delta\right)\cos\frac{1}{4}\Delta}=\frac{2\sin\frac{1}{2}p\sin\frac{1}{2}(p-c)}{2\cos\frac{1}{2}p\cos\frac{1}{2}(p-c)}$$

ou

$$(2)\qquad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}\Delta}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(C-\frac{1}{2}\Delta\right)}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}p\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-c).$$

Si l'on multiplie membre à membre les égalités (1) et (2), on arrive à cette formule remarquable

$$\operatorname{tang}\frac{1}{4}\Delta=\sqrt{\operatorname{tang}\frac{1}{2}p\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-a)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-b)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-c)}.$$

85. Dans les développements précédents, on a supposé les côtés a, b, c donnés en degrés, minutes et secondes. Si l'on veut avoir leurs valeurs en mètres, on peut, comme nous l'avons déjà dit (63), recourir à la formule $l=\frac{\pi R n}{180}$ ou opérer comme il suit.

Soit R le rayon de la sphère exprimé en mètres; soit a'' le nombre de secondes du côté a. L'arc d'une seconde *sur la sphère donnée* aura pour expression *en mètres*, $R\sin 1''$ ($\sin 1''$ se confondant avec l'arc de $1''$ dans le cercle de rayon 1). Par suite, l'arc de a'' contiendra un nombre de mètres l qui sera donné par la formule

$$(1)\qquad l=Ra''\sin 1''.$$

Si l est connu, on aura inversement

$$a''=\frac{l}{R\sin 1''}.$$

Ceci posé, soient S l'aire d'un triangle sphérique exprimée en mètres carrés, Δ son excès sphérique, R le rayon de la sphère considérée ex-

primé en mètres. On aura (*Géom.*, 276) :

$$\frac{S}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{\Delta}{1^{dr}},$$

d'où

$$S = R^2 \Delta \cdot \frac{\pi}{2^{dr}}.$$

Si l'on exprime Δ et 2^{dr} en secondes, le rapport $\frac{\pi}{2^{dr}}$ sera égal à la longueur de l'arc de $1''$ dans le cercle de rayon 1. On pourra donc remplacer ce rapport par sin $1''$, et il viendra

(2) $$S = R^2 \Delta \sin 1''.$$

Si l'on considère la terre comme une sphère où un grand cercle a pour circonférence 40000000^M, l'arc d'une seconde sur cette circonférence sera égal à $\frac{20000000^M}{648000}$, c'est-à-dire à $\frac{10000^M}{324}$. On pourra donc, dans ce cas, remplacer R sin $1''$ par le rapport $\frac{10000}{324}$. Lorsqu'il s'agira d'applications géodésiques, les formules (1) et (2) deviendront donc

(1 *bis*) $$l = a'' \cdot \frac{10000}{324},$$

$$S = R\Delta \frac{10000}{324}.$$

On peut multiplier et diviser le second membre de la seconde égalité par sin $1''$. Il vient alors

(2 *bis*) $$S = \frac{\Delta}{\sin 1''} \cdot \left(\frac{10000}{324}\right)^2.$$

On a d'ailleurs

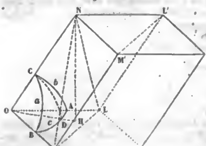
$$\log \sin 1'' = \bar{6},6855748668 \text{ et } \log \frac{1}{\sin 1''} = 5,3144251332.$$

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS.

86. *Trouver le volume d'un parallélipipède oblique en fonction de ses trois arêtes contiguës et des angles qu'elles font entre elles* (*fig.* 38).

Fig. 38.



Posons

$$OL = \lambda, \quad OM = \mu, \quad ON = \nu.$$

Supposons que le sommet O soit le centre d'une sphère ayant pour rayon l'unité. Les arêtes OL, OM, ON, détermineront par leurs intersections avec cette sphère un triangle sphérique ABC dont les côtés a, b, c, mesureront précisément les angles formés par les arêtes OL, OM, ON, considérées deux à deux.

L'aire du parallélogramme qui a pour côtés λ et μ est égale à

$$\lambda\mu \sin AOB = \lambda\mu \sin c.$$

Si l'on abaisse du sommet N sur la base la perpendiculaire NH, le triangle rectangle NHO donnera

$$NH = \nu \sin NOH.$$

Mais dans le triangle sphérique rectangle CDA, le côté de l'angle droit CD mesurera l'angle NOH, et l'on aura (68)

$$\sin NOH = \sin CD = \sin b \sin A.$$

Par suite, le volume du parallélipipède étant égal au produit de sa base par sa hauteur, on pourra poser, en désignant par V le volume cherché,

$$V = \lambda\mu\nu \sin b \sin c \sin A = 2\lambda\mu\nu \sin b \sin c \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A.$$

On a d'ailleurs (79) :

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}}, \quad \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}}.$$

Il viendra donc

$$V = 2\lambda\mu\nu \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}.$$

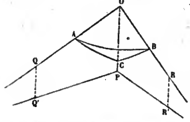
Le plan diagonal LML'M' partage le parallélipipède en deux prismes triangulaires équivalents. Or le tétraèdre OLMN formé sur les trois arêtes λ, μ, ν, peut être regardé comme ayant pour sommet N et pour base OLM : il est donc le tiers du prisme $\frac{V}{2}$ ou le sixième du parallélipipède V, de sorte que son volume v aura pour expression

$$v = \frac{\lambda\mu\nu}{3} \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}.$$

87. *Réduire un angle à l'horizon* (*fig.* 39).

Supposons que, d'un point O dans l'espace, on ait dirigé vers deux points Q et R les rayons visuels OQ, OR, et qu'on ait mesuré l'angle QOR. Il s'agit de calculer l'angle Q'PR', *projection* de l'angle QOR sur *le plan horizontal.*

Fig. 39.



On a en O un angle trièdre composé de l'angle QOR et des angles QOP, ROP, formés par les rayons visuels OQ, OR, avec *la verticale* OP. Admettons que le sommet O soit le centre d'une sphère ayant pour rayon l'unité. L'angle trièdre déterminera sur cette sphère un triangle sphérique ABC dont les côtés mesureront les faces de l'angle trièdre, et dont les angles seront égaux aux angles dièdres du trièdre. L'angle dièdre OP ou l'angle C du triangle

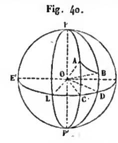
sphérique étant mesuré par l'angle Q'PR', la question est ramenée à résoudre le triangle ABC *dans lequel on connaît les trois côtés.*

On dirigera le calcul, comme il a été indiqué (79), de manière à obtenir immédiatement l'angle C, seul élément qu'on veuille déterminer; c'est-à-dire qu'on emploiera la formule

$$\tan g \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)}}.$$

88. *Trouver la distance de deux points de la surface terrestre, connaissant leurs longitudes et leurs latitudes* (*fig.* 40).

Fig. 40.



Soient PP' l'axe *polaire* et EE' *l'équateur;* soient A et B les deux points dont on veut mesurer la distance sur la surface de la terre. Supposons que PLP' soit le grand cercle ou le *méridien* à partir duquel on est convenu de compter les *longitudes*. La longitude du point A sera l'angle dièdre du méridien qui lui correspond, avec le méridien PLP'. Cet angle sera évidemment mesuré par l'arc LC intercepté sur l'équateur par les deux méridiens. De même, la longitude du point B sera mesurée par l'arc LD. La longitude est *orientale* ou *occidentale*, c'est-à-dire *positive* ou *négative*, suivant que le point considéré est à *l'est* ou à *l'ouest* du méridien choisi pour origine.

Quant à *la latitude* du point A, c'est l'angle AOC formé par le rayon OA (*verticale* du point A) avec l'équateur : cet angle est mesuré par l'arc AC qui va du point A à l'équateur, sur le méridien PAP'. De même, la latitude du point B sera mesurée par l'arc BD. La latitude est *boréale* ou *australe*, c'est-à-dire *positive* ou *négative*, suivant que le point considéré est situé dans l'hémisphère boréal ou austral.

Ceci posé, dans le triangle sphérique APB, on connaîtra l'angle P mesuré par l'arc CD, *différence* des deux longitudes données, et les deux côtés PA et PB qui comprennent cet angle, puisque ces deux côtés sont *les compléments* des latitudes données. On rentrera donc ainsi dans le *troisième cas* de la résolution des triangles sphériques obliquangles.

D'une manière générale, l'angle P est la différence ou la somme *arithmétique* des longitudes données, suivant qu'elles sont ou non *de même espèce* ou *de même signe*. De même, chacun des côtés PA et PB est égal à 90° *diminués* ou *augmentés* de la latitude du point correspondant, suivant que ce point est situé sur l'hémisphère *boréal* ou sur l'hémisphère *austral*.

Proposons-nous, comme exercice, de *calculer la distance de Paris à Rome.*

La longitude de Paris est.....	0°,
celle de Rome..............	$10°6'47'',2 = L'$.
La latitude de Paris est......	$48°50'49'' = \lambda$,
celle de Rome..............	$41°53'52'' = \lambda'$.

Nous ne cherchons que le troisième côté du triangle. En nous reportant

à la *figure* 39 et au n° 80, les formules à employer seront

$$\tang\varphi = \tang a \cos P,$$
$$\cos p = \frac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Calcul de φ.

$$\log\tang a = \log\tang(90^\circ - \lambda') = 0,0471210$$
$$\log\cos P = \log\cos L' = \bar{1},9931994$$
$$\log\tang\varphi = 0,0403204$$
$$\varphi = 47^\circ 39' 21'',2$$

Calcul de p.

$$\log\cos a = \log\cos(90^\circ - \lambda') = \bar{1},8246488$$
$$\log\cos(b-\varphi) = \log\cos(90^\circ - \lambda - \varphi) = \bar{1},9971969$$
$$\bar{L}\cos\varphi = 0,1716097$$
$$\log\cos p = \bar{1},9934554$$
$$p = 9^\circ 55' 18'',9$$

Si l'on veut avoir en mètres la longueur de p, on aura recours à la formule du n° 85 :

$$l^{M} = p''\cdot\frac{10000}{324}.$$

Si l'on veut avoir cette longueur en kilomètres, la formule sera

$$l^{KM} = p''\cdot\frac{10}{324}.$$

Calcul de l.

$$\log p'' = \log 35718,9 = 4,5528981$$
$$\log 10 = 1,0000000$$
$$\bar{L}.\,324 = \bar{3},4894550$$
$$\log l = 3,0423531$$
$$l = 1102,4.$$

Ainsi, la distance de Paris à Rome est d'environ 1102^{KM} ou d'environ 275 lieues métriques.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1° Résoudre un triangle sphérique avec les données suivantes :

$$\text{côté } a = 20^\circ 35' 22'',7,$$
$$\text{côté } b = 65^\circ 49' 35'',3,$$
$$\text{angle A (opposé au côté } a) = 22^\circ 40' 15'',5.$$

On déterminera l'erreur de l'angle B, en supposant que les données soient en erreur d'un dixième de seconde (*Concours de l'École Polytechnique*).

2° Dans un triangle sphérique ABC, on donne

$$a = 30°28'26'',7,$$
$$b = 91°39'54'',5,$$
$$C = 87°18'23'',9,$$

et l'on demande de calculer le côté c (*Concours de l'École Polytechnique*).

3° Dans un triangle sphérique équilatéral, on a

$$\cos A = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{\operatorname{tang} a}.$$

On déduit facilement de cette formule la valeur de l'angle dièdre d'un tétraèdre régulier.

4° Dans un triangle sphérique isocèle, on a les relations suivantes :

$$\sin \frac{1}{2} a = \sin b \sin \frac{1}{2} A,$$
$$\cos b = \cot B \cot \frac{1}{2} A,$$
$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \operatorname{tang} b \cos B,$$
$$\cos \frac{1}{2} A = \cos \frac{1}{2} a \sin B.$$

5° Chercher la valeur de l'angle dièdre : 1° de l'octaèdre régulier ; 2° de l'icosaèdre régulier ; 3° du dodécaèdre régulier.

COMPLÉMENT D'ALGÈBRE.

LIVRE PREMIER (*).

EXTENSION DU CALCUL ALGÉBRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

PROPOSITIONS SUR LES NOMBRES.

1. Nous avons pour but, dans ce chapitre, de compléter la connaissance des principes les plus élémentaires de la théorie des nombres, à l'exposition desquels nous avons déjà consacré le livre deuxième de l'*Arithmétique* (t. I). Nous commencerons par revenir rapidement sur quelques théorèmes déjà connus et relatifs aux diviseurs.

Des diviseurs des nombres.

2. Soit un nombre N dont la décomposition en facteurs premiers donne $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Nous savons qu'on obtiendra les diviseurs de ce nombre en combinant entre eux ses facteurs premiers de toutes les manières possibles. Il suit de là que ces diviseurs seront précisément les différents termes du produit

$$(1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha)(1 + b + b^2 \ldots + b^\beta)(1 + c + c^2 + \ldots + c^\gamma).$$

Il est évident d'ailleurs que les termes de ce produit ne pouvant éprouver aucune réduction, le *nombre* des diviseurs de N sera, en comptant N et l'unité,

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1).$$

Le produit indiqué représente la *somme* de tous les diviseurs. Cette somme est donc égale à (*Alg. élém.*, 38)

$$\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1}.$$

(*) Ce premier Livre doit être regardé comme le complément de l'Algèbre élémentaire (tome I). Plusieurs des théories qu'il renferme, bien que ne faisant plus partie des programmes d'admission, présentent de l'importance et de l'intérêt. C'est à ce titre que nous recommandons aux élèves studieux la lecture des chapitres qui traitent des fractions continues et de l'analyse indéterminée du premier degré.

On voit facilement que, suivant que N est ou n'est pas *carré parfait*, le nombre de ses diviseurs est *impair* ou *pair*. Car, si N est un carré, tous les exposants, α, β, γ, sont pairs; et si N n'est pas un carré, il faut que l'un au moins des exposants α, β, γ, soit impair.

Si l'on veut décomposer N en deux facteurs, on peut prendre chaque diviseur pour l'un des facteurs; mais c'est alors un autre diviseur qui est le second facteur. Les diviseurs se correspondant ainsi deux à deux, le nombre des décompositions possibles est égal à la moitié du nombre des diviseurs dans le cas où ce nombre est pair. Mais, lorsque ce nombre est impair, c'est-à-dire quand N est carré parfait, la racine carrée de N est un diviseur de N et se correspond à elle-même. Le nombre des décompositions est alors égal à la moitié du nombre des diviseurs augmenté de 1.

On peut imposer la condition que les deux facteurs employés soient premiers entre eux. Dans ce cas, les exposants ne jouent plus aucun rôle, et la réponse pour $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ doit être la même que pour $N = abc$. D'après ce qui précède, le nombre des décompositions possible serait $\frac{1}{2}(1+1)(1+1)(1+1)$; mais il faut remarquer qu'il y a exclusion pour la combinaison $1 \times N$; ce qui réduit le nombre cherché d'une unité. D'une manière générale, en désignant par m le nombre des facteurs premiers différents qui entrent dans N, le nombre demandé sera donc

$$\frac{1}{2} \cdot 2^m - 1 = 2^{m-1} - 1.$$

3. On peut demander *quelle est la plus haute puissance d'un nombre premier ρ, contenue dans le produit* $1.2.3.4.5\ldots\ n$.

Je divise n par ρ : soit n' le quotient entier obtenu. Le produit proposé renfermera les facteurs ρ, 2ρ, 3ρ, ..., $n'\rho$; et, puisque ρ est *premier*, ces facteurs seront les seuls du produit divisibles par ρ. La plus haute puissance demandée sera donc la même que celle qui divise le produit $1.2.3.4.5\ldots n'\rho^{n'}$.

On répétera le même raisonnement pour le produit $1.2.3.4.5\ldots. n'$, c'est-à-dire qu'on divisera n' par ρ : soit n'' le quotient entier obtenu. La question sera ramenée à chercher la plus haute puissance de ρ qui divise $1.2.3.4.5\ldots. n''$, puisque la plus haute puissance cherchée sera la même que celle qui divise le produit $1.2.3.4.5\ldots n''.\rho^{n'+n''}$.

On voit, sans qu'il soit besoin d'insister, la marche à suivre. On divisera successivement par ρ, n et les différents quotients entiers obtenus, jusqu'à ce qu'on en trouve un inférieur à ρ. La somme de tous les quotients obtenus, y compris le dernier, sera l'exposant dont ρ doit être affecté.

Il résulte de ce qu'on vient de dire que l'expression

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots.m}{1.2.3\ldots n \times 1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots q}$$

est toujours un nombre entier, si la condition

$$m = n + p + q$$

est remplie.

4. *Si p est un nombre premier par rapport à a, et si l'on divise par p*

les multiples successifs a, $2a$, $3a$, ..., $(p-1)a$, *tous les restes obtenus seront différents.*

Aucun reste ne pourra évidemment être o. Ceci posé, admettons que deux multiples ka, $k'a$, conduisent au même reste r. En désignant par q et q' les quotients entiers correspondants, on aurait

$$ka = qp + r, \quad k'a = q'p + r,$$

d'où

$$(k' - k)a = (q' - q)p.$$

p étant premier avec a, devrait alors diviser la différence $k' - k$ dont les deux termes sont inférieurs à p, ce qui est absurde.

Si l'on divise par p les multiples suivants pa, $(p+1)a$, $(p+2)a$, ..., la première division donnera un reste nul, et les autres conduiront aux restes déjà obtenus en divisant a, $2a$, $3a$, ..., par p. *Les restes considérés forment donc une série périodique, et l'un de ces restes est égal à* 1.

5. Théorème de Fermat. *Si p, nombre premier, ne divise pas a, p divise* $a^{p-1} - 1$.

Si l'on divise par p les multiples successifs a, $2a$, $3a$, ..., $(p-1)a$, on obtient des restes tous différents (4), c'est-à-dire, dans un certain ordre, les restes 1, 2, 3, ..., $(p-1)$. Si l'on multiplie membre à membre toutes les égalités représentatives des divisions effectuées, on aura évidemment (*Arithm.*, 84):

$$a.2a.3a\ldots(p-1)a = \text{mult.}\, p + 1.2.3\ldots(p-1),$$

c'est-à-dire

$$1.2.3\ldots(p-1)(a^{p-1} - 1) = \text{mult.}\, p.$$

p étant un nombre premier, doit forcément diviser le facteur $a^{p-1} - 1$.

6. Si p était *seulement* premier avec a, on ne considérerait que les multiples de a *moindres* que pa et *premiers* avec p. Dans ce cas, les restes obtenus, tous différents (4), sont aussi premiers avec p; car l'égalité

$$ka = qp + r$$

prouve que si p n'était pas premier avec r, il ne le serait pas avec ka, c'est-à-dire avec a.

En multipliant encore membre à membre toutes les égalités trouvées, et en désignant par R le produit de tous les restes et par v le nombre des multiples de a employés, on aura

$$Ra^v = \text{mult.}\, p + R;$$

car les restes r sont tous les nombres plus petits que p et premiers avec lui, et il en est de même des multiplicateurs de a, de sorte que le produit des restes et celui des multiplicateurs doivent être identiques. Il viendra donc

$$R(a^v - 1) = \text{mult.}\, p;$$

ce qui montre que, *lorsque p est seulement premier avec a sans être premier absolu, il divise* $a^v - 1$, v *étant le nombre des entiers moindres que p et premiers avec lui.*

Lorsque p est *premier*, on a $v = p - 1$, et l'on retombe sur le théorème de Fermat.

Réciproquement, si a^{p-1} est la plus faible puissance de a qui, divisée par p, donne pour reste 1, p est nécessairement premier, puisqu'il n'est divisible par aucun des entiers plus petits que lui.

Enfin, si p n'est pas premier avec a, il n'existe aucune puissance de a qui, divisée par p, donne 1 pour reste; car l'égalité $a^t = \text{mult.}\, p + 1$ est alors impossible.

7. Revenons au cas où p est premier avec a. Soit $a^{v'}$ la plus faible puissance de a qui, divisée par p, donne pour reste 1. Toutes les puissances *inférieures*, divisées par p, donneront des restes différents. Supposons en effet qu'on ait $m' > m$, $p > m'$, et qu'on puisse écrire

$$a^m = \text{mult.}\, p + r, \quad a^{m'} = \text{mult.}\, p + r,$$

on aurait

$$a^{m'} - a^m = a^m(a^{m'-m} - 1) = \text{mult.}\, p.$$

p devrait alors diviser $a^{m'-m} - 1$, ce qui est impossible, puisque $v' > m'$ est, par hypothèse, l'exposant de la plus faible puissance de a à laquelle corresponde le reste 1.

Il est clair que, le diviseur étant toujours p, $a^{v'+1}$ donne le même reste que a, $a^{v'+2}$ le même reste que $a^2, \ldots$. En d'autres termes, la série des restes est *périodique*.

En se reportant à ce qui précède (6), on peut ajouter que, puisque a^v donne 1 pour reste comme $a^{v'}$, v est en général un multiple de v'.

8. Théorème de Wilson. *Si p est un nombre premier, la somme $1.2.3\ldots(p-1)+1$ est divisible par p.*

Je considère la suite

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, (p-1).$$

Je prends un nombre *quelconque* a dans cette suite, et j'en forme les multiples

$$a,\ 2a,\ 3a, \ldots, (p-1)a.$$

Si l'on divise ces multiples par p, tous les restes obtenus seront différents, et l'un d'eux sera égal à 1 (4). Supposons qu'on ait

$$ka = \text{mult.}\, p + 1.$$

En général, k et a seront *différents*. Si l'on suppose $k = a$, il vient

$$a^2 = \text{mult.}\, p + 1 \quad \text{ou} \quad (a+1)(a-1) = \text{mult.}\, p.$$

p, *plus grand que* a, doit donc diviser $a+1$ ou $a-1$, c'est-à-dire qu'on aura $a - 1 = 0$ ou $a = 1$, ou bien $a + 1 = p$ ou $a = p - 1$.

Maintenant, *pour toute autre valeur de a*, on aura une valeur correspondante et inégale de k, qui satisfera à la relation

$$ka = \text{mult.}\, p + 1.$$

Mais si l'on substitue à a [qui est un terme quelconque de la série $2.3.4\ldots(p-2)$, puisque nous écartons les valeurs 1 et $(p-1)$] cette valeur de k, a prendra nécessairement la place du multiplicateur k. Il en résulte que les termes de la suite $2.3.4\ldots(p-2)$ peuvent être *réunis deux à deux*, de manière que les produits obtenus, divisés par p, donnent 1 pour reste. En multipliant membre à membre toutes les égalités

représentatives de ces divisions, on arrivera donc finalement à

$$2.3.4\ldots(p-2) = \text{mult.}\, p + 1.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette dernière égalité par $p-1$, il vient

$$2.3.4\ldots(p-1) = \text{mult.}\, p - 1 \quad \text{ou} \quad 1.2.3.4\ldots(p-1)+1 = \text{mult.}\, p.$$

Si p n'était pas premier, ses diviseurs se retrouveraient nécessairement dans la suite $1.2.3\ldots(p-1)$, et ne pourraient diviser cette même suite augmentée de 1. Il en serait donc de même de p.

Caractères de divisibilité.

9. Soit N un nombre entier écrit dans le système dont la *base* est a. Partageons ce nombre en *tranches* de m chiffres à partir de la droite et en remontant vers la gauche, de sorte que la dernière tranche à gauche pourra avoir moins de m chiffres. Désignons par A, B, C, D, ... les valeurs *absolues* des tranches obtenues. On pourra évidemment écrire N des trois manières suivantes :

$$N = a^m[\ldots + Da^{2m} + Ca^m + B] + A,$$
$$N = \ldots + D(a^{3m}-1) + C(a^{2m}-1) + B(a^m-1) + [A+B+C+D+\ldots],$$
$$N = \ldots + D(a^{3m}+1) + C(a^{2m}-1) + B(a^m+1)$$
$$+ [(A+C+\ldots) - (B+D+\ldots)].$$

L'examen de ces différentes formes conduit à trois théorèmes généraux dont nous n'avons vu que des applications particulières en Arithmétique, et que nous allons énoncer successivement.

10. Première forme. Tout diviseur de a^m divise un multiple de a^m. Donc, *pour qu'un nombre soit divisible par un diviseur quelconque de la* $n^{ième}$ *puissance de la base du système de numération adopté, il faut et il suffit que la dernière tranche de m chiffres sur la droite admette ce diviseur.*

Deuxième forme. On sait d'une manière générale que $a^{mx}-1$ est divisible par a^m-1, x étant un entier positif quelconque (*Alg. élém.*, 38, 5°). Par suite, *pour qu'un nombre soit divisible par un diviseur de la* $m^{ième}$ *puissance de la base, diminuée de* 1, *il faut et il suffit que la somme des nombres obtenus en partageant le nombre proposé en tranches de m chiffres, admette ce diviseur.*

Troisième forme. Enfin, $a^{mx}+1$ est divisible par a^m+1 quand x est *impair*; $a^{mx}-1$ est divisible par a^m+1 quand x est *pair* (*Alg. élém.*, 38, 5°). Donc, *pour qu'un nombre soit divisible par un diviseur de la* $m^{ième}$ *puissance de la base, augmentée de* 1, *il faut et il suffit, ce nombre ayant été partagé, comme nous l'avons dit, en tranches de m chiffres, que l'excès de la somme des tranches de rang impair sur la somme des tranches de rang pair, admette le diviseur considéré.*

11. Pour les nombres premiers avec la base, il faudra chercher quelle est la plus petite puissance de cette base qui conduit au reste 1 (7).

Si l'on opère dans le système décimal, on trouvera, par exemple, que

que 10^7, divisé par 11, donne pour reste 1, et l'on en déduira une nouvelle marche pour arriver au reste d'une division par 11. Cette marche consistera à partager le nombre donné en tranches de *deux* chiffres, et à voir si la *somme* de ces tranches (à laquelle on pourra faire subir la même décomposition) est divisible par 11.

On pourra employer une méthode analogue relativement aux diviseurs 7, 13, 37; mais il n'y a ici d'important à remarquer que la loi générale.

CHAPITRE II.

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÉBRIQUE.

12. Une quantité *entière* est une quantité qui ne renferme ni dénominateurs, ni radicaux.

Une quantité *première* est, en algèbre comme en arithmétique, une quantité qui n'est divisible que par elle-même et par l'unité.

Deux quantités sont *premières entre elles,* lorsqu'elles n'admettent d'autre diviseur commun que l'unité.

Une quantité entière qui n'est pas première, est un produit de facteurs premiers.

Toute la théorie des quantités premières algébriquement repose sur la proposition suivante, qui a été établie pour la première fois par *M. Lefébure de Fourcy* (voir ses *Leçons d'Algèbre*).

13. *Toute quantité première* P *qui divise le produit de deux quantités entières* A *et* B, *doit diviser l'une d'elles.*

Nous supposerons d'abord que les quantités données ne contiennent pas plus d'une lettre.

1° A *est fonction de la lettre principale* x, B *et* P *sont des nombres.*

Je dis que si P qui divise AB ne divise pas B, il divisera A. Soit $A = ax^m + bx^n + \ldots$. $a, b, \ldots$, sont des nombres entiers positifs ou négatifs; $m, n, \ldots$, sont entiers et positifs. On aura

$$AB = Bax^m + Bbx^n + \ldots.$$

P devra diviser le second membre de cette égalité et, par suite, tous les coefficients Ba, Bb, ... (*Alg. élém.*, 32, *Nota*). Si P est premier avec B, il divisera donc chacun des coefficients $a, b, \ldots$, c'est-à-dire il divisera A.

2° A *et* B *sont fonctions de* x, P *est un nombre.*

Admettons pour un instant que P divisant AB, ne divise ni A ni B. Soient A' l'ensemble des termes de A dont les coefficients sont multiples de P, et A″ l'ensemble des autres termes. Décomposons de même B en deux parties B' et B″. On aura

$$AB = (A' + A'')(B' + B'') = A'B' + A''B' + A'B'' + A''B''.$$

Les trois premières parties du second membre étant divisibles par P, la quatrième A″B″ doit l'être. Représentons par ax^α et bx^β les termes de

A'' et de B'' du degré le plus élevé par rapport à x. Le premier terme du produit $A''B''$ sera nécessairement $abx^{\alpha+\beta}$. P devrait donc diviser ab; mais P ne divisant par hypothèse aucun des coefficients des termes qui composent A'' et B'', est premier avec a et avec b et, par suite, avec ab. Donc, si P ne divise ni A ni B, il ne peut pas diviser AB.

3° A *et* P *sont fonctions de* x, B *est un nombre.*

Si P divise AB, soit Q le quotient entier de cette division. On aura

$$AB = PQ.$$

Décomposons le nombre B en ses facteurs premiers. Les facteurs premiers de B devront diviser le produit PQ. Or P est une quantité première fonction de x, c'est-à-dire n'est divisible par aucun nombre. Donc (2°) tous les facteurs premiers de B devront diviser successivement Q et les quotients trouvés en opérant ses divisions. On finira donc par arriver à

$$A = Pq,$$

en désignant par q le dernier quotient obtenu; ce qui prouve que, dans le cas considéré, A est un multiple de P.

4° A, B, P, *sont fonctions de* x.

P divisant AB, sans diviser A, je dis qu'il divisera B. Si A est d'un degré plus élevé en x, divisons A par P. Dans le cas contraire, on diviserait P par A, la suite des raisonnements resterait la même. Il peut arriver qu'avant de parvenir au reste de l'opération, on soit obligé d'employer des coefficients fractionnaires. Désignons par M le dénominateur commun de tous les termes du quotient Q et du reste R. On pourra écrire

$$(1) \qquad A = P.\frac{Q}{M} + \frac{R}{M}, \quad \text{d'où} \quad MA = PQ + R.$$

On peut donc éviter les coefficients fractionnaires, en multipliant d'avance le dividende par M. R ne peut pas être nul, car P diviserait alors MA, c'est-à-dire A (3°).

Multiplions les deux membres de l'égalité (1) par B, puis divisons-les par P. Il viendra

$$M.\frac{AB}{P} = BQ + \frac{RB}{P}.$$

AB *étant divisible par* P, RB *le sera*. Supposons que R ne soit pas un nombre et divisons P par R. Soit M' le multiplicateur à employer pour éviter les coefficients fractionnaires. Il viendra

$$(2) \qquad M'P = RQ' + R'.$$

Le reste R' ne pourra pas être nul; sans quoi, P divisible par R (3°) ne serait plus une quantité première. Multiplions par B les deux membres de l'égalité (2), puis divisons-les par P. Il viendra

$$M'B = \frac{RB}{P}Q' + \frac{R'B}{P},$$

RB *étant divisible par* P, R'B *le sera*.

On poursuivra le calcul de la même manière, en divisant P par R'. On obtiendra donc une série de restes R, R', R'', ..., dont le degré par rap-

port à x ira toujours en diminuant et dont aucun ne pourra être nul. On parviendra ainsi forcément à un reste *numérique* r, et le produit rB, comme tous les produits précédents RB, R'B, R''B,.... sera divisible par P. Dès lors (3°), B sera multiple de P.

14. De même que les démonstrations précédentes s'appuient sur le théorème d'arithmétique correspondant (*Arithm.*, 107), de même les cas où A, B, P, ne renferment qu'une seule lettre, serviront à prouver la proposition générale énoncée, lorsque ces quantités pourront contenir *deux* lettres au plus. Du cas de deux lettres on pourra ensuite s'élever au cas de *trois* lettres, etc. On doit donc regarder comme établi le théorème fondamental qu'on voulait démontrer.

Tous les théorèmes qui découlent en arithmétique du théorème correspondant (108, 109, 110), sont donc vrais algébriquement. En particulier, *la décomposition d'une quantité entière en facteurs premiers ne peut avoir lieu que d'une seule manière.*

Supposons que les produits de facteurs premiers ABCD... et *abcd*... soient identiques. On aura

$$ABCD\ldots = abcd\ldots$$

a, facteur premier, devra diviser ABCD... Mais A, B,..., étant des facteurs premiers, si a n'est égal à aucun d'entre eux, la division ne sera pas possible. En effet, a ne divisant ni A ni B, ne pourra pas diviser AB; ne divisant ni AB ni C, il ne pourra pas diviser ABC, etc. On voit que la démonstration est identique à celle donnée en Arithmétique (113).

15. Nous avons déjà dit (*Alg. élém.*, 40) que, pour réduire un rapport algébrique à sa plus simple expression, il fallait rendre ses deux termes *premiers entre eux*. Pour y arriver, lorsque les termes du rapport sont des polynômes, il faut exécuter une série d'opérations analogues à celles qui conduisent au plus grand commun diviseur de deux nombres.

Nous considérerons les termes du rapport proposé $\frac{A}{B}$ comme des polynômes entiers et rationnels, et nous dirons que le plus grand commun diviseur des deux polynômes A et B est une expression qui les divise exactement tous les deux, de manière que les quotients obtenus soient premiers entre eux; ce qui revient à définir ce plus grand commun diviseur : *le produit de tous les facteurs premiers communs aux deux polynômes*, ces facteurs pouvant être numériques, monômes ou polynômes.

16. *Si* B *divise exactement* A, B *sera le plus grand commun diviseur cherché.*

Si B *ne divise pas* A, *le plus grand commun diviseur entre* A *et* B *sera le même que celui qui existe entre* B *et* R, *reste de la division effectuée.*

Soient

$$A = BQ + R,$$

et D un diviseur quelconque de A et de B. On aura

$$A = MD \quad \text{et} \quad B = ND.$$

Il viendra donc

$$M = NQ + \frac{R}{D},$$

égalité qui exige que R soit de la forme PD; d'où

$$M = NQ + P.$$

Si D est maintenant le plus grand commun diviseur cherché, M et N seront premiers entre eux; il faudra donc que les quotients N et P soient aussi premiers entre eux. Et dès lors, le plus grand commun diviseur entre A et B sera le même qu'entre B et R (15).

17. On peut, sans changer le plus grand commun diviseur entre A et B, multiplier ou diviser A, par exemple, par une quantité entière quelconque, *pourvu que cette quantité soit première avec* B. En effet, on ne modifie pas ainsi les facteurs premiers communs à A et à B, qui seuls composent le plus grand commun diviseur cherché. C'est en s'appuyant sur cette remarque qu'on pourra éviter, dans le courant des opérations à effectuer, les coefficients fractionnaires : *condition essentielle* pour l'exactitude du raisonnement présenté au n° 16.

18. Exposons à présent la recherche pratique du plus grand commun diviseur.

Soit à réduire à sa plus simple expression la fraction

$$\frac{14x^3 - 17x^2 + 8x + 4}{10x^4 - 11x^3 + 2x^2 + 7x - 2}.$$

Nous chercherons d'abord si les polynômes proposés qui ne contiennent qu'*une* lettre admettent un plus grand commun diviseur monôme. S'il en est ainsi, on les divisera par ce plus grand commun diviseur, et l'on mettra à part le facteur supprimé pour le joindre, à la fin de l'opération, au plus grand commun diviseur polynôme. Dans l'exemple proposé, il n'existe pas de plus grand commun diviseur monôme, et nous appliquerons immédiatement la méthode indiquée (16) en divisant le dénominateur de la fraction par son numérateur.

PREMIÈRE DIVISION.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
10x^4 & -11x^3 & +2x^2 & +7x & -2 & 14x^3 - 17x^2 + 8x + 4 \\ \cline{6-6}
70x^4 & -77x^3 & +14x^2 & +49x & -14 & 5x + 4 \\
 & +85x^3 & -40x^2 & -20x & & \\ \cline{2-5}
 & +8x^3 & -26x^2 & +29x & -14 & \\
 & 56x^3 & -182x^2 & +203x & -98 & \\
 & & +68x^2 & -32x & -16 & \\ \cline{3-5}
 & & -114x^2 & +171x & -114 & \\
 & & -2x^2 & +3x & -2 &
\end{array}$$

DEUXIÈME DIVISION.

$$\begin{array}{rrrr|l}
14x^3 & -17x^2 & +8x & +4 & -2x^2 + 3x - 2 \\ \cline{5-5}
 & +21x^2 & -14x & & -7x - 2 \\ \cline{2-4}
 & +4x^2 & -6x & +4 & \\
 & & +6x & -4 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Le premier terme du dividende n'étant pas divisible par le premier terme du diviseur, on multipliera immédiatement tout le dividende par 7

pour éviter les coefficients fractionnaires (17). De même, le premier reste devra aussi être multiplié par 7. Enfin, le dernier reste de la première division présente le facteur commun 57, qu'on aura soin de supprimer. La seconde division s'effectue sans l'emploi ou la suppression d'aucun facteur, et comme on arrive à un reste nul, $-2x^2+3x-2$ est le plus grand commun diviseur cherché. La fraction proposée réduite à sa plus simple expression est alors

$$\frac{7x+2}{5x^2+2x-1}.$$

19. Si l'on a plus de deux polynômes contenant une seule lettre, on suivra la même marche qu'en arithmétique (*Arithm.*, 98, *Note*).

20. Passons au cas où les deux polynômes considérés A et B contiendraient *deux* lettres, x et y par exemple. On les ordonnera par rapport aux puissances décroissantes de x. On cherchera le plus grand commun diviseur d des coefficients de A, qui seront des polynômes en y, et de même le plus grand commun diviseur d_1, des coefficients de B; de sorte qu'on pourra écrire

$$A = dA', \quad B = d_1B'.$$

On cherchera à part le plus grand commun diviseur δ des polynômes d et d_1 qui renferment seulement y (19); puis, le plus grand commun diviseur D des polynômes A' et B' qui renferment x et y. On pourra évidemment traiter les coefficients en y de ces polynômes, toujours ordonnés par rapport à x, comme on a traité dans l'exemple précédent les coefficients numériques; car les polynômes A' et B' ne présentent plus aucun facteur commun en y. Le plus grand commun diviseur cherché sera égal au produit δD.

21. Soit à réduire à sa plus simple expression la fraction

$$\frac{45yx^3+3y^2x^2-9y^3x+6y^4}{54yx^2-24y^3}.$$

Les deux polynômes considérés admettent ici $3y$ comme facteur commun monôme : on commencera donc par supprimer ce facteur. Il restera d'une part

$$15x^3+yx^2-3y^2x+2y^3 \quad \text{et, de l'autre,} \quad 18x^2-8y^2.$$

On supprimera le facteur 2 commun aux termes du diviseur qui deviendra $9x^2-4y^2$. Dans cet exemple, on a

$$d = 3y, \quad d_1 = 6y, \quad \delta = 3y.$$

Il reste à chercher le plus grand commun diviseur des polynômes

$$A' = 15x^3+yx^2-3y^2x+2y^3, \quad B' = 9x^2-4y^2.$$

On effectuera les divisions successives en prenant les précautions déjà indiquées.

PREMIÈRE DIVISION.

$$\begin{array}{l|l} 15x^3 + yx^2 - 3y^2x + 2y^3 & 9x^2 - 4y^2 \\ 45x^3 + 3yx^2 - 9y^2x + 6y^3 & \overline{5x + y} \\ \qquad + 20y^2x & \\ \hline + 3yx^2 + 11y^2x & \\ \quad 9yx^2 + 33y^2x + 18y^3 & \\ \qquad\qquad\qquad + 4y^3 & \\ \hline \qquad 33y^2x + 22y^3 & \\ \qquad\quad 3x + 2y & \end{array}$$

DEUXIÈME DIVISION.

$$\begin{array}{l|l} 9x^2 - 4y^2 & 3x + 2y \\ -6xy & \overline{3x - 2y} \\ \hline \quad +4y^2 & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

On doit diviser le dernier reste de la première division par $11y^2$, de sorte que le nouveau diviseur à employer est $3x + 2y$. Comme ce nouveau diviseur correspond à un reste nul, le plus grand commun diviseur cherché est $3y(3x + 2y)$ ou $9yx + 6y^2$, et la fraction proposée a pour plus simple expression

$$\frac{5x^2 - 3yx + y^2}{6x - 4y}.$$

22. On voit sans peine quelle marche il faudrait suivre dans le cas où les polynômes proposés renfermeraient plus de *deux* lettres.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES.

Définitions.

23. S'il s'agit de trouver une valeur approchée d'un nombre N, le plus simple sera d'indiquer sa partie entière a. On pourra alors écrire, en supposant y plus grand que 1,

$$N = a + \frac{1}{y}.$$

On pourra évaluer la partie entière b de y et poser

$$y = b + \frac{1}{z},$$

en supposant z plus grand que 1. On pourra de même, c étant la partie entière de z et u étant une quantité plus grande que 1, poser

$$z = c + \frac{1}{u}.$$

d étant la partie entière de u et v représentant une quantité plus grande

que 1, on aura

$$u = d + \frac{1}{v}.$$

En remplaçant, dans l'expression de N, y, z, u, par leurs valeurs, il viendra

$$(1) \qquad N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \frac{1}{v}}}},$$

et l'on pourra continuer ainsi jusqu'à ce que l'un des nombres y, z, u, v, ..., se trouve entier. On dira alors qu'on a obtenu le développement exact de N en *fraction continue*.

Si l'opération indiquée se poursuit sans amener aucun résultat entier, l'égalité (1) reste toujours exacte. Mais si l'on néglige l'une des fractions successivement obtenues, $\frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \ldots$, cette égalité devient *approximative*, et l'on obtient pour N une série de *valeurs approchées* qu'on appelle des *réduites*. Les nombres b, c, d, ..., qui sont les parties entières des dénominateurs successifs y, z, u, ..., sont des *quotients incomplets*, tandis que ces dénominateurs y, z, u, ..., sont des *quotients complets*. On dit encore que les fractions $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \ldots$, sont des *fractions intégrantes*.

24. *Tout nombre commensurable correspond à une fraction continue limitée, toute fraction continue limitée représente un nombre commensurable.*

Soit un nombre commensurable $\frac{A}{B}$. Je divise A par B : soient a le quotient et r le reste. On aura

$$\frac{A}{B} = a + \frac{r}{B} = a + \frac{1}{\left(\frac{B}{r}\right)}.$$

Je divise B par r : soient b le quotient et r' le reste. On aura

$$\frac{B}{r} = b + \frac{r'}{r} = b + \frac{1}{\left(\frac{r}{r'}\right)}.$$

On sera donc conduit à diviser r par r', et l'on voit sans peine que les opérations à effectuer sont précisément celles qu'on doit faire pour chercher le plus grand commun diviseur des nombres entiers A et B. Par suite, on arrivera à un reste nul, c'est-à-dire que le nombre des termes de la fraction continue cherchée est nécessairement limité.

Les quotients fournis par l'opération du plus grand commun diviseur sont les différents quotients incomplets b, c, d, ..., et les fractions intégrantes sont alors les inverses de ces quotients ou $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \ldots$.

La réciproque de cette proposition est évidente. Par conséquent, *tout*

nombre incommensurable donne lieu à une fraction continue indéfiniment prolongée. Nous en verrons plus loin un exemple.

25. *Les réduites sont alternativement plus petites et plus grandes que la fraction continue : les réduites de rang impair sont moindres, les réduites de rang pair sont plus grandes.*

La première réduite est a et, comme on néglige la partie fractionnaire $\frac{1}{y}$, elle est moindre que N. La seconde réduite est $a+\frac{1}{b}$, et comme b est moindre que y, $\frac{1}{b}$ l'emporte sur $\frac{1}{y}$, c'est-à-dire que la seconde réduite est plus grande que N. La troisième réduite est $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$, et comme $\frac{1}{c}$ est plus grand que $\frac{1}{z}$, $b+\frac{1}{c}$ est plus grand que y, et la troisième réduite est moindre que N. Le même raisonnement se poursuit indéfiniment.

Il en résulte que *chaque réduite est comprise entre les deux précédentes.* En effet, une réduite quelconque représente elle-même une fraction continue dont la valeur, d'après ce qu'on vient de dire, tombe entre deux réduites précédentes consécutives.

Par conséquent, si l'on s'arrête à une réduite de rang pair, comme elle est plus grande que la réduite précédente de rang impair, elle est plus petite que la réduite précédente de rang pair. Donc, *les réduites de rang pair vont en diminuant.* Si l'on s'arrête à une réduite de rang impair, comme elle est plus petite que la réduite précédente de rang pair, elle est plus grande que la réduite précédente de rang impair. Donc, *les réduites de rang impair vont en augmentant.* Et alors, à mesure qu'on avance, l'intervalle entre deux réduites consécutives allant se resserrant, on approche de plus en plus de la valeur de la fraction continue.

Loi de formation des réduites.

26. Soit

$$X = a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots}}}$$

On a, pour les quatre premières réduites,

$$a=\frac{a}{1},$$

$$a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b},$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{abc+c+a}{bc+1},$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}.$$

On voit que, pour ces quatre réduites, la troisième et la quatrième s'obtiennent en multipliant les deux termes de la réduite précédente par le quotient incomplet auquel on s'arrête, et en ajoutant terme à terme le résultat obtenu et la réduite qui précède de deux rangs. Il faut faire voir que cette loi est générale.

Soient trois réduites consécutives $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$, pour lesquelles la loi se trouve vérifiée. Soit l le dernier quotient incomplet employé. On aura, par hypothèse,

$$\frac{R}{R'} = \frac{Ql+P}{Q'l+P'}.$$

Mais si l'on avait voulu passer immédiatement de la réduite $\frac{Q}{Q'}$ à la réduite $\frac{S}{S'}$ qui suit la réduite $\frac{R}{R'}$, il aurait fallu, m étant le quotient incomplet qui vient après l, remplacer dans le calcul qui donne $\frac{R}{R'}$, l par $l+\frac{1}{m}$. On aura donc

$$\frac{S}{S'} = \frac{Q\left(l+\frac{1}{m}\right)+P}{Q'\left(l+\frac{1}{m}\right)+P'} = \frac{(Q\,l+P)\,m+Q}{(Q'l+P')\,m+Q'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{S}{S'} = \frac{R\,m+Q}{R'm+Q'},$$

résultat conforme à la loi supposée.

27. *Remarque.* On peut remplacer m par le quotient complet correspondant que nous désignerons par t; et l'on obtiendra alors cette expression de la valeur de la fraction continue

$$X = \frac{R\,t+Q}{R't+Q'}.$$

Propriétés des réduites.

28. *La différence de deux réduites consécutives est représentée par une fraction dont le numérateur est l'unité, et le dénominateur, le produit des dénominateurs des réduites considérées.*

Soient toujours $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$, trois réduites consécutives, et

$$\frac{R}{R'} = \frac{Q\,l+P}{Q'l+P'}.$$

On aura

$$\frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'} = \frac{QP'-PQ'}{P'Q'},$$

en même temps que

$$\frac{R}{R'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{Q\,l+P}{Q'l+P'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{PQ'-QP'}{Q'(Q'l+P')} = \frac{PQ'-QP'}{Q'R'}.$$

Au signe près, les deux différences obtenues ont même numérateur ; et, comme il s'agit de trois réduites consécutives quelconques, on peut dire alors que le numérateur de la différence de deux réduites consécutives quelconques est *constant*. Pour trouver la valeur de ce numérateur, on considérera les deux premières réduites qui donnent

$$\frac{ab+1}{b}-\frac{a}{1}=\frac{1}{b}.$$

Le théorème énoncé est donc démontré.

On voit par là que, les dénominateurs des réduites formant comme leurs numérateurs une suite indéfiniment croissante, et deux réduites consécutives comprenant la valeur de la fraction continue, on pourra approcher de cette valeur autant qu'on voudra. De plus, *l'erreur commise en s'arrêtant à un certain quotient incomplet est toujours moindre que l'unité divisée par le produit des dénominateurs des deux dernières réduites considérées.*

29. *Remarque.* Soit la quantité X exprimée en fraction continue. Représentons les réduites successives par $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}, \ldots$ Nous aurons (28),

$$\frac{B}{B'}-\frac{A}{A'}=\frac{1}{A'B'},\quad \frac{C}{C'}-\frac{B}{B'}=-\frac{1}{B'C'},\quad \frac{D}{D'}-\frac{C}{C'}=\frac{1}{C'D'},\ldots$$

Si nous désignons par $\frac{U}{U'}$ la dernière réduite considérée et par $\frac{V}{V'}$ la précédente, nous aurons de même

$$\frac{U}{U'}-\frac{V}{V'}=\frac{\pm 1}{V'U'}.$$

Ajoutons membre à membre toutes les égalités posées, et simplifions. Il restera évidemment

$$\frac{U}{U'}=\frac{A}{A'}+\frac{1}{A'B'}-\frac{1}{B'C'}+\frac{1}{C'D'}-\ldots\frac{\pm 1}{V'U'}.$$

Nous aurons ainsi le développement de la valeur exacte de X quand $\frac{U}{U'}$ sera la dernière réduite, et une expression approchée de X quand il s'agira d'un nombre incommensurable.

30. *Les réduites sont des fractions irréductibles.*

En effet, puisqu'on a d'une manière générale (28)

$$PQ'-QP'=\pm 1,$$

il ne peut exister entre P et P' aucun facteur commun, non plus qu'entre Q et Q'. Il ne peut même en exister aucun entre P et Q ou entre P' et Q'.

31. *De deux réduites consécutives, la plus avancée est celle qui approche le plus de la valeur de la fraction continue.*

Comparons à chacune des réduites $\frac{Q}{Q'}, \frac{R}{R'}$, la valeur X de la fraction

continue (27). Nous aurons

$$\frac{Rt+Q}{R't+Q'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{RQ't-QR't}{Q'(R't+Q')},$$

$$\frac{Rt+Q}{R't+Q'}-\frac{R}{R'}=\frac{QR'-RQ'}{R'(R't+Q')}.$$

Mais on a (28)

$$RQ'-QR'=\pm 1,\quad QR'-RQ'=1,$$

d'où

$$X-\frac{Q}{Q'}=\frac{\pm t}{Q'(R't+Q')},\qquad X-\frac{R}{R'}=\frac{\mp 1}{R'(R't+Q')}.$$

Les deux résultats obtenus sont de signes contraires, et t étant au moins égal à 1 en même temps que Q' est $< R'$, le premier résultat est le plus grand en valeur absolue. $\frac{R}{R'}$ approche donc plus de X que $\frac{Q}{Q'}$.

32. Il est bon de remarquer que, le quotient complet t étant compris entre m et $m+1$, puisque m dernier quotient incomplet considéré, représente la partie entière de t; on a en valeur absolue

$$X-\frac{R}{R'}<\frac{1}{R'(R'm+Q')}\qquad\text{ou}\qquad X-\frac{R}{R'}<\frac{1}{R'S'}$$

et

$$X-\frac{R}{R'}>\frac{1}{R'(R'm+R'+Q')}\qquad\text{ou}\qquad X-\frac{R}{R'}>\frac{1}{R'(R'+S')}:$$

ce qui donne deux limites simples de l'erreur commise en remplaçant la fraction continue par une de ses réduites.

33. *Un nombre* K *ne peut approcher plus qu'une réduite* $\frac{R}{R'}$ *de la valeur* X *de la fraction continue, sans être compris entre cette réduite et la réduite précédente* $\frac{Q}{Q'}$.

En effet, K devra à plus forte raison approcher plus que $\frac{Q}{Q'}$ (31) de la valeur de la fraction, et dès lors, puisque X tombe entre $\frac{Q}{Q'}$ et $\frac{R}{R'}$ (25), il faudra que K tombe entre ces mêmes réduites.

34. *Une réduite quelconque approche plus de la fraction continue que toute autre fraction dont les termes seraient plus simples.*

Soit $\frac{C}{D}$ une fraction qui approche plus de X que la réduite $\frac{R}{R'}$. Il faudra, d'après ce qu'on vient de dire, que $\frac{C}{D}$ tombe entre $\frac{Q}{Q'}$ et $\frac{R}{R'}$. La différence $\frac{C}{D}-\frac{Q}{Q'}$ doit donc être moindre en valeur absolue que la diffé-

rence $\frac{R}{R'} - \frac{Q}{Q'}$. Mais on a

$$\frac{C}{D} - \frac{Q}{Q'} = \frac{CQ' - DQ}{DQ'} \quad \text{et} \quad \frac{R}{R'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{\pm 1}{Q'R'}.$$

Et comme la première différence a un numérateur au moins égal à 1, elle ne peut être la plus petite que si le dénominateur D l'emporte sur R'. Il reste à prouver que C doit être aussi plus grand que R.

Puisque $\frac{C}{D}$ est compris entre $\frac{R}{R'}$ et $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{D}{C}$ le sera entre $\frac{R'}{R}$ et $\frac{Q'}{Q}$. On a

$$\frac{D}{C} - \frac{Q'}{Q} = \frac{DQ - CQ'}{CQ} \quad \text{et} \quad \frac{R'}{R} - \frac{Q'}{Q} = \frac{\mp 1}{RQ}.$$

La premiere expression ne peut donc être moindre que la seconde, que si C est supérieur à R.

Cette dernière propriété met dans tout son jour l'avantage que présente la réduction des nombres en fraction continue. Des réduites consécutives donnent une série de valeurs, de plus en plus approchées, qui, eu égard au degré d'approximation obtenu, sont exprimées le plus simplement possible.

Applications.

35. 1° *Remplacer* $\frac{1392}{3024}$ *par des fractions approchées aussi simples que possible.*

En appliquant le procédé indiqué (24), on trouve

$$\frac{1392}{3024} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}.$$

Les réduites successives sont

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{11}, \quad \frac{6}{13}, \quad \frac{29}{63}.$$

On peut remarquer, et c'est une conséquence de ce qui précède (30), que la dernière réduite donne la valeur de la fraction proposée ramenée à sa plus simple expression. $\frac{6}{13}$, réduite de rang pair, est plus grande que la fraction donnée. L'erreur commise en la prenant à la place de cette fraction est moindre que $\frac{1}{13.63}$ ou que $\frac{1}{819}$.

36. 2° *Trouver des valeurs approchées aussi simples que possible de* $\sqrt{7}$.

La partie entière de $\sqrt{7}$ est 2. On peut donc poser

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{y},$$

d'où

$$y = \frac{1}{\sqrt{7} - 2}.$$

Multiplions haut et bas par $\sqrt{7} + 2$ (*Alg. élém.*, 178), il viendra

$$y = \frac{\sqrt{7} + 2}{3}.$$

$\sqrt{7}$ tombant entre 2 et 3, y tombe entre 1 et 2, et l'on peut écrire

$$y = \frac{\sqrt{7} + 2}{3} = 1 + \frac{1}{z}.$$

On en déduit

$$z = \frac{3}{\sqrt{7} - 1} = \frac{3(\sqrt{7} + 1)}{6} = \frac{\sqrt{7} + 1}{2}.$$

z tombe donc aussi entre 1 et 2, et l'on peut poser

$$z = \frac{\sqrt{7} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{u},$$

d'où

$$u = \frac{2}{\sqrt{7} - 1} = \frac{2(\sqrt{7} + 1)}{6} = \frac{\sqrt{7} + 1}{3}.$$

u tombe encore entre 1 et 2. Je pose

$$u = \frac{\sqrt{7} + 1}{3} = 1 + \frac{1}{v},$$

d'où

$$v = \frac{3}{\sqrt{7} - 2} = \frac{3(\sqrt{7} + 2)}{3} = \sqrt{7} + 2.$$

v tombe entre 4 et 5. On peut donc écrire

$$v = \sqrt{7} + 2 = 4 + \frac{1}{t},$$

d'où

$$t = \frac{1}{\sqrt{7} - 2}.$$

t est donc égal à y, et les calculs se reproduiront indéfiniment d'une

manière périodique. On aura

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + .}}}}}}}}$$

Les réduites successives seront

$$2,\quad 3,\quad \frac{5}{2},\quad \frac{8}{3},\quad \frac{37}{14},\quad \frac{45}{17},\quad \frac{82}{31},\quad \frac{127}{48},\quad \frac{590}{223},\quad \ldots.$$

Si l'on remplace $\sqrt{7}$ par $\frac{82}{31}$, l'erreur commise est moindre que $\frac{1}{31 \times 48}$ ou que $\frac{1}{1488}$, et plus grande que $\frac{1}{31 \times (31 + 48)}$ ou que $\frac{1}{2449}$ (32); c'est-à-dire que $\frac{82}{31}$ est une valeur exacte à 0,001 près.

Nous dirons en terminant cet exemple, mais sans démontrer cette proposition, que *la racine carrée d'un nombre entier quelconque non carré parfait conduit toujours à une fraction continue périodique*. Seulement la période peut commencer plus ou moins tôt.

37. 3° Il semble évident que lorsqu'on connaît deux valeurs approchées d'un nombre, l'une par défaut, l'autre par excès, si l'on réduit ces valeurs en fraction continue, toutes les parties qui leur seront communes appartiendront nécessairement à l'expression du nombre considéré en fraction continue. Il est facile d'ailleurs de le démontrer comme il suit. Supposons que X tombe entre A et B, et qu'on ait

$$A = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + .}}}} \qquad B = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e' + .}}}}$$

A et B ayant même partie entière a, cette partie entière sera celle de X qui tombe entre A et B. Posons

$$A = a + \frac{1}{y}, \quad B = a + \frac{1}{y'}, \quad X = a + \frac{1}{x}.$$

Puisque X tombe entre A et B, il faut que x tombe entre y et y', et comme y et y' ont la même partie entière b, b sera aussi la partie en-

tière de x. Posons donc

$$y = b + \frac{1}{z}, \quad y' = b + \frac{1}{z'}, \quad x = b + \frac{1}{x'}.$$

On prouvera de même que x' a la même partie entière c que z et z', et en continuant le même raisonnement, on vérifiera que le développement de X commence comme il suit :

$$X = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ddots}}}$$

Nous pouvons faire application de ce qui précède *à la recherche de fractions exprimant le nombre* π (Géom., 135) *aussi simplement que possible*, eu égard au degré d'approximation obtenu.

π est compris entre les deux expressions 3,1415926 et 3,1415927. En les réduisant en fraction continue, on trouve (35, 1°) :

$$\frac{31415926}{10000000} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{243 + \ddots}}}}$$

$$\frac{31415927}{10000000} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{354 + \ddots}}}}$$

Donc, on aura nécessairement

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

Les réduites correspondantes

$$3, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113},$$

approcheront plus de π que toutes les fractions ayant des termes plus simples.

CHAPITRE IV.

ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

38. L'analyse indéterminée du premier degré, qui est une partie importante de la *Théorie des nombres*, a pour but : *Étant données m équations dont les coefficients sont des nombres entiers positifs ou négatifs, entre $m+n$ inconnues $x, y, z, \ldots$, de trouver les solutions entières de ces équations, c'est-à-dire les systèmes de valeurs entières, positives ou négatives, de $x, y, z, \ldots$, qui les vérifient.*

Nous commencerons par considérer une seule équation à deux inconnues.

Résolution de l'équation $ax + by = c$ en nombres entiers.

39. Soit $ax+by=c$. On peut supprimer tout facteur commun aux coefficients a, b, c, sans altérer l'équation. Nous admettrons donc que les nombres a, b, c, sont *premiers entre eux*. Nous admettrons de plus qu'il en est de même des nombres a et b considérés simultanément. Car, si ces nombres admettaient un facteur commun k, les valeurs entières de x et de y rendraient le premier membre multiple de k, tandis que le second membre ne peut l'être d'après notre première hypothèse.

40. Ceci posé, c'est-à-dire *a et b étant premiers entre eux*, nous allons prouver que *l'équation $ax+by=c$ admet nécessairement une solution entière.*

Je suppose le coefficient de x positif, ce qui est permis, et je tire de l'équation

$$x = \frac{c-by}{a}. \tag{1}$$

On peut toujours effectuer la division de deux nombres entiers, quels que soient leurs signes, de façon que le reste de la division soit positif. Remplaçons successivement y, dans la relation (1), par les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (a-1),$$

et cherchons les quotients correspondants de manière que le reste soit toujours positif. Je dis qu'on parviendra ainsi à une valeur entière pour x, et à une seule. En effet, il est impossible que deux valeurs y', y'', appartenant à la série indiquée, conduisent au même reste r. On aurait alors

$$c-by' = aq'+r, \quad c-by'' = aq''+r,$$

et l'on en déduirait

$$b(y''-y') = a(q'-q'').$$

a, premier avec b, diviserait alors $y''-y'$; ce qui est impossible, puisqu'on a

$$y''-y' < a.$$

Ainsi, tous les restes qu'on obtiendra seront différents. Ils sont entiers, moindres que a, et l'on exécute a divisions : l'un d'eux sera donc *nul*.

Soit β la valeur correspondante de y. On aura

$$x = \frac{c - b\beta}{a} = \alpha \text{ (nombre entier)},$$

d'où

$$a\alpha + b\beta = c,$$

et l'équation proposée admet la solution

$$x = \alpha, \quad y = \beta.$$

41. *Lorsque l'équation $ax + by = c$ admet une solution entière, elle en admet une infinité.*

Puisqu'on a alors

$$a\alpha + b\beta = c,$$

on peut écrire

$$ax + by = a\alpha + b\beta,$$

d'où

$$x - \alpha = \frac{-b(y - \beta)}{a}.$$

Si nous désignons par θ un entier indéterminé, positif, négatif ou nul, il suffira que y satisfasse à l'équation

$$y - \beta = a\theta,$$

pour que la valeur correspondante de x soit entière comme celle attribuée à y. Et, par suite, en posant

$$y = \beta + a\theta \quad \text{et} \quad x = \alpha - b\theta,$$

on aura tous les systèmes de valeurs entieres de x et de y qui satisfont à l'équation

$$ax + by = c,$$

en faisant parcourir à θ toute la série des nombres entiers, positifs ou négatifs.

On voit que *les valeurs trouvées forment deux progressions par différence illimitées. L'une, celle qui correspond à y, a pour raison le coefficient de x dans l'équation; l'autre a pour raison le second coefficient de l'équation; mais l'un des deux coefficients est changé de signe.*

42. *Tout revient donc à trouver une seule solution entière.* On peut employer, suivant les cas, les trois procédés suivants.

43. 1° Le premier repose sur le mode même de démonstration employé pour prouver l'existence d'une solution entière; mais il n'est convenable que lorsque l'un des coefficients des inconnues est un petit nombre.

Soit l'équation

$$9x + 4y = 271.$$

Je la résous par rapport à y qui a le plus petit coefficient. Il vient

$$y = \frac{271 - 9x}{4}.$$

Je n'ai qu'à remplacer x par les valeurs 0, 1, 2, 3; l'une d'elles conduira à une division exacte (40). Pour $x = 3$, on trouve

$$y = \frac{271 - 27}{4} = \frac{244}{4} = 61.$$

L'équation admettant *la solution*

$$x = 3, \quad y = 61,$$

toutes les solutions entières sont renfermées (41) dans les formules

$$x = 3 + 4\theta, \quad y = 61 - 9\theta.$$

θ désigne toujours un entier indéterminé, positif, négatif ou nul.

44. 2° Le second procédé est fondé sur cette remarque très-simple : que, si dans l'équation

$$ax + by = c$$

le coefficient b, par exemple, est égal à 1, on a immédiatement une solution entière en posant $x = 0$ et $y = c$.

Admettons que a soit *le plus petit coefficient*, et tirons de l'équation (1) $ax + by = c$

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Divisons c et b par a, et faisons en sorte, en prenant les quotients par défaut ou par excès, d'avoir des restes plus petits que $\frac{a}{2}$ en valeur absolue : nous diminuerons ainsi la longueur des calculs. Si l'on a

$$c = aQ \pm R \quad \text{et} \quad b = aq \pm r,$$

la valeur de x deviendra

$$x = Q - qy + \frac{\pm R \mp ry}{a}.$$

Par conséquent, t désignant une nouvelle inconnue, la question est ramenée à trouver une solution entière de l'équation

$$\frac{\pm R \mp ry}{a} = t,$$

c'est-à-dire

(2) $$at \pm ry = \pm R.$$

Remarquons que dans cette équation les coefficients des inconnues sont le plus petit coefficient de l'équation primitive et le reste obtenu en divisant le plus grand coefficient de cette équation par le plus petit. En opérant sur l'équation (2) comme nous venons de le faire sur l'équation (1), la même loi se poursuivra. Ce qui montre immédiatement que les équations auxiliaires obtenues auront toujours pour coefficients *deux des restes consécutifs qui correspondent à la recherche du plus grand commun diviseur des nombres a et b*. Or, ces nombres étant premiers entre eux, on parviendra à un dernier reste égal à 1, c'est-à-dire à une der-

nière équation de la forme

$$mu + v = p.$$

Cette équation aura pour solution entière $u = 0$ et $v = p$; et, en remontant de proche en proche, il sera facile de trouver une solution entière de l'équation (1).

Soit l'équation

(1) $$77x - 104y = 815.$$

On en déduit

(2) $$x = \frac{815 + 104y}{77} = 11 + y - \frac{32 - 27y}{77} = 11 + y - t,$$

en posant

(3) $$\frac{32 - 27y}{77} = t \quad \text{ou} \quad 27y + 77t = 32.$$

On en déduit

(4) $$y = \frac{32 - 77t}{27} = 1 - 3t + \frac{5 + 4t}{27} = 1 - 3t + t',$$

en posant

(5) $$\frac{5 + 4t}{27} = t' \quad \text{ou} \quad 4t - 27t' = -5.$$

On en déduit

(6) $$t = \frac{27t' - 5}{4} = 7t' - 1 - \frac{t' + 1}{4} = 7t' - 1 - t'',$$

en posant

(7) $$\frac{t' + 1}{4} = t'' \quad \text{ou} \quad t' - 4t'' = -1.$$

Nous voici arrivé à une équation où t' a pour coefficient l'unité. On pourra donc prendre pour solution de cette équation $t'' = 0$ et $t' = -1$. Les équations (6), (4), (2), donneront alors

$$t = -8, \quad y = 24, \quad x = 43,$$

et les solutions entières de l'équation (1) seront renfermées dans les formules

$$x = 43 + 104\theta, \quad y = 24 + 77\theta.$$

Remarque. — Si, dans les divisions successives, un facteur se présente au dividende *sans entrer dans le diviseur*, il faut le mettre en évidence de manière à simplifier les calculs subséquents. Si l'on avait, par exemple, une fraction telle que $\frac{5 + 10t}{13}$, on l'écrirait sous la forme $\frac{5(1 + 2t)}{13}$, et l'on poserait seulement $\frac{1 + 2t}{13} = t'$.

45. 3° Enfin le troisième procédé est fondé sur les propriétés des fractions continues.

Réduisons la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ en fraction continue. La réduction

conduira à un nombre limité de termes (24). Soit $\frac{l}{m}$ l'avant-dernière réduite. Nous aurons alors (28)

$$am - bl = \pm 1,$$

et par suite, en multipliant par c,

$$a(mc) - b(lc) = \pm c.$$

En comparant ce résultat à l'équation $ax + by = c$, on voit facilement qu'on en aura une solution entière en prenant $x = \pm mc$, $y = \pm lc$.

Reprenons l'équation $77x - 104y = 815$. Je réduis $\frac{77}{104}$ en fraction continue. Je trouve les quotients successifs

$$1,\ 2,\ 1,\ 5,\ 1,\ 3.$$

Les réduites sont donc

$$0,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{17}{23},\ \frac{20}{27},\ \frac{77}{104},$$

et l'on a

$$77.27 - 104.20 = -1,$$

d'où, en multipliant par -815,

$$77.(-27.815) - 104(-20.815) = 815.$$

On peut donc prendre comme solution de l'équation donnée

$$x = -27.815 = -22005 \quad \text{et} \quad y = -20.815 = -16300.$$

On n'obtient pas ainsi, en général, la même première solution que par les autres procédés; mais il est facile de la faire apparaître. En effet, les formules générales seront, dans le cas considéré,

$$x = -22005 + 104\theta, \quad y = -16300 + 77\theta.$$

Divisons 16300 par 77, en rendant toujours le reste trouvé moindre que la moitié du diviseur (44). Nous aurons pour quotient 212. Si l'on remplace alors θ par 212, il vient, comme au n° 44,

$$x = 43, \quad y = 24.$$

On retombe donc, puisque θ est tout à fait indéterminé, sur les mêmes formules générales,

$$x = 43 + 104\theta, \quad y = 24 + 77\theta.$$

Résolution de l'équation $ax + by = c$ en nombres entiers et positifs.

46. Lorsque a et b sont premiers entre eux, l'équation $ax + by = c$ admet *une infinité de solutions entières*. Cherchons à séparer parmi ces solutions celles qui sont *positives*.

En mettant en évidence les signes des coefficients a, b, c, on aura à

considérer les quatre formes suivantes :

$$ax+by=c,$$
$$ax-by=c,$$
$$ax+by=-c,$$
$$ax-by=-c.$$

La troisième forme exclut évidemment la possibilité des solutions positives, et la quatrième forme rentre dans la seconde; car peu importe que ce soit l'un ou l'autre des deux coefficients a et b qui ait le signe *moins*. Il reste donc à considérer les équations

$$ax+by=c,$$
$$ax-by=c.$$

Commençons par la seconde, et soit $x=\alpha$, $y=\beta$, une solution quelconque de cette équation. Toutes ses solutions seront renfermées dans les formules

$$x=\alpha+b\theta, \quad y=\beta+a\theta.$$

Pour que les solutions soient entières et positives, il suffit de donner à θ les valeurs entières qui satisfont aux inégalités

$$\alpha+b\theta>0, \quad \beta+a\theta>0$$

ou

$$\theta>-\frac{\alpha}{b}, \quad \theta>-\frac{\beta}{a}.$$

On voit donc que la seule condition est de donner à θ les valeurs entières qui surpassent la plus grande des deux limites $-\frac{\alpha}{b}$, $-\frac{\beta}{a}$. Ainsi *l'équation $ax-by=c$ admet une infinité de solutions entières et positives.*

Passons à l'équation $ax+by=c$. Les formules qui donnent toutes les solutions entières sont alors

$$x=\alpha-b\theta, \quad y=\beta+a\theta.$$

Donc, on ne doit donner à θ dans ce cas que les valeurs entières qui satisfont aux inégalités

$$\alpha-b\theta>0 \quad \text{et} \quad \beta+a\theta>0,$$

c'est-à-dire

$$\theta<\frac{\alpha}{b} \quad \text{et} \quad \theta>-\frac{\beta}{a}.$$

Comme on a

$$a\alpha+b\beta=c,$$

on peut remplacer $\frac{\alpha}{b}$ par $-\frac{\beta}{a}+\frac{c}{ab}$, et prendre pour limites

$$\theta<-\frac{\beta}{a}+\frac{c}{ab} \quad \text{et} \quad \theta>-\frac{\beta}{a}.$$

Donc, *les solutions entières et positives de l'équation $ax+by=c$ correspondent aux valeurs entières de θ comprises entre $-\frac{\beta}{a}$ et $-\frac{\beta}{a}+\frac{c}{ab}$.*

Par conséquent, l'équation considérée peut n'admettre aucune solution entière et positive; et, dans tous les cas, *elle n'en admet qu'un nombre limité*.

Il est facile de voir que *le nombre* de ces solutions est le quotient entier qui correspond à $\frac{c}{ab}$, différence des deux limites, ou ce quotient augmenté d'une unité. Ainsi, les deux limites étant $29\frac{3}{5}$ et $39\frac{1}{5}$, leur différence sera $9\frac{3}{5}$, et il y a *dix* nombres entiers entre les deux limites. Si les deux limites sont $29\frac{3}{5}$ et $38\frac{4}{5}$, leur différence sera égale à $9\frac{1}{5}$, et il y a *neuf* nombres entiers entre les deux limites.

47. Application. — *Trouver un nombre entier et positif tel, qu'en le divisant par 7 il donne pour reste 5, et tel, qu'en le divisant par 12 il donne pour reste 11.*

Si nous désignons par x et y les deux nombres entiers et positifs qui représentent les quotients du nombre cherché par 7 et par 12, ce nombre admettra les deux formes

$$7x+5 \quad \text{et} \quad 12y+11.$$

On aura donc à satisfaire, en nombres entiers et positifs, à l'équation

$$7x+5=12y+11 \quad \text{ou} \quad 7x-12y=6.$$

On en déduit

$$x=\frac{12y+6}{7}=\frac{6(2y+1)}{7}.$$

Il suffit de trouver pour y une valeur qui rende entière l'expression $\frac{2y+1}{7}$. On y arrivera en remplaçant y par l'une des valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pour $y=3$, on a $\frac{2y+1}{7}=1$ et $x=6$. Il en résulte

$$x=6+12\theta, \quad y=3+7\theta.$$

On aura alors pour le nombre cherché les deux expressions

$$7(6+12\theta)+5=47+84\theta,$$
$$12(3+7\theta)+11=47+84\theta.$$

Ces deux expressions sont égales, comme on devait s'y attendre et comme il est nécessaire qu'elles le soient si l'on a bien opéré. Tous les nombres demandés sont, en résumé, donnés par la formule $47+84\theta$, et l'on a bien

$$\frac{47+84\theta}{7}=6+12\theta+\frac{5}{7}, \quad \frac{47+84\theta}{12}=3+7\theta+\frac{11}{12}.$$

Résolution en nombres entiers de m équations contenant $m+1$ inconnues.

48. Soient deux équations à trois inconnues :

(1) $$ax+by+cz=d,$$

et

$$(2)\qquad a'x + b'y + c'z = d'.$$

Ces équations sont supposées ramenées à leur plus simple expression. Pour que le problème soit possible, chaque équation doit admettre séparément des solutions entières. Il faut donc évidemment que les coefficients a, b, c, soient *premiers entre eux*, ainsi que les coefficients a', b', c'.

Éliminons z entre les équations (1) et (2). Il vient

$$(3)\qquad (ac' - ca')x + (bc' - cb')y = dc' - cd',$$

et l'on peut remplacer le système proposé par les équations (1) et (3). Cherchons les solutions entières de l'équation (3). Si elle en admet, elles seront de la forme

$$x = \alpha + \frac{bc' - cb'}{\delta}\theta,$$

$$y = \beta - \frac{ac' - ca'}{\delta}\theta.$$

δ est le plus grand commun diviseur des trois coefficients $ac' - ca'$, $bc' - cb'$, $dc' - cd'$; car, avant de traiter l'équation (3), il faut rendre ses coefficients premiers entre eux. θ est un entier indéterminé.

Pour que l'équation (3) admette des solutions entières, il faut que les quotients qui multiplient θ soient premiers entre eux (39).

Si cette condition est remplie, on substituera les valeurs trouvées pour x et pour y dans l'équation (1), et elle ne renfermera plus que les deux inconnues z et θ qu'on pourra, si toutefois l'équation transformée comporte des solutions entières, exprimer en fonction d'un nouvel entier indéterminé θ'. Il sera facile alors d'obtenir x, y et z en fonction de θ' seulement.

49. Il faut remarquer que, *si les coefficients c et c' d'une même inconnue sont premiers entre eux, la seule condition de possibilité du problème est que l'équation* (3) *admette des solutions entières*.

En effet, reprenons dans cette hypothèse les valeurs

$$x = \alpha + \frac{bc' - cb'}{\delta}\theta,$$

$$y = \beta - \frac{ac' - ca'}{\delta}\theta,$$

et substituons-les dans l'équation (1). Il viendra, en simplifiant,

$$(4)\qquad c(ba' - ab')\theta + c\delta z = \delta(d - a\alpha - b\beta).$$

D'autre part, puisque l'équation (3) admet la solution $x = \alpha$; $y = \beta$, on doit avoir

$$(ac' - ca')\alpha + (bc' - cb')\beta = dc' - cd',$$

d'où

$$c(d' - a'\alpha - b'\beta) = c'(d - a\alpha - b\beta).$$

On voit par là que, c étant premier avec c', il doit diviser $d - a\alpha - b\beta$. Appelons q le quotient de cette division, et reportons-nous à l'équation (4) : elle deviendra, si l'on divise ses deux membres par c,

$$(ba' - ab')\theta + \delta z = \delta q.$$

On obtient donc immédiatement, dans le cas de c premier avec c', une solution entière de l'équation (4) ou de l'équation (1) transformée, en posant $\theta = 0$ et $z = q$.

Le raisonnement précédent prouve, en même temps, qu'on a intérêt à éliminer d'abord l'inconnue dont les coefficients sont premiers entre eux, puisque la résolution de l'équation en z et θ est alors immédiate.

50. La marche que nous venons d'indiquer pour deux équations à trois inconnues est générale, et elle s'applique au cas de m équations contenant $m+1$ inconnues, quelle que soit la valeur de m.

51. Application. — *Soit à résoudre le système*

$$3x+7y+7z=77,$$
$$6x+9y+8z=104.$$

Dans la première équation, les trois coefficients 7, 7, 77, sont divisibles par 7. Effectuons cette division, il viendra

$$\frac{3x}{7}+y+z=11.$$

On voit que x doit être un multiple de 7. Nous poserons donc

$$x=7x'.$$

De même, dans la seconde équation, les trois coefficients 6, 8, 104, sont divisibles par 2, et l'on a

$$3x+\frac{9y}{2}+4z=52.$$

y est donc forcément un nombre pair, et nous poserons $y=2y'$. Notre système deviendra donc

$$3x'+2y'+z=11,$$
$$21x'+9y'+4z=52.$$

Les coefficients de y' étant premiers entre eux, c'est cette inconnue que nous devons éliminer (49). Nous trouverons ainsi

$$15x'-z=5.$$

On a une solution immédiate de cette équation en posant

$$x'=0 \quad \text{et} \quad z=-5;$$

ses solutions entières seront donc renfermées dans les formules

$$x'=\theta \quad \text{et} \quad z=-5+15\theta.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation

$$3x'+2y'+z=11.$$

Il viendra

$$2y'+18\theta=16$$

ou

$$y'+9\theta=8.$$

On peut donc encore écrire immédiatement (49)

$$y'=8 \quad \text{et} \quad \theta=0,$$

ce qui conduit aux formules générales

$$y' = 8 - 9\theta' \quad \text{et} \quad \theta = \theta'.$$

On aura donc enfin

$$x = 7x' = 7\theta', \quad y = 2y' = 16 - 18\theta', \quad z = -5 + 15\theta'.$$

Si l'on ne voulait admettre que des solutions entières et positives, il faudrait qu'on eût

$$\theta' > 0, \quad 16 - 18\theta' > 0, \quad -5 + 15\theta' > 0.$$

On déduit des deux dernières inégalités $\theta' < \frac{8}{9}$ et $\theta' > \frac{1}{3}$; ce qui montre que les équations données n'admettent aucune solution positive. Les valeurs trouvées pour x, y, z, indiquent d'ailleurs à priori ce résultat.

Résolution en nombres entiers d'une équation contenant plus de deux inconnues.

52. Soit l'équation générale

$$ax + by + cz + du + \ldots = k.$$

On doit toujours la supposer ramenée à sa plus simple expression, de sorte que les coefficients $a, b, c, \ldots, k$, n'aient plus aucun facteur commun. *Tous les coefficients du premier membre doivent alors être premiers entre eux;* car s'ils admettaient un facteur commun, le premier membre serait divisible par ce facteur sans que le second le fût, et l'équation ne comporterait aucune solution entière.

Les coefficients $a, b, c, \ldots$, du premier membre doivent être premiers entre eux lorsqu'on les considère simultanément; mais a et b, par exemple, peuvent n'être pas premiers entre eux. Désignons par δ leur plus grand commun diviseur et par a' et b' les quotients $\frac{a}{\delta}$ et $\frac{b}{\delta}$. On pourra écrire

$$a'x + b'y = \frac{k - cz - du - \ldots}{\delta},$$

et la question sera ramenée à trouver une solution entière de l'équation

$$\frac{k - cz - du - \ldots}{\delta} = t,$$

qui contient une inconnue de moins, puisqu'au lieu des deux inconnues x et y, on n'a qu'une nouvelle inconnue t. En opérant ainsi de proche en proche, tout dépendra finalement de la résolution d'une équation à deux inconnues. Les exemples suivants indiqueront suffisamment la marche à suivre dans tous les cas.

53. 1° Soit à résoudre l'équation

$$4x - 18y + 27z = 100.$$

On en déduit

$$2x - 9y + \frac{27z}{2} = 50.$$

z devant être multiple de 2, posons

$$z = 2z'.$$

Il viendra

$$2x - 9y + 27z' = 50.$$

On en déduit

(1) $$3z' - y = \frac{2(25 - x)}{9}.$$

2 et 9 étant premiers entre eux, il suffit de rendre entier le quotient $\frac{25 - x}{9}$.

Posons

$$\frac{25 - x}{9} = t,$$

d'où

$$x + 9t = 25.$$

On aura immédiatement, pour solution de cette équation,

$$x = 25 \quad \text{et} \quad t = 0,$$

d'où (41)

$$x = 25 - 9\theta, \quad t = \theta.$$

Revenons à l'équation (1). Nous aurons

$$3z' - y = 2\theta.$$

$z' = 0$ et $y = -2\theta$ est une solution de cette équation. On pourra donc écrire

$$y = -2\theta + 3\theta' \quad \text{et} \quad z = \theta'.$$

Toutes les solutions entières de l'équation proposée seront donc renfermées dans les formules

$$x = 25 - 9\theta, \quad y = -2\theta + 3\theta', \quad z = 2\theta',$$

où θ et θ' représentent deux entiers indéterminés, positifs, négatifs ou nuls.

Si l'on ne veut admettre que les solutions entières et positives, il faut qu'on ait

$$25 - 9\theta > 0, \quad -2\theta + 3\theta' > 0, \quad 2\theta' > 0,$$

On déduit des deux premières inégalités

$$\theta < \frac{25}{9} \quad \text{et} \quad \theta' > \frac{2\theta}{3}.$$

On voit qu'on pourra donner à θ toutes les valeurs possibles au-dessous de 3, et à θ' toutes les valeurs possibles au-dessus de $\frac{2\theta}{3}$ quand θ sera positif, et toutes les valeurs *positives* possibles à partir de 0 quand θ sera négatif.

54. 2° Soit encore l'équation

$$2x + 5y + 10z = 187.$$

2 et 5 étant premiers entre eux, j'en déduis

$$2x + 5y = 187 - 10z.$$

Posons

$$187 - 10z = t.$$

Il viendra

$$2x + 5y = t,$$

d'où

$$x = \frac{t - 5y}{2} = -2y + \frac{t - y}{2},$$

Posons

$$\frac{t - y}{2} = t',$$

d'où

$$2t' + y = t.$$

Cette dernière équation admet la solution

$$t' = 0, \quad y = t.$$

Donc, toutes ses solutions seront renfermées dans les formules

$$t' = \theta, \quad y = t - 2\theta.$$

On aura alors

$$x = -2y + t' = -2t + 5\theta.$$

Remplaçons t par sa valeur $187 - 10z$, et il viendra

$$x = -374 + 20z + 5\theta, \quad y = 187 - 10z - 2\theta.$$

Dans ce cas, x et y sont exprimées en fonction de la troisième inconnue z et de l'indéterminée θ. On donnera à z et à θ des valeurs entières quelconques, et l'on déduira des formules trouvées les valeurs correspondantes de x et de y.

Si l'on ne veut admettre que les solutions positives, il faudra qu'on ait

$$-374 + 20z + 5\theta > 0 \quad \text{et} \quad 187 - 10z - 2\theta > 0.$$

On en déduit

$$\theta > \frac{374}{5} - 4z \quad \text{et} \quad \theta < \frac{187}{2} - 5z.$$

Pour que ces conditions ne soient pas contradictoires, il faudra qu'on ait

$$\frac{187}{2} - 5z > \frac{374}{5} - 4z,$$

c'est-à-dire

$$z < \frac{187}{10}.$$

On pourra donc donner à z toutes les valeurs entières et positives depuis 0 jusqu'à 18; et, pour chaque valeur de z, on saura par les deux inégalités précédentes quelles valeurs de θ on peut adopter.

Supposons $z = 10$. Nous aurons

$$\theta > \frac{174}{5} \quad \text{et} \quad \theta < \frac{87}{2};$$

ce qui montre qu'en prenant $z = 10$, on pourra donner à θ les valeurs 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43. A $z = 10$ correspondront donc *neuf*

solutions entières et positives de l'équation proposée. On calculera de même les autres solutions.

55. 3° Pour ne rien laisser à désirer sur ce sujet qui peut trouver son application dans plusieurs problèmes intéressants, nous terminerons ce chapitre en traitant le système suivant qui renferme *deux* équations et *quatre* inconnues :

$$x+y+z+u=100,$$
$$20x+10y+4z+u=200.$$

Nous éliminerons u par soustraction, et nous obtiendrons

$$19x+9y+3z=100,$$

d'où

$$9y+3z=100-19x \quad \text{et} \quad 3y+z=\frac{100-19x}{3}.$$

Posons

$$\frac{100-19x}{3}=t,$$

d'où

$$19x+3t=100.$$

Nous aurons immédiatement une solution entière de cette équation en posant

$$x=1 \quad \text{et} \quad t=27.$$

Par suite, toutes les solutions entières de l'équation considérée seront renfermées dans les formules $x=1-3\theta$ et $t=27+19\theta$.

Revenons à l'équation $3y+z=t$. Elle admet la solution $y=0$ et $z=t$. Donc toutes ses solutions entières correspondent aux formules

$$y=\theta' \quad \text{et} \quad z=t-3\theta'=27+19\theta-3\theta'.$$

x, y, z, étant ainsi exprimées en fonction des deux entiers indéterminés θ et θ', substituons les valeurs obtenues dans la première équation du système donné. Nous en tirerons

$$u=72-16\theta+2\theta'=2(36-8\theta+\theta').$$

Si l'on ne veut admettre que les solutions entières et positives, il faudra qu'on ait d'abord

$$1-3\theta>0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \theta<\frac{1}{3}, \quad \text{et} \quad \theta'>0.$$

Ainsi θ ne peut recevoir que des valeurs négatives, y compris 0, et θ' que des valeurs positives, y compris 0. Il faut de plus satisfaire aux inégalités

$$27+19\theta-3\theta'>0 \quad \text{et} \quad 36-8\theta+\theta'>0.$$

On en déduit

$$\theta'<9+\frac{19\theta}{3} \quad \text{et} \quad \theta'>8\theta-36.$$

Puisque θ' doit être positif et θ négatif ou nul, la seconde condition sera toujours satisfaite, et il ne reste plus à tenir compte que de la pre-

mière. Or, si l'on suppose $\theta = 0$, on aura $\theta' < 9$, c'est-à-dire qu'on peut supposer en même temps

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad \theta' = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Si l'on suppose $\theta = -1$, il vient $\theta' < \frac{8}{3}$, ce qui montre qu'on peut supposer en même temps

$$\theta = -1 \quad \text{et} \quad \theta' = 0,\ 1,\ 2.$$

Enfin, on ne peut pas donner à θ de valeurs au-dessous de -1, à cause de la condition $\theta' > 0$.

On a donc en tout *treize* solutions entières et positives dont voici le tableau :

x...	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	4,	4,	4.
y...	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	0,	1,	2.
z...	27,	24,	21,	18,	15,	12,	9,	6,	3,	0,	8,	5,	2.
u...	72,	74,	76,	78,	80,	82,	84,	86,	88,	90,	88,	90,	92.

CHAPITRE V.

APPLICATIONS DE LA FORMULE DU BINOME.

Puissances des polynômes.

56. Soit le trinôme $a+b+c$. On peut le regarder comme un binôme qui a pour premier terme $a+b$, et écrire (*Alg. élém.*, 237)

$$(a+b+c)^m = (a+b)^m + m(a+b)^{m-1}c$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}(a+b)^{m-2}c^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}(a+b)^{m-p}c^p + \ldots .$$

Il restera donc seulement à développer dans le second membre les différentes puissances de $a+b$. On obtiendra ainsi une série de termes dans lesquels la somme des exposants des lettres a, b, c, sera constamment égale à m. Par exemple, les termes qui proviennent du terme général

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}(a+b)^{m-p}c^p,$$

contiennent le produit de c^p par des puissances de a et de b dont la somme des exposants est $m-p$. Réciproquement, α, β, γ, étant trois nombres satisfaisant à la condition $\alpha+\beta+\gamma = m$, il y aura dans le développement un terme en $a^\alpha b^\beta c^\gamma$. En effet, ce développement renferme le

terme

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\gamma+1)}{1.2.3\ldots\gamma}(a+b)^{m-\gamma}c^{\gamma},$$

et $(a+b)^{m-\gamma}$ contient un terme dans lequel a et b figurent avec les exposants α et β, puisqu'on a

$$\alpha+\beta=m-\gamma.$$

57. Cherchons l'expression du coefficient du terme en $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$. Ce terme fait partie du développement partiel qui correspond au terme

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\gamma+1)}{1.2.3\ldots\gamma}(a+b)^{m-\gamma}c^{\gamma}.$$

Or ce dernier terme peut recevoir la forme (*Alg. élém.*, 232)

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\gamma.1.2.3\ldots(m-\gamma)}(a+b)^{m-\gamma}c^{\gamma}.$$

Et, dans le développement de $(a+b)^{m-\gamma}$, le coefficient du terme en $a^{\alpha}b^{\beta}$ ou en $a^{\alpha}b^{m-\gamma-\alpha}$ peut de même recevoir la forme

$$\frac{1.2.3\ldots(m-\gamma)}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots(m-\gamma-\alpha)}.$$

Le terme cherché est donc

$$\frac{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots(m-\gamma)}{1.2.3\ldots\gamma.1.2.3\ldots(m-\gamma).1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots(m-\gamma-\alpha)}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma},$$

ou en simplifiant et en remarquant que $m-\gamma-\alpha=\beta$,

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots\beta.1.2.3\ldots\gamma}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}.$$

58. On trouvera, en suivant une marche identique, que le terme général du développement de $(a+b+c+\ldots+l)^m$ a pour expression

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots\beta.1.2.3\ldots\gamma\ldots1.2.3\ldots\lambda}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots l^{\lambda}.$$

Et pour avoir tous les termes du développement, il suffira de prendre toutes les valeurs de α, β, γ, ..., λ, qui de 0 à m satisfont à la relation $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=m$, avec cette restriction que si l'un des exposants, α par exemple, est remplacé par 0, la suite correspondante du dénominateur ou $1.2.3\ldots\alpha$, sera remplacée par l'unité.

Ainsi, le cube de $a+b+c$ s'obtiendra en supposant chacun des exposants α, β, γ, égal à 3 et les deux autres nuls (ce qui donnera les cubes des trois termes a, b, c); puis, chacun des exposants α, β, γ, égal à 2, avec l'un des deux restants égal à 1 et le troisième nul (ce qui donnera trois fois le carré de chacun des termes a, b, c, multiplié par la somme des deux autres termes); enfin, on prendra les trois exposants égaux à

l'unité (et l'on obtiendra ainsi six fois le produit abc). On aura donc

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b+c) + 3b^2(a+c) + 3c^2(a+b) + 6abc.$$

Racines des polynômes.

59. On suppose qu'un polynôme donné A est la puissance $m^{ième}$ d'un polynôme inconnu α, et il s'agit de déterminer α ou la racine $m^{ième}$ de A.

Si les deux polynômes sont supposés ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une même lettre x, la puissance $m^{ième}$ de α devra reproduire identiquement A. Or le premier terme de la puissance $m^{ième}$ de α sera la puissance $m^{ième}$ du premier terme de α (*Alg. élém.*, **21**). Donc *on obtiendra le premier terme de la racine cherchée en extrayant la racine $m^{ième}$ du premier terme de* A.

Cherchons maintenant comment on peut, connaissant plusieurs termes de la racine, trouver le suivant.

Soient P la somme des termes connus et ρ la somme des termes qu'il faut déterminer. On devra avoir

$$A = (P+\rho)^m,$$

d'où

$$A = P^m + mP^{m-1}\rho + \frac{m(m-1)}{1.2}P^{m-2}\rho^2 + \ldots + \rho^m,$$

c'est-à-dire

$$A - P^m = mP^{m-1}\rho + \frac{m(m-1)}{1.2}P^{m-2}\rho^2 + \ldots.$$

P étant connu, on aura facilement P^m et, par suite, $A - P^m$. Le premier terme de cette différence sera égal au premier terme du second membre, en supposant toujours les polynômes considérés ordonnés de la même manière. Le premier terme du second membre est d'ailleurs le premier terme du développement de $mP^{m-1}\rho$; car ρ est de degré moins élevé que P et, dans tous les autres produits $\frac{m(m-1)}{1.2}P^{m-2}\rho^2, \ldots$, un facteur P est remplacé par un facteur ρ. Le premier terme de la différence $A - P^m$ sera donc égal au premier terme de mP^{m-1} multiplié par le premier terme de ρ. *On obtiendra donc immédiatement par division le premier terme de* ρ.

Comme le premier terme de mP^{m-1} est égal à m fois la $(m-1)^{ième}$ puissance du premier terme de P, dans toutes les divisions qui fourniront les différents termes de la racine, à partir du second, le diviseur restera le même.

60. Si A n'est la puissance $m^{ième}$ d'aucun polynôme, $A - P^m$ ne sera jamais nulle, et l'opération se poursuivra indéfiniment. Les exposants de la lettre ordonnatrice deviendront négatifs et croîtront sans cesse en valeur absolue. On sera averti de ce cas, en voyant apparaître à la racine un terme de degré moindre que celui qui devrait être le dernier : le dernier terme de la racine, quand elle est exacte, s'obtenant d'ailleurs nécessairement (59) en extrayant la racine $m^{ième}$ du dernier terme de A.

On peut encore indiquer d'autres caractères d'impossibilité; nous n'insisterons pas sur ce point (*).

Triangle arithmétique de Pascal.

61. D'après ce que nous avons dit (*Alg. élém.*, 234), il est facile de voir que *le nombre de combinaisons de m lettres prises n à n est égal au nombre de combinaisons de $m-1$ lettres prises n à n, augmenté du nombre de combinaisons de $m-1$ lettres prises $n-1$ à $n-1$.*

En effet, on peut partager les combinaisons de m lettres n à n en deux catégories : celles qui ne contiennent pas une certaine lettre a, et celles qui contiennent cette lettre. Celles qui ne contiennent pas a correspondent évidemment à $m-1$ lettres combinées n à n; et pour avoir celles qui contiennent a, on n'a qu'à former les combinaisons $n-1$ à $n-1$ des $m-1$ autres lettres, puis à écrire a à la droite de chacune d'elles. On démontre ainsi la formule

$$C_n^m = C_n^{m-1} + C_{n-1}^{m-1}.$$

On peut aussi l'établir directement à l'aide de la formule du binôme. Soit (*Alg. élém.*, 237).

$$(x+a)^{m-1} = x^{m-1} + C_1^{m-1}\,ax^{m-2} + C_2^{m-1}\,a^2x^{m-3} + \ldots$$
$$+ C_n^{m-1}\,a^nx^{m-n-1} + \ldots + C_{m-1}^{m-1}\,a^{m-1}.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $x+a$. Le premier membre deviendra $(x+a)^m$. Le terme général du second membre sera

$$C_n^{m-1}\,a^nx^{m-n} + C_{n-1}^{m-1}\,a^nx^{m-n},$$

c'est-à-dire

$$\left(C_n^{m-1} + C_{n-1}^{m-1}\right)a^nx^{m-n}.$$

Mais le terme général du développement de $(x+a)^m$ a aussi pour expression

$$C_n^m\,a^nx^{m-n}.$$

Donc, etc.

62. C'est sur cette remarque qu'est basée la formation du triangle de Pascal. Écrivons régulièrement, l'une au-dessous de l'autre, des lignes horizontales renfermant les coefficients du développement de la première, de la seconde, de la troisième, ..., de la $m^{ième}$ puissance du binôme $x+a$. D'après la seconde démonstration du n° 61, on formera ce tableau, dès qu'on en aura écrit les trois premières lignes, *en ajoutant deux nombres consécutifs de la dernière ligne obtenue et en écrivant le résultat trouvé au-dessous du nombre de droite.* Toutes les lignes horizontales commencent d'ailleurs par l'unité. Dans ce qui va suivre, *nous ferons abs-*

(*) La formule du binôme permet aussi d'extraire la racine $m^{ième}$ d'un nombre entier, en suivant une marche tout à fait analogue à celle que nous avons indiquée en *Arithmétique* pour les racines *carrée* et *cubique*.

traction de la première colonne verticale du tableau, qui ne contient que des 1, en remarquant que dans le développement du binôme les différents nombres de combinaisons sont donnés par les coefficients, *à partir du second.*

1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
.	....									
1	C_1^m,	C_2^m,	C_3^m, ...,		C_p^m, ...,					C_m^m.

Si l'on veut former la septième ligne horizontale, par exemple, on dira

$1+6=7,\quad 15+6=21,\quad 20+15=35,\quad 15+20=35,\quad 6+15=21,$
$1+6=7,\quad 0+1=1.$

Cette loi de formation conduit à la propriété suivante : *Un nombre situé dans une colonne verticale quelconque du tableau est la somme de tous les nombres supérieurs de la colonne verticale précédente* (*). Ainsi,

$$210 = 84+126,\quad 126 = 56+70,\quad 70 = 35+35,\quad 35 = 20+15,$$
$$15 = 10+5,\quad 5 = 4+1,$$

d'où

$$210 = 84+56+35+20+10+4+1.$$

Or la ligne horizontale de rang m renferme les nombres de combinaisons de m quantités prises 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ..., m à m ; et la ligne verticale de rang p commençant précisément à la ligne horizontale de rang p, renferme les nombres de combinaisons de p, de $p+1$, de $(p+2)$, ..., quantités prises p à p (**). D'après cela, le $m^{ième}$ nombre de la $p^{ième}$ colonne verticale est placé à la rencontre de cette colonne et de la $(m+p-1)^{ième}$ ligne horizontale. Ce nombre représente donc le nombre de combinaisons do $(m+p-1)$ objets pris p à p, c'est-à-dire

$$C_p^{m+p-1} = \frac{(m+p-1)(m+p-2)\dots m}{1.\quad 2.\dots\quad p}$$

ou

$$(1)\qquad C_p^{m+p-1} = \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+p-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\dots\quad p}.$$

(*) Cette propriété correspond à une formule remarquable relative aux combinaisons :

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m-2} + C_{n-1}^{m-3} + \dots + C_{n-1}^{n-1}.$$

Cette formule dépend évidemment du théorème démontré au n° 61.

(**) Il faut toujours avoir soin de se rappeler que la colonne verticale des unités est laissée de côté, et *ne compte pas* dans le rang p.

63. Voyons maintenant à quels résultats peut conduire la considération du triangle arithmétique.

Les termes de la première colonne verticale du triangle (toujours abstraction faite de la colonne des unités) sont dits *nombres figurés du premier ordre*; les termes de la seconde colonne verticale, *nombres figurés du second ordre*, et ainsi de suite. Nous verrons bientôt la raison de ces dénominations.

Ceci posé, *cherchons la somme des m premiers nombres naturels*. Cette somme sera celle des m premiers termes de la première colonne verticale du triangle : elle sera donc représentée (62) par le second nombre de la $(m+1)^{ième}$ ligne horizontale ou *par le* $m^{ième}$ *nombre figuré du second ordre*. Il suffira donc de faire $p=2$ dans la formule (1). On trouve ainsi pour la somme cherchée

$$\frac{m(m+1)}{2},$$

résultat déjà connu (*Alg. élém.*, 95).

Cherchons de même la somme des carrés des m premiers nombres naturels. L'identité

$$x^2 = x + x(x-1) = x + 2 \cdot \frac{x(x-1)}{2},$$

rapprochée du résultat précédent, prouve que la somme demandée est égale à la somme des m premiers nombres naturels, augmentée de 2 fois la somme des $(m-1)$ premiers nombres figurés du second ordre, c'est-à-dire *du double du* $(m-1)^{ième}$ *nombre figuré du troisième ordre*. Pour avoir ce dernier nombre, on remplacera dans la formule (1) m par $(m-1)$ et l'on y fera $p=3$. On trouvera ainsi

$$\frac{(m-1) \cdot m \cdot (m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

et la somme des carrés des m premiers nombres naturels sera

$$\frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m-1)m(m+1)}{3},$$

c'est-à-dire

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

On trouverait de la même manière, s'il était nécessaire, *la somme des cubes des m premiers nombres naturels*, qui est

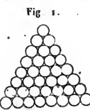
$$\left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2;$$

ce résultat montre que la somme des cubes des m premiers nombres est égale au carré de la somme de ces m premiers nombres.

Nous allons faire application de ce qui précède à la sommation des piles de boulets, telles qu'on les rencontre dans les arsenaux.

Sommation des piles de boulets.

64. *Piles triangulaires.* Une pile de boulets triangulaire est formée de tranches équilatérales dont les côtés contiennent successivement un boulet de moins, jusqu'au sommet de la pyramide formé par un seul boulet. Si la base est un triangle équilatéral dont le côté contienne m boulets, le côté de la tranche superposée contiendra $(m-1)$ boulets, celui de la tranche suivante $(m-2)$ boulets, et ainsi jusqu'au sommet.


Fig. 1.

Or, si l'on considère la base de la pyramide, elle sera formée évidemment de m lignes de boulets contenant : la première 1 boulet, la seconde 2 boulets, la troisième 3 boulets, ..., la $m^{ième}$ m boulets. Donc la somme des boulets renfermés dans cette base sera la somme des m premiers nombres, c'est-à-dire (63)

$$\frac{m(m+1)}{2}$$

ou le $m^{ième}$ nombre figuré du second ordre. De même, la somme des boulets renfermés dans la tranche superposée sera la somme des $(m-1)$ premiers nombres ou le $(m-1)^{ième}$ nombre figuré du second ordre, etc.

On voit par là que le nombre des boulets renfermés dans la pyramide totale sera la somme des m premiers nombres figurés du second ordre ou le $m^{ième}$ nombre figuré du troisième ordre, c'est-à-dire (63)

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{6}.$$

A cause de ce qui précède, les nombres figurés du second ordre ont reçu le nom de *nombres triangulaires*, et ceux du troisième ordre celui de *nombres pyramidaux*.

65. *Piles à base carrée.* Une pareille pile est formée de tranches carrées dont les côtés contiennent successivement un boulet de moins, jusqu'au sommet de la pyramide formé par un seul boulet. Si le côté de la base contient m boulets, la base tout entière contiendra m^2 boulets. Le côté de la tranche suivante contiendra $(m-1)$ boulets, et la tranche en contiendra $(m-1)^2$, etc. La question est donc ramenée, en partant du sommet, à chercher la somme

$$1+2^2+3^2+\ldots+(m-1)^2+m^2$$

des carrés des m premiers nombres, somme qui est égale (63) à

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

66. *Piles à base rectangulaire.* La base d'une pile rectangulaire est formée de n files de m boulets $(m > n)$. La tranche superposée contient $(n-1)$ files de $(m-1)$ boulets, la tranche suivante $(n-2)$ files de $(m-2)$ boulets, etc., jusqu'au sommet de la pile qui renferme 1 file de $m-(n-1)$ ou de $m-n+1$ boulets.

Pour plus de simplicité, posons $m-n=p$, p représentant la différence des nombres de boulets contenus dans les deux côtés de la base.

En partant du sommet, on voit que la pyramide sera formée d'une file de $p+1$ boulets, reposant sur 2 files de $p+2$ boulets, reposant elles-mêmes sur 3 files de $p+3$ boulets, etc., jusqu'à la base formée de n files de $(p+n)$ boulets. Il s'agit donc d'effectuer la somme

$$p+1+2(p+2)+3(p+3)+\ldots+n(p+n),$$

c'est-à-dire

$$p(1+2+3+\ldots+n)+(1+2^2+3^2+\ldots+n^2).$$

Il faut donc, au produit de p par la somme des n premiers nombres, ajouter la somme des carrés de ces n premiers nombres. On aura donc, en vertu de ce qui précède (63),

$$p\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6}.$$

67. On calcule par différence le nombre des boulets contenus dans une pile *tronquée*.

Sommation des puissances semblables des termes d'une progression par différence.

68. On aurait pu suivre une méthode plus rapide pour trouver la formule de la somme des carrés des m premiers nombres, formule qui nous était seule nécessaire pour arriver à la sommation des piles de boulets. Cette méthode est basée sur la sommation des puissances semblables des termes d'une progression par différence.

Soient $a, b, c, d, \ldots, h, k, l$, les $(m+1)$ premiers termes d'une progression par différence, de raison r. Nous aurons (*Alg. élém.*, 90) :

$$b=a+r,\quad c=b+r,\ldots,\quad l=k+r.$$

Élevons toutes ces égalités à la $(n+1)^{\text{ième}}$ puissance. Il viendra (*Alg. élém.*, 237)

$$b^{n+1}=a^{n+1}+(n+1)ra^n+\frac{n(n+1)}{2}r^2a^{n-1}+\ldots+(n+1)r^na+r^{n+1},$$

$$c^{n+1}=b^{n+1}+(n+1)rb^n+\frac{n(n+1)}{2}r^2b^{n-1}+\ldots+(n+1)r^nb+r^{n+1},$$

. . . . ,

$$l^{n+1}=k^{n+1}+(n+1)rk^n+\frac{n(n+1)}{2}r^2k^{n-1}+\ldots+(n+1)r^nk+r^{n+1}.$$

Si l'on ajoute toutes ces égalités membre à membre et si l'on supprime les termes communs, il vient

$$l^{n+1}=a^{n+1}+(n+1)rS_n+\frac{n(n+1)}{2}r^2S_{n-1}+\ldots+(n+1)r^nS_1+mr^{n+1}.$$

$S_1, \ldots, S_{n-1}, S_n$, représentent les sommes des premières, ..., $(n-1)^{\text{ièmes}}$, $n^{\text{ièmes}}$ puissances *des m premiers termes considérés*.

La relation générale qu'on vient d'obtenir permet de trouver l'une de ces sommes en fonction de toutes les autres et des quantités données.

Prenons pour progression par différence la suite $1, 2, 3, \ldots, m, (m+1)$. Nous savons qu'on a alors

$$S_1 = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Pour avoir S_2, il suffira de faire dans la relation générale $n = 2$, en même temps que $l = m+1$ et $r = 1$. Nous trouverons ainsi

$$(m+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + m,$$

d'où

$$S_2 = \frac{(m+1)^3 - (m+1) - 3S_1}{3} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

69. *Remarque.* — Il est bon d'indiquer, à propos des résultats consignés dans ce chapitre, un moyen général usité en algèbre pour vérifier l'exactitude d'une formule qu'on donne sans démonstration.

La formule $\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$, par exemple, satisfait au calcul direct pour $m=1$, $m=2$, $m=3$. Il suffit alors de vérifier qu'étant exacte pour une valeur quelconque de m, elle est encore exacte pour la valeur immédiatement supérieure $m+1$; c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6},$$

ou, puisqu'on a par hypothèse

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

$$(m+1)^2 = \frac{(m+1)[(m+2)(2m+3) - m(2m+1)]}{6}.$$

On transforme facilement cette égalité en identité.

CHAPITRE VI.

DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES.

70. Nous avons vu déjà (*Alg. élém.*, 186) que la résolution des équations du second degré conduit à des quantités imaginaires de la forme $a \pm bi$, i étant le signe représentatif de $\sqrt{-1}$. On soumet ces expressions aux mêmes règles de calcul que les quantités réelles, en convenant seulement de remplacer dans les résultats obtenus i^2 par -1 : c'est étendre à $\sqrt{-1}$ la définition ordinaire de la racine carrée d'un nombre.

L'expression imaginaire $a + bi$ est évidemment racine de l'équation du second degré $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$. La seconde racine de cette équation est $a - bi$. Les expressions imaginaires $a+bi$ et $a - bi$ s'appellent *imaginaires conjuguées*. Elles ont une somme réelle $2a$ et un produit réel $a^2 + b^2$.

71. On a, d'après la convention faite,

$$\sqrt{-1}=i,\quad (\sqrt{-1})^2=i^2=-1,\quad (\sqrt{-1})^3=i^3=i^2.i=-\sqrt{-1}=-i,$$
$$(\sqrt{-1})^4=i^4=i^2.i^2=1,\quad (\sqrt{-1})^5=i^4.i=\sqrt{-1}=i,\ldots.$$

On obtiendra donc périodiquement les mêmes résultats, de sorte qu'on peut écrire, p désignant un entier quelconque,

$$(\sqrt{-1})^{4p}=(i^4)^p=1,\quad (\sqrt{-1})^{4p+1}=i^{4p}.i=\sqrt{-1}=i,$$
$$(\sqrt{-1})^{4p+2}=i^{4p}.i^2=-1,\quad (\sqrt{-1})^{4p+3}=i^{4p}.i^3=-\sqrt{-1}=-i.$$

72. En combinant les deux expressions $a+bi$, $c+di$, par voie d'addition, de soustraction, de multiplication et de division, on trouve des résultats de même forme que les expressions proposées.

On a, en effet,

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i,$$
$$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i,$$
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.i.$$

Tous les résultats trouvés sont bien de la forme $\mathrm{A}+\mathrm{B}i$.

Développement de $(a+b\sqrt{-1})^m$.

73. Considérons maintenant l'expression $(a+bi)^m$, où m représente un nombre entier positif. Par convention et en appliquant la formule du binôme, nous aurons

$$(a+bi)^m=a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}bi+\frac{m(m-1)}{1\;.\;2}a^{m-2}b^2i^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\;.\;2\;.\;3}a^{m-3}b^3i^3+\ldots$$

Remplaçons les puissances successives de i par les valeurs trouvées au n° 71, il viendra

$$(a+bi)^m=a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}bi-\frac{m(m-1)}{1\;.\;2}a^{m-2}b^2$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\;.\;2\;.\;3}a^{m-3}b^3i+\ldots.$$

Les termes du développement sont donc alternativement réels et imaginaires, et à deux termes positifs succèdent deux termes négatifs. On pourra donc écrire

$$(a+bi)^m=\left[a^m-\frac{m(m-1)}{1\;.\;2}a^{m-2}b^2\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4}a^{m-4}b^4-\ldots\right]$$
$$+\left[\frac{m}{1}a^{m-1}.b-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\;.\;2\;.\;3}a^{m-3}b^3\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\;.\;5}a^{m-5}b^5-\ldots\right]i.$$

Dans chaque parenthèse, les signes alterneront.

On arrive donc encore à

(1) $$(a+bi)^m = A + Bi,$$

A et B représentant les deux parenthèses.

On trouverait de même

(2) $$(a-bi)^m = A - Bi,$$

puisque i seul change de signe.

Nous laissons de côté le cas où m est fractionnaire ou négatif, cas où la transformation réussit encore (88).

Si l'on multiplie membre à membre les égalités (1) et (2), il vient

$$(a^2+b^2)^m = A^2 + B^2;$$

ce qui prouve qu'*une puissance quelconque entière et positive de la somme de deux carrés, représente encore elle-même la somme de deux carrés.*

Par exemple, si l'on supposait $m = 2$, les formules précédentes donneraient $A = a^2 - b^2$ et $B = 2ab$. On aurait donc

$$(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2,$$

égalité facile à vérifier.

74. Nous avons déjà montré (*Alg. élém.*, 208) que les expressions de la forme $\sqrt{a \pm bi}$ peuvent aussi se ramener au type commun indiqué. Il en sera de même de l'expression générale $\sqrt[p]{a \pm bi}$, qui rentre dans le cas de m fractionnaire (73), puisqu'on a

$$\sqrt[p]{a \pm bi} = (a \pm bi)^{\frac{1}{p}}.$$

Du module.

75. Étant donnée l'expression imaginaire $a + bi$, l'expression réelle et positive $\sqrt{a^2+b^2}$ est appelée le *module* de cette expression.

Deux expressions imaginaires conjuguées ont même module, et leur produit est égal au carré de ce module (70).

76. *Le produit de deux expressions imaginaires a pour module le produit de leurs modules.*

Soit

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Le module du produit obtenu est

$$\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} = \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}.$$

Le théorème est donc démontré. *On l'étend sans peine à un nombre quelconque de facteurs.*

77. Si l'on a $a + bi = 0$, il faut qu'on ait séparément $a = 0$ et $b = 0$, aucune réduction ne pouvant s'opérer entre a et bi.

Quand une expression imaginaire est nulle, son module est donc nul.

Réciproquement, *si le module est nul, l'expression correspondante est aussi nulle;* car la condition $\sqrt{a^2+b^2} = 0$ entraîne celles-ci : $a = 0$, $b = 0$.

Si l'on a

$$a+bi=a'+b'i,$$

on en déduit

$$(a-a')+(b-b')i=0,$$

d'où

$$a=a' \quad \text{et} \quad b=b'.$$

On *vérifie* ainsi que toute équation de la forme indiquée se partage nécessairement en deux autres équations.

78. *Pour qu'un produit de facteurs imaginaires soit nul, il faut et il suffit qu'un des facteurs soit nul.*

En effet, si le produit est nul, son module sera nul. Ce module étant le produit des modules des facteurs, il faudra, puisque ces modules sont des quantités réelles, que l'un d'eux soit nul. Mais alors le facteur imaginaire correspondant sera aussi nul (77). De même, si l'un des facteurs imaginaires est nul, son module sera nul; le module du produit sera donc nul, ainsi que le produit.

79. *Le module de la somme ou de la différence de deux expressions imaginaires est compris entre la somme et la différence de leurs modules.*

Soient $a+bi$ et $c+di$ les expressions considérées; désignons par ρ et ρ' leurs modules, par R le module de leur somme. On aura

$$R^2=(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+c^2+b^2+d^2+2(ac+bd).$$

Mais $\rho^2=a^2+b^2$, $\rho'^2=c^2+d^2$; donc

$$R^2=\rho^2+\rho'^2+2(ac+bd).$$

D'ailleurs, on peut écrire

$$\rho^2\rho'^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

Par conséquent, la valeur de $\rho\rho'$ est plus grande que $ac+bd$. On a donc à la fois

$$R^2<\rho^2+\rho'^2+2\rho\rho' \quad \text{et} \quad R^2>\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho',$$

c'est-à-dire que R tombe entre la somme $\rho+\rho'$ et la différence $\rho-\rho'$.

Même démonstration, si l'on considère la différence des deux expressions imaginaires.

Changement d'ordre des facteurs imaginaires.

80. Le théorème fondamental sur le changement d'ordre des facteurs (*Alg. élém.*, 23) s'étend immédiatement au cas d'un produit composé de facteurs imaginaires. En effet, si l'on remplace $\sqrt{-1}$ par la lettre i, et si l'on applique les règles ordinaires du calcul algébrique, l'ordre adopté dans la multiplication ne modifiera en rien les coefficients des diverses puissances de i. On obtiendra donc, dans tous les cas, des polynômes identiques, c'est-à-dire que le produit sera toujours composé de la même partie réelle et de la même partie imaginaire. De plus, on pourra aussi bien remplacer les diverses puissances de i par leurs valeurs, dans le courant du calcul qu'à la fin de ce calcul, puisque toutes ces substitutions se résument dans la relation $i^2=-1$.

81. Les quantités imaginaires permettent souvent d'arriver d'une ma-

nière rapide à des résultats dont la démonstration directe pourrait être pénible : nous en avons déjà donné un exemple (73). Ce qui légitime l'emploi *transitoire* de ces symboles, c'est que les relations qui servent de point de départ sont basées sur l'idée de l'*ordre*, c'est-à-dire sur un simple fait de *combinaison*. Nous allons en donner un exemple, en nous appuyant sur le théorème précédent (80).

Soit le produit

$$P = (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di).$$

Si l'on multiplie séparément les deux premiers facteurs et séparément les deux derniers, on a

$$P = (a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Si l'on multiplie séparément le premier et le troisième, puis le second et le quatrième facteur, il vient

$$P = [(ac-bd)+(ad+bc)i][(ac-bd)-(ad+bc)i]$$

c'est-à-dire

$$P = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Si l'on multiplie enfin séparément le premier et le quatrieme facteur, puis le second et le troisième, on aura

$$P = [(ac+bd)-(ad-bc)i][(ac+bd)+(ad-bc)i],$$

c'est-à-dire

$$P = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

On arrive donc à cette formule remarquable

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac \pm bd)^2+(ad \mp bc)^2.$$

Dans le second membre, les signes supérieurs et inférieurs doivent être pris ensemble.

Il est très-facile de parvenir directement au résultat obtenu ; mais cet exemple montre néanmoins tout le parti qu'on peut tirer de l'emploi des imaginaires.

Des racines imaginaires de l'unité.

82. *Un radical quelconque admet autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans son indice.*

Considérons, par exemple, le radical $\sqrt[3]{A}$, et supposons A positif. $\sqrt[3]{A}$ admet alors une valeur positive a (*Alg. élém.*, 69). Toute quantité dont le cube égale A est une racine cubique de A : on cherche donc les valeurs de x qui satisfont à l'équation

(1) $$x^3 = A \quad \text{ou} \quad x^3 - a^3 = 0.$$

Le binôme $x^3 - a^3$ est divisible par $x-a$, de sorte qu'on peut remplacer l'équation (1) par la suivante :

(2) $$(x-a)(x^2+ax+a^2) = 0.$$

On est donc ramené à résoudre les équations

$$x - a = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + ax + a^2 = 0;$$

c'est-à-dire qu'on a

$$x = a \quad \text{et} \quad x = \frac{a(-1 \pm i\sqrt{3})}{2}.$$

On retrouve donc la racine cubique positive a, mais on en obtient deux autres qui sont imaginaires. D'ailleurs, A peut être une quantité quelconque, et il suffit que a représente une de ses racines cubiques.

Quel que soit le radical $\sqrt[m]{A}$ qu'on considère, la question proposée revient toujours à la résolution d'une équation. Il s'agit de trouver toutes les quantités dont la puissance $m^{ième}$ reproduit A, et dès lors toutes les valeurs de x qui satisfont à l'équation

$$x^m - A = 0.$$

Ainsi, il faut prouver qu'une pareille équation a toujours m racines. Nous reviendrons plus tard sur ce théorème fondamental, base de la théorie générale des équations algébriques.

83. Nous venons de trouver pour $\sqrt[3]{A}$ les trois valeurs

$$a, \quad a\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right), \quad a\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Si $A = 1$, on peut prendre $a = 1$. Par conséquent, les trois racines cubiques de l'unité sont

$$1, \quad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

En les comparant aux racines cubiques de A, on voit qu'on obtient les trois racines cubiques d'une quantité quelconque, en multipliant l'une d'elles par les trois racines cubiques de l'unité.

Cette importante propriété est générale. En effet, si a est une valeur quelconque de $\sqrt[m]{A}$ et si les m valeurs de $\sqrt[m]{1}$ sont, $1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$, les produits $a, a\alpha, a\beta, a\gamma, \ldots$, élevés à la puissance m, donneront toujours a^m ou A, puisqu'on a par hypothèse

$$1 = \alpha^m = \beta^m = \gamma^m = \ldots.$$

Ainsi, *en multipliant par les m racines de l'unité, l'une des valeurs de* $\sqrt[m]{A}$, *on obtient toutes les valeurs de ce radical.*

84. Ce qu'on vient de dire pour A pouvant s'appliquer à l'unité elle-même, on voit qu'*on ne fait que reproduire les racines de l'unité dans un autre ordre, lorsqu'on multiplie chacune d'elles par toutes les autres.*

Nous avons trouvé pour racines cubiques de l'unité

$$1, \quad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Multiplions-les toutes les trois par la dernière, il viendra

$$\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{(-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})}{4} = 1, \quad \frac{(-1 - i\sqrt{3})^2}{4} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

On voit en même temps que *chacune des racines imaginaires est le carré de l'autre:* de sorte que, si l'une des racines imaginaires de l'unité est désignée par α, l'autre pourra l'être par α^2.

Transformation trigonométrique des expressions imaginaires.

85. Soit l'expression

$$a+bi.$$

On peut toujours poser

$$a=\rho\cos\varphi \quad \text{et} \quad b=\rho\sin\varphi.$$

En effet, quelles que soient les valeurs réelles de a et de b, on déduira toujours de ces relations une valeur positive de ρ qui sera

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},$$

et une valeur de φ comprise entre o et 2π, qui dépendra de l'équation

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{b}{a}.$$

Pour obtenir ces valeurs, il suffit d'ajouter membre à membre les carrés des relations posées, et de diviser ces mêmes relations membre à membre.

Réciproquement, si l'on a

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\varphi=\frac{b}{a},$$

on en déduit

$$\cos\varphi=\frac{1}{+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}}=\frac{a}{+\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{+\rho},$$

$$\sin\varphi=\frac{\operatorname{tang}\varphi}{+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}}=\frac{b}{+\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{+\rho}.$$

Par conséquent,

$$a=\rho\cos\varphi \quad \text{et} \quad b=\rho\sin\varphi.$$

Ces résultats coïncideront avec les relations prises pour point de départ, si l'on a soin de choisir pour φ celui des deux angles qui, ayant pour tangente $\frac{b}{a}$, a son sinus de même signe que b. C'est ce qu'on vérifiera facilement.

Il est donc démontré que toute expression imaginaire peut être mise, et d'une seule manière, sous la forme

$$\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ est le *module* de l'expression imaginaire ainsi transformée (75), φ en est *l'argument*.

Les quantités réelles rentrent dans cette forme; car on a

$$+\mathrm{A}=\mathrm{A}(\cos 0+i\sin 0),$$
$$-\mathrm{A}=\mathrm{A}(\cos\pi+i\sin\pi).$$

86. *Pour multiplier deux expressions imaginaires sous forme trigono-*

métrique, il suffit de multiplier leurs modules et d'ajouter leurs arguments.

On a, en effet (72) :

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \times \rho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \rho\rho'[\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')].$$

Réciproquement, *pour diviser deux expressions imaginaires, il suffit de diviser leurs modules et de retrancher leurs arguments.*

87. D'après le théorème précédent, *le produit d'autant de facteurs imaginaires qu'on voudra, s'obtient en multipliant tous les modules et en ajoutant tous les arguments.*

Si l'on considère m facteurs et si tous deviennent égaux, il faut élever le module à la puissance m et multiplier l'argument par m.

On a donc

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^m = \rho^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi).$$

Si, en particulier, *on suppose le module égal à* 1, il vient

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi.$$

Cette égalité constitue la formule de MOIVRE (*).

88. Cette formule est vraie que m soit entier ou fractionnaire, positif ou négatif. Je dis d'abord qu'on a bien

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{p}} = \cos\frac{\varphi}{p} + i\sin\frac{\varphi}{p}.$$

En effet, élevons les deux membres de cette égalité à la puissance p. Le premier membre deviendra $\cos\varphi + i\sin\varphi$, et il en sera de même du second en appliquant la formule précédente (87), ce qu'on a le droit de faire puisque p est supposé entier et positif.

On a aussi

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{m}{p}} = \cos\frac{m\varphi}{p} + i\sin\frac{m\varphi}{p},$$

puisque, pour élever à la puissance $\frac{m}{p}$, il faut par définition élever d'abord la quantité considérée à la puissance $\frac{1}{p}$, puis le résultat obtenu à la puissance m.

Enfin,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-m} = \cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi).$$

Car

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-m} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m} = \frac{1}{\cos m\varphi + i\sin m\varphi}.$$

Or on peut remplacer 1 par $\cos 0 + i\sin 0$, d'où (86)

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-m} = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{\cos m\varphi + i\sin m\varphi} = \cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi).$$

(*) On remarquera l'analogie frappante des propriétés précédentes avec celles des logarithmes.

89. Il est essentiel de remarquer que le premier membre de l'égalité

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{p}} = \cos\frac{\varphi}{p} + i\sin\frac{\varphi}{p}$$

admet p valeurs différentes (82), puisque ce premier membre revient à $\sqrt[p]{\cos\varphi + i\sin\varphi}$, tandis que le second membre n'en admet qu'une seule.

Pour que la formule soit générale, il faut remplacer φ par $\varphi + 2k\pi$, k étant un entier quelconque. Il viendra alors

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{p}} = \cos\frac{2k\pi + \varphi}{p} + i\sin\frac{2k\pi + \varphi}{p},$$

et en remplaçant k par une valeur quelconque, le second membre donnera l'une des p valeurs du premier. On aura bien, en effet (87),

$$\left(\cos\frac{2k\pi + \varphi}{p} + i\sin\frac{2k\pi + \varphi}{p}\right)^p = \cos(2k\pi + \varphi) + i\sin(2k\pi + \varphi)$$
$$= \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Je dis de plus que, si l'on donne à k les p valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, (p-1)$, les p valeurs prises par l'expression $\cos\frac{2k\pi + \varphi}{p} + i\sin\frac{2k\pi + \varphi}{p}$, seront différentes. Car les arcs obtenus

$$\frac{\varphi}{p}, \quad \frac{2\pi + \varphi}{p}, \quad \frac{4\pi + \varphi}{p}, \ldots, \quad \frac{2(p-1)\pi + \varphi}{p},$$

forment alors une progression par différence dont la raison $\frac{2\pi}{p}$ représente la $p^{\text{ième}}$ partie de la circonférence. Deux quelconques de ces arcs diffèrent donc d'une quantité moindre qu'une circonférence et, par conséquent, ne peuvent avoir à la fois même sinus et même cosinus. On trouvera donc toutes les déterminations du premier membre de l'égalité

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{p}} = \cos\frac{2k\pi + \varphi}{p} + i\sin\frac{2k\pi + \varphi}{p},$$

en donnant successivement à k les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, (p-1)$.

90. De même, lorsqu'on voudra rendre à la formule

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{m}{p}} = \cos\frac{m\varphi}{p} + i\sin\frac{m\varphi}{p}$$

toute sa généralité, on devra la remplacer par celle-ci :

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{m}{p}} = \cos\frac{2k\pi + m\varphi}{p} + i\sin\frac{2k\pi + m\varphi}{p},$$

dans laquelle on substituera à k les nombres $0, 1, 2, 3, \ldots, (p-1)$.

En effet, on a

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi.$$

Si l'on divise maintenant par p l'exposant m du premier membre, c'est-à-dire si l'on en extrait la racine $p^{ième}$, le premier membre admettra p valeurs différentes et, pour que le second membre puisse les donner toutes, on devra le remplacer, d'après ce qu'on vient de dire (89), par

$$\cos\frac{2k\pi + m\varphi}{p} + i\sin\frac{2k\pi + m\varphi}{p}.$$

Applications trigonométriques de la formule de Moivre.

91. On a (87)

$$\cos m\varphi + i\sin m\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^m,$$

m étant entier et positif.

Développons le second membre par la formule du binôme, comme nous avons développé $(a+bi)^m$. Nous aurons (73)

$$\left\{\begin{aligned}&\cos m\varphi + i\sin m\varphi =\\ &\left[\cos^m\varphi - \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos^{m-4}\sin^4\varphi - \ldots\right]\\ &+\left[m\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi + \ldots\right]i.\end{aligned}\right.$$

Il en résulte immédiatement (77)

$$(1)\qquad \cos m\varphi = \cos^m\varphi - \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos^{m-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots,$$

$$(2)\qquad \sin m\varphi = m\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\cos^{m-5}\varphi\sin^5\varphi - \ldots.$$

Ces formules donnent le sinus et le cosinus d'un multiple quelconque d'un arc, en fonction du sinus et du cosinus de l'arc simple.

En divisant membre à membre les formules précédentes, on a

$$\operatorname{tang} m\varphi = \frac{m\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi + \ldots}{\cos^m\varphi - \dfrac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi + \ldots}.$$

Divisons les deux termes du second membre par $\cos^m\varphi$ et simplifions, il viendra

$$\operatorname{tang} m\varphi = \frac{m\operatorname{tang}\varphi - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\operatorname{tang}^3\varphi + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\operatorname{tang}^5\varphi - \ldots}{1 - \dfrac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{tang}^2\varphi + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\operatorname{tang}^4\varphi - \ldots}.$$

A l'aide de cette formule, on peut obtenir la tangente d'un multiple quelconque d'un arc, en fonction de la tangente de l'arc simple.

92. Reprenons les relations (1) et (2). On peut les écrire comme il suit, en mettant dans les seconds membres $\cos^m \varphi$ en facteur commun:

$$\cos m\varphi = \cos^m\varphi \left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{m(m-1)}{1 \, . \, 2} \tang^2\varphi \\ + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} \tang^4\varphi - \ldots \end{array} \right],$$

$$\sin m\varphi = \cos^m\varphi \left[\begin{array}{l} m \tang\varphi - \dfrac{m(m-1(m-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} \tang^3\varphi \\ + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \, . \, 5} \tang^5\varphi - \ldots \end{array} \right].$$

Posons $m\varphi = x$, d'où $m = \dfrac{x}{\varphi}$. Nos formules deviendront

$$\cos x = \cos^m\varphi \left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{x(x-\varphi)}{1 \, . \, 2} \, . \, \dfrac{\tang^2\varphi}{\varphi^2} \\ + \dfrac{x(x-\varphi)(x-2\varphi)(x-3\varphi)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} \dfrac{\tang^4\varphi}{\varphi^4} - \ldots \end{array} \right],$$

$$\sin x = \cos^m\varphi \left[\begin{array}{l} x \, . \, \dfrac{\tang\varphi}{\varphi} - \dfrac{x(x-\varphi)(x-2\varphi)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} \dfrac{\tang^3\varphi}{\varphi^3} \\ + \dfrac{x(x-\varphi)(x-2\varphi)(x-3\varphi)(x-4\varphi)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \, . \, 5} \dfrac{\tang^5\varphi}{\varphi^5} - \ldots \end{array} \right].$$

Faisons converger φ vers o; x étant supposé rester *invariable*, m prendra des valeurs de plus en plus grandes fournies par la relation $m = \dfrac{x}{\varphi}$. A la limite, φ devenant o, on aura (*Trig.*, 31)

$$(1) \qquad \frac{\tang\varphi}{\varphi} = 1 \quad \text{et} \quad \cos^m\varphi = 1 \quad (*).$$

(*) Il est nécessaire de prouver qu'on a rigoureusement $\cos \varphi^m = 1$, quand on suppose $\varphi = 0$ et, par suite, $m = \infty$; Lorsque φ n'est pas encore o, mais a une très-petite valeur, m n'est pas encore infini, mais a une très-grande valeur. On a donc à élever à une très-grande puissance une quantité très-peu différente de 1, mais qui tombe au-dessous de 1. Le résultat obtenu est donc toujours inférieur à l'unité. Ainsi, on a toujours $\cos^m \varphi$ ou, ce qui revient au même,

$$\cos^m \frac{x}{m} < 1.$$

D'autre part (*Trig.*, 24), on a

$$\cos \frac{x}{m} = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2m},$$

c'est-à-dire

$$\cos \frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m^2}, \quad \text{ou} \quad \cos^m \frac{x}{m} > \left(1 - \frac{x^2}{2m^2}\right)^m;$$

Par suite, il viendra

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$
$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots.$$

On obtient ainsi les développements du sinus et du cosinus d'un arc, en fonction des puissances croissantes de cet arc. Ces développements sont illimités, puisque, quand on suppose $\varphi = 0$, m atteint une valeur infinie.

On démontre, comme nous le verrons bientôt (Livre II), que les *séries* ainsi obtenues finissent toujours par devenir *convergentes*.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1° Réduire l'expression $\sqrt{a^2+1}$ en fraction continue.

2° Prouver que toute fraction continue périodique représente la racine d'une équation du second degré.

3° Trouver un nombre tel, qu'en le divisant par 5, 7, 11, on obtienne successivement pour restes 3, 5, 8.

4° Résoudre en nombres entiers et positifs le système

$$x + y + z = 30,$$
$$20x + 4y + z = 120.$$

5° Résoudre l'équation $x^6 - 2x^3\cos\varphi + 1 = 0$.

6° En appelant α l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité, vérifier la formule

$$(a+b+c)(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha) = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

---

mais on a

$$\left(1-\frac{x^2}{2m^2}\right)^2 = 1 - 2\cdot\frac{x^2}{2m^2} + \frac{x^4}{4m^4}, \quad \text{ou} \quad \left(1-\frac{x^2}{2m^2}\right)^2 > 1 - 2\cdot\frac{x^2}{2m^2};$$
$$\left(1-\frac{x^2}{2m^2}\right)^3 > 1 - 3\cdot\frac{x^2}{2m^2} + 2\cdot\frac{x^4}{4m^4}, \quad \text{ou} \quad \left(1-\frac{x^2}{2m^2}\right)^3 > 1 - 3\cdot\frac{x^2}{2m^2}.$$

En continuant ainsi, on arrivera à l'inégalité

$$\left(1-\frac{x^2}{2m^2}\right)^m > 1 - m\cdot\frac{x^2}{2m^2}.$$

Il en résulte que $\cos^m \frac{x}{m}$ est à la fois moindre que l'unité et plus grand que $1 - m\cdot\frac{x^2}{2m^2} = 1 - \frac{x^2}{2m}$. La limite de cette dernière quantité étant l'unité quand m devient infini, il en est de même de $\cos^m \frac{x}{m}$ ou de $\cos^m \varphi$.

LIVRE DEUXIÈME.

SÉRIES ET FONCTIONS DÉRIVÉES.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS SUR LES SÉRIES

Définitions.

93. Comme nous l'avons déjà dit (*Alg. élém.*, 104), une *série* est une suite indéfinie de termes qui se déduisent les uns des autres d'après une loi déterminée.

Il peut être utile de remplacer par des séries certaines fonctions compliquées, soit pour calculer plus simplement leurs valeurs numériques, soit pour étudier leurs propriétés. Mais alors *il faut que la série employée ait réellement pour limite la fonction considérée.*

Les séries les plus simples sont ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de la variable, et ce sont aussi les premières qu'on ait rencontrées, en appliquant la règle de la division à la fonction $\frac{1}{a+bx}$ et celle de l'extraction des racines à l'expression $\sqrt[3]{a+bx}$.

Lorsqu'une série a une limite, peu importe le nombre de termes qu'il faut y considérer s'il ne s'agit que d'une démonstration indépendante de toute valeur numérique. Au contraire, s'il s'agit d'obtenir une valeur suffisamment approchée de la fonction, il est nécessaire, pour que les calculs ne deviennent pas impraticables, que le dernier terme de la série dont on doive tenir compte ne soit pas trop éloigné.

Nous nous bornerons ici à étudier les séries en elles-mêmes, c'est-à-dire nous chercherons quelques caractères qui permettent de s'assurer de la légitimité de leur emploi.

94. *Une série est convergente, lorsque la somme de ses termes, à mesure qu'on en considère davantage, converge vers une certaine limite.* Une progression géométrique décroissante est une série convergente.

Toute série qui n'est pas convergente est dite divergente. L'emploi d'une pareille série ne présente, en général, aucune utilité.

Une série est divergente, soit parce que la somme de ses termes augmente indéfiniment, comme cela a lieu dans les progressions géométriques croissantes; soit parce que la somme de ses termes oscille entre certaines valeurs sans converger vers une limite fixe, comme cela a lieu pour la série $+1-1+1-1+\ldots$

95. Dans ce qui suit, la série considérée sera représentée par la

somme des termes

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots.$$

Nous désignerons par U la *somme* de la série ou *sa limite*, par U_n, U_{n+1}, U_{n+2}, ... les différentes sommes obtenues en considérant les n, les $n+1$, les $n+2$...., premiers termes de la série. La différence $U - U_n$ s'appelle *reste* de la série.

96. Il est d'abord évident que, *lorsqu'une série est convergente, ses termes approchent indéfiniment de zéro*. Dans ce cas, en effet, pour n assez grand, il faut que la différence $U - U_n$ soit moindre qu'une quantité α aussi petite qu'on voudra, sans quoi la série ne tendrait pas vers une limite fixe. Donc la différence de deux sommes consécutives, à partir d'un certain rang, sera moindre que α si elles ne comprennent pas U entre elles, et moindre que 2α si elles comprennent U. Or la différence de deux sommes consécutives est le dernier terme considéré. Par conséquent, à partir d'un certain rang, les termes de la série sont inférieurs à 2α, c'est-à-dire convergent vers zéro.

Mais la condition indiquée peut être remplie sans que la série soit convergente. Par exemple, la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

n'est pas convergente, et cependant ses termes approchent indéfiniment de zéro. Elle n'est pas convergente, car la somme

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

est, quel que soit n, plus grande que $\frac{1}{2}$, puisqu'elle se compose de n termes plus grands que $\frac{1}{2n}$, sauf le dernier égal à $\frac{1}{2n}$. A partir d'un terme *quelconque*, on peut donc prolonger assez la série pour faire croître sa somme de $\frac{1}{2}$. Et il en résulte que cette somme peut, en considérant un nombre suffisant de groupes plus grands que $\frac{1}{2}$, surpasser toute limite donnée.

97. I. *Pour qu'une série soit convergente, il faut et il suffit qu'en prenant n assez grand, la somme d'un nombre quelconque de termes après les n premiers, tombe en valeur absolue au-dessous d'une quantité donnée aussi petite qu'on voudra.*

En effet, si la série est convergente, les sommes consécutives U_n, U_{n+1}, ..., U_{n+p}, diffèrent toutes de U d'une quantité α aussi petite qu'on voudra. Et il en résulte que leurs différences (de la première à la dernière), exprimées par

$$u_{n+1},\ u_{n+1} + u_{n+2}, \ldots,\ u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p},$$

sont, en valeur absolue, toutes plus petites que $2\alpha = \alpha'$ (96).

Réciproquement, si U_n et U_{n+p}, p étant *quelconque*, diffèrent, en va-

leur absolue et pour n assez grand, d'une quantité moindre que α', U ne peut surpasser $U_n + \alpha'$ ni tomber au-dessous de $U_n - \alpha'$. Par conséquent, U approche autant qu'on veut de $U_n \pm \alpha' \ldots$ et, dès lors, a une limite déterminée, de sorte que la série est convergente.

98. II. Il suit de ce théorème que, *lorsqu'une série est convergente quand on prend tous ses termes avec le même signe, elle l'est encore lorsqu'on les multiplie tous par un même nombre ou par des nombres différents, positifs ou négatifs, mais finis.*

En effet, la somme arithmétique des termes de la première série est supposée, à partir d'un certain rang, moindre que toute quantité donnée. Il en sera donc de même dans la série transformée; car la somme de ses termes à partir du même rang tombera au-dessous du produit de la somme des termes correspondants de la première série, par le plus grand des facteurs introduits qui a une valeur déterminée.

99. On ne peut pas toujours reconnaître que la somme d'un nombre quelconque de termes de la série considérée tombe, à partir d'un certain rang, au-dessous de toute quantité donnée.

Il faut alors, pour se rendre compte de la nature de la série, avoir recours à d'autres théorèmes. Nous allons indiquer les plus simples, en considérant d'abord les séries dont tous les termes sont positifs.

Séries dont les termes sont positifs.

100. Lorsque les termes d'une série sont tous positifs, la somme des termes croît sans cesse : indéfiniment si la série est divergente, en s'approchant d'une certaine limite si la série est convergente.

Il suffit donc pour prouver, dans ce cas, la convergence de la série, de reconnaître que la somme de ses termes ne croît pas indéfiniment.

Si la série donnée a ses termes constamment plus petits que les termes correspondants d'une autre série convergente à termes positifs, elle sera convergente. Si elle a ses termes plus grands que ceux d'une autre série divergente à termes positifs, elle sera divergente.

101. En s'apuyant sur la remarque précédente, on démontre immédiatement le théorème suivant :

III. *Soient deux séries à termes positifs*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + v_{n+1} + \ldots;$$

si l'on a constamment, à partir d'un certain rang, $\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$, *la convergence de la première série entraînera celle de la seconde série.*

En effet, on a alors

$$\frac{v_n}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} > \frac{v_{n+2}}{u_{n+2}} \cdots$$

Si l'on multiplie la première série par $\frac{v_n}{u_n}$, tous ses termes, à partir du $(n+1)^{ième}$, deviendront *plus grands* que les termes correspondants de la seconde série, et elle ne cessera pas d'être convergente (98, II). La seconde série sera donc convergente (100).

Si, la première série étant divergente, on a au contraire $\frac{v_n}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}$, la seconde série sera divergente.

102. IV. *Une série à termes positifs est convergente si, à partir d'un certain rang, le rapport d'un terme au précédent est constamment inférieur à une limite fixe moindre que l'unité. Elle est divergente, lorsque le rapport considéré est constamment supérieur à l'unité.*

Soit la série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait une limite α moindre que l'unité, on pourra choisir un nombre k *compris* entre α et l'unité, et prendre n assez grand pour écrire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < k, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < k, \quad \ldots.$$

On en déduit :

$$u_{n+1} < u_n k, \quad u_{n+2} < u_n k^2, \quad u_{n+3} < u_n k^3, \quad \ldots.$$

Par conséquent, tous les termes de la série, à partir du $(n+1)^{ième}$, sont moindres que ceux de la progression géométrique décroissante

$$u_n k + u_n k^2 + u_n k^3 + \ldots.$$

La série proposée est donc convergente (100).

On a d'ailleurs, dans ce cas,

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots < u_n (1 + k + k^2 + \ldots),$$

c'est-à-dire (*Alg. élém.*, 101)

$$\lim (u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots) < \frac{u_n}{1-k};$$

de sorte que l'erreur commise, en s'arrêtant dans la sommation de la série au terme u_n, est moindre que $\frac{u_n}{1-k}$.

Si, au contraire, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite α supérieure à l'unité, on pourra choisir un nombre k *compris* entre 1 et α, et prendre n assez grand pour écrire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > k, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} > k, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} > k, \ldots.$$

Les termes de la série proposée seront alors, à partir du $(n+1)^{ième}$, plus grands que ceux de la progression géométrique croissante

$$u_n k + u_n k^2 + u_n k^3 + \ldots.$$

Cette série sera donc divergente (100).

Lorsque la limite α est égale à l'unité, on ne peut plus rien affirmer : la série peut être convergente ou divergente.

Il est bon de remarquer que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne tend pas toujours vers

une limite déterminée. Il suffit que ce rapport finisse par rester toujours *au-dessous* d'un nombre déterminé plus petit que 1 pour que la série soit convergente, *au-dessus* d'un nombre déterminé plus grand que 1 pour que la série soit divergente. On ne peut rien affirmer si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est tantôt plus petit, tantôt plus grand que 1.

103. *Exemples :*

1° Soit la série

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots.$$

Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est ici représenté par $\frac{x}{n}$: pour n assez grand et pour une valeur déterminée de x, il finira donc toujours par tomber au-dessous de 1. Donc, quel que soit x, la série considérée est convergente.

2° Soit la série

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots.$$

On a ici

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+1}\cdot x=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot x.$$

Le rapport considéré a donc x pour limite. Si x est moindre que 1, la série est convergente; elle est divergente, si x est supérieur à 1.

Si l'on suppose $x=1$, on retombe sur la série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots$$

déjà considérée (96), et nous savons qu'elle est divergente.

On donne à cette dernière série le nom de série *harmonique*, parce que trois termes consécutifs ou trois termes équidistants quelconques y forment une *proportion harmonique* (*Compl. de Géom.*, 24). On a bien, en effet,

$$\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+2}},$$

ou, plus généralement,

$$\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}}{\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+2p}}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+2p}}.$$

3° Soit la série

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots.$$

On a ici

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} : \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+2} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}}.$$

La limite α (102) étant égale à l'unité, on ne peut rien affirmer. Mais, en remarquant que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

on peut évidemment écrire

$$U_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

et cette égalité prouve que la série est convergente et que sa limite est l'unité.

4° Soit la série

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}x^{n-1}$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}x^n + \ldots.$$

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n-1}{2n}\cdot x = \frac{2-\frac{1}{n}}{2}\cdot x.$$

La limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égale à x. La série est donc convergente pour $x < 1$ et divergente pour $x > 1$.

Si l'on suppose $x = 1$, on ne peut prononcer immédiatement. Pour décider, comparons la série proposée avec la série harmonique

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots.$$

Les deux premiers termes sont les mêmes; mais on a au delà

$$\frac{1.3}{2.4} > \frac{1}{3}, \quad \frac{1.3.5}{2.4.6} > \frac{1}{4}, \ldots, \quad \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} > \frac{1}{n}.$$

En effet, pour passer dans la série harmonique du terme $\frac{1}{n-1}$ au terme $\frac{1}{n}$, il faut multiplier $\frac{1}{n-1}$ par $\frac{n-1}{n}$. Dans la série proposée, le multiplicateur correspondant à employer est $\frac{2n-3}{2n-2}$; et, pour qu'on ait $\frac{2n-3}{2n-2} > \frac{n-1}{n}$, il suffit que n soit plus grand que 2, c'est-à-dire il suffit qu'on dépasse les deux premiers termes. Ainsi, les termes de la série con-

sidérée sont, à partir du troisième, constamment supérieurs aux termes correspondants de la série harmonique. La série proposée est donc divergente.

On aurait pu encore s'appuyer sur le théorème III (101) pour prouver la divergence de la série; car, en formant les deux rapports $\frac{v_n}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}$, on a

$$\frac{\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}}{\frac{1}{n}} < \frac{\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}}{\frac{1}{n+1}}.$$

En simplifiant, il vient en effet

$$n < \frac{(n+1)(2n-1)}{2n}, \quad \text{d'où l'on tire} \quad n > 1.$$

Donc, à partir des seconds termes, la condition $\frac{v_n}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}$ est remplie.

5° Considérons enfin la série remarquable

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots.$$

Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} : \frac{1}{n^\alpha} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha.$$

Pour n infini, la limite de ce rapport est 1. On ne peut donc pas prononcer.

Mais si l'on suppose $\alpha = 1$, on retombe sur la série harmonique

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots.$$

Si α est < 1, les termes de la série proposée surpassent les termes correspondants de la série harmonique : la série est donc alors divergente.

Si l'on a $\alpha > 1$, on peut grouper les termes de la série comme il suit :

$$1, \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right), \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{7}{7^\alpha}\right), \ldots.$$

Le second groupe est moindre que

$$2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} \quad \text{ou que} \quad \frac{1}{2^{\alpha-1}}.$$

Le troisième groupe est moindre que

$$4 \cdot \frac{1}{4^\alpha} \quad \text{ou que} \quad \frac{1}{4^{\alpha-1}} = \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}}.$$

D'une manière générale, chaque groupe forme une somme moindre que la fraction initiale, multipliée par son dénominateur (abstraction faite de l'exposant α). Ainsi, le $n^{ième}$ groupe

$$\frac{1}{2^{(n-1)\alpha}} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha}$$

est moindre que

$$2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{(n-1)\alpha}} = \frac{1}{2^{(n-1)(\alpha-1)}}.$$

Les termes de la série considérée groupés de cette manière tombent donc, à partir du second groupe, au-dessous des termes correspondants de la progression par quotient

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} + \ldots + \frac{1}{2^{(n-1)(\alpha-1)}} + \ldots$$

dont la raison est $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$; et, comme α est > 1, cette progression est décroissante. Donc la série proposée, divergente pour $\alpha < 1$, est convergente pour $\alpha > 1$.

Séries dont les termes peuvent avoir des signes quelconques.

104. Lorsqu'en rendant tous les termes d'une série positifs, elle est convergente, elle le reste évidemment lorsqu'on restitue aux termes leurs différents signes (98, II). Mais on ne peut pas affirmer qu'une série qui devient divergente parce qu'on prend tous ses termes positivement, l'est en réalité.

105. V. *Lorsque les termes d'une série convergent vers zéro en décroissant d'un terme à l'autre et en étant alternativement positifs et négatifs, la série est convergente.*

Prenons un nombre quelconque de termes à partir de u_n et formons leur somme. Comme les signes des termes extrêmes peuvent être positifs ou négatifs, nous devrons écrire

$$\pm(u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - \ldots \pm u_{n+p}).$$

La valeur de la parenthèse ou la valeur absolue de la somme considérée est évidemment moindre que u_n, ce qu'on ajoute tombant toujours au-dessous de ce qu'on retranche; et comme u_n tend vers zéro, la série est convergente (97, I).

De plus, les différentes sommes U_n, $U_{n+1}, \ldots, U_{n+p}$, sont alternativement plus grandes et plus petites que la somme de la série; car, en s'arrêtant inclusivement à un terme positif, on a une somme plus grande que la limite de la série et, en s'arrêtant à un terme négatif, une somme plus petite. On voit, en même temps, que l'erreur commise en prenant n termes de la série est moindre que le terme auquel on s'arrête, c'est-à-dire que le $(n+1)^{ième}$.

106. *Exemples :*

1° Nous avons trouvé (92) :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$
$$+ \frac{x^{2n-2}}{1.2.3.4\dots(2n-2)} - \frac{x^{2n}}{1.2.3.4\dots 2n} + \dots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$
$$+ \frac{x^{2n-1}}{1.2.3.4.5\dots(2n-1)} - \frac{x^{2n+1}}{1.2.3.4.5\dots(2n+1)} + \dots.$$

Si l'on suppose qu'on donne le signe + à tous les termes, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est :

pour la première série $\frac{x^2}{(2n-1).2n}$

et, pour la seconde, $\frac{x^2}{2n(2n+1)}$.

La convergence de ces deux séries est donc vérifiée (104).

2° Soit la série

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \frac{1}{1.2.3.4.5} + \dots.$$

Les termes vont en décroissant d'un terme à l'autre; ils convergent vers zéro et sont alternativement positifs et négatifs : la série est convergente. Si l'on considère les *dix* premiers termes de la série, on approche de la somme avec une approximation marquée par le *onzième* terme ou

$$\frac{1}{1.2.3\dots 12} = 0,000000002\dots.$$

107. *Remarques.* — I. Quand une série dont les termes ont des signes quelconques est convergente, on a le droit, *sans changer l'ordre des termes,* de les grouper deux par deux, trois par trois; et l'on peut arriver ainsi à des séries plus rapidement convergentes. Mais si la série était divergente, les réductions ainsi opérées pourraient la transformer en série convergente.

II. Quand les termes d'une série ont des signes quelconques, on ne peut pas affirmer qu'en les groupant de telle ou telle manière on obtiendra la même série, parce qu'on peut prendre dans un cas plus de termes positifs ou négatifs que dans l'autre. Ainsi la série, si elle reste convergente, peut ne plus avoir la même somme, et elle peut devenir divergente.

Définition du nombre e.

108. Soit la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots n} + \dots.$$

Nous avons déjà vu (103, 1°) que cette série était convergente. *Il est facile de démontrer que sa somme est comprise entre 2 et 3, et que cette somme est un nombre incommensurable.*

La somme de la série surpasse 2, puisque $2\frac{1}{2}$ représente la somme de ses trois premiers termes. De plus, les termes suivants sont inférieurs aux termes de la progression par quotient

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots,$$

qui a pour limite

$$\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

La somme de la série tombe donc au-dessous de 3.

Supposons maintenant que la somme de la série soit une quantité commensurable $\frac{m}{n}$. On aurait

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots+\frac{1}{1.2.3\dots n}+\frac{1}{1.2.3\dots n(n+1)}+\dots,$$

ce qu'on peut évidemment écrire

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots$$
$$+\frac{1}{1.2.3\dots n}+\frac{1}{1.2.3\dots n}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots\right].$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette égalité par $1.2.3\dots n$, le premier membre devient un nombre entier. Il en est de même de toute la partie du second qui précède la parenthèse, et cette parenthèse ne se trouve plus multipliée que par 1. Or la quantité qu'elle renferme est *moindre* que 1, car elle est inférieure à la somme des termes de la progression

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\dots,$$

c'est-à-dire à

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n}.$$

L'égalité admise est donc impossible, et la somme de la série est bien un nombre incommensurable : on le désigne par la lettre *e*.

D'après ce qui précède, on peut écrire

$$U=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots+\frac{1}{1.2.3\dots n}+R,$$

R ayant pour expression

$$\frac{1}{1.2.3\dots n}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots\right].$$

Mais, puisque la parenthèse est moindre que $\frac{1}{n}$, on aura

$$R < \frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{n}.$$

L'erreur commise en calculant les $(n+1)$ premiers termes de la série est donc moindre que la $n^{ième}$ partie du dernier terme considéré. On opérera très-rapidement, les termes réduits en décimales se déduisant les uns des autres par simple division. En conservant les *douze* premiers termes de la série, on obtient avec sept décimales exactes la valeur

$$e = 2,7182818.$$

Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

109. Considérons l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. Chacun des facteurs qui la composent tend vers l'unité quand m augmente indéfiniment; mais comme leur nombre est alors infini, on ne peut plus admettre que la limite du produit est égale au produit des limites des facteurs (*Géom.*, **132**), c'est-à-dire à l'unité.

Pour trouver la véritable limite, appliquons la formule du binôme, m étant supposé entier et positif; il viendra

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1\ .\ 2} \cdot \frac{1}{m^2} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ \ldots\ n} \frac{1}{m^n} + \ldots.$$

Comme dans chaque terme du second membre l'exposant de m au dénominateur est égal au nombre des facteurs du numérateur, on peut écrire ce développement de la manière suivante, en effectuant la division :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1\ .\ 2} + \ldots + \frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\ .\ 2\ \ldots\ n} + R.$$

R désigne la somme des termes qui viennent après les $(n+1)$ premiers.

On voit immédiatement que les numérateurs des différents termes du développement étant, à partir du troisième, moindres que l'unité, les termes de ce développement sont, à partir du même rang, inférieurs à ceux qui leur correspondent dans la série

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Ainsi $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est moindre que e. Mais remarquons que le terme général

$$\frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\ .\ 2\ \ldots\ n},$$

à mesure que m augmente indéfiniment, approche autant qu'on veut de

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}.$$

Par conséquent, en donnant à m une valeur convenable, les $(n+1)$ premiers termes du développement de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ donneront une somme qui différera aussi peu qu'on voudra de la somme des $(n+1)$ premiers termes de la série e; et cela, quelle que soit la valeur finie attribuée à n. Mais la différence entre cette somme et e peut devenir aussi petite qu'on veut (108). Par conséquent, la différence entre e et la somme des $(n+1)$ premiers termes de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ peut aussi devenir aussi petite qu'on veut; et il en est de même, à plus forte raison, de la différence entre e et le développement complet de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$; de sorte qu'on peut poser

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e,$$

m étant supposé *entier* et croissant indéfiniment.

110. Supposons maintenant m *fractionnaire*, et admettons qu'on ait, p désignant un nombre entier très-grand et λ étant moindre que l'unité,

$$m = p + \lambda,$$

m sera compris entre p et $p+1$, et l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ entre les expressions $\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1}$ et $\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^p$. En effet, la première expression est plus grande que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, puisqu'on a augmenté à la fois la quantité élevée à la puissance et l'exposant de la puissance. La seconde expression est au contraire plus petite. On a d'ailleurs

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1} = \left(1+\frac{1}{p}\right)^p\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

et

$$\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^p = \left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{p+1}}.$$

p étant supposé très-grand, les facteurs $\left(1+\frac{1}{p}\right)^p$ et $\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1}$ diffèrent de e aussi peu qu'on voudra, tandis que les facteurs $1+\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{1+\frac{1}{p+1}}$ convergent vers l'unité. On peut donc encore écrire, dans le cas de m fractionnaire,

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{m} = \alpha, \quad \text{d'où} \quad m = \frac{1}{\alpha},$$

on a

$$\lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Ainsi α étant une quantité *positive* quelconque qui tend vers zéro, l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers e.

111. Il reste à considérer le cas de $\frac{1}{m}$ ou de α *négatif* et tendant vers zéro. On pourra alors poser

$$1+\alpha = \frac{1}{1+\beta},$$

β étant une quantité positive qui tend vers zéro. On a, d'après l'égalité précédente,

$$\alpha = \frac{-\beta}{1+\beta}$$

et

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1 - \frac{\beta}{1+\beta}\right)^{-\frac{1+\beta}{\beta}} = (1+\beta)^{\frac{1+\beta}{\beta}} = (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}(1+\beta).$$

β étant une quantité positive qui tend vers zéro, on voit que $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend encore vers e dans le cas considéré.

En résumé, de quelque manière que α tende vers zéro, on peut toujours écrire

$$\lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

112. *Note.* Nous savons (t. I, Note III) qu'on peut définir un système de logarithmes à l'aide des deux progressions

$$\because \ldots : (1+\alpha)^{-2} : (1+\alpha)^{-1} : 1 : (1+\alpha)^{1} : (1+\alpha)^{2} : \ldots,$$
$$\div \ldots \quad -2\beta \quad . \quad -\beta \quad . \; 0 \; . \quad \beta \quad . \quad 2\beta \quad \ldots,$$

α étant une quantité extrêmement petite qui converge vers zéro.

On peut établir un certain rapport, d'ailleurs arbitraire, entre les accroissements α et β des termes 1 et 0 des deux progressions, et poser

$$\beta = M\alpha.$$

M est ce que *Neper* appelait le *module* du système considéré. Si l'on suppose $M = 1$, les deux progressions deviennent

$$\because \ldots : (1+\alpha)^{-2} : (1+\alpha)^{-1} : 1 : (1+\alpha)^{1} : (1+\alpha)^{2} : \ldots,$$
$$\div \ldots \quad -2\alpha \quad . \quad -\alpha \quad . \; 0 \; . \quad \alpha \quad . \quad 2\alpha \quad \ldots.$$

Admettons que la seconde progression renferme un multiple de α égal à

l'unité et qu'on ait

$$\mu\alpha = 1.$$

La base du système sera (*Alg. élém.*, 247)

$$(1+\alpha)^{\mu} \quad \text{ou} \quad (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

c'est-à-dire la limite de cette quantité quand α tend vers zéro. *On retrouve ainsi e comme base du système des logarithmes naturels ou népériens* (*Alg. élém.*, 255).

CHAPITRE II.

DES FONCTIONS DÉRIVÉES.

Définitions.

113. Soit un polynôme *entier par rapport à x :*

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m,$$

dans lequel les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$, sont des quantités constantes quelconques, et x la variable dont la valeur du polynôme dépend; de sorte que ce polynôme est *fonction de x* et peut être représenté par $F(x)$ (*Alg. élém.*, 11). Si l'on remplace x par $x+h$, h représentant une variation ou un accroissement quelconque de x, on aura

$$\begin{aligned} F(x+h) = {} & A_0(x+h)^m + A_1(x+h)^{m-1} + A_2(x+h)^{m-2} + \ldots \\ & + A_{m-1}(x+h) + A_m \end{aligned}$$

ou, en développant chaque terme du second membre suivant la formule du binôme et en ordonnant suivant les puissances de l'accroissement h :

$$\begin{array}{rl|l|l|l}
F(x+h) = & A_0x^m + mA_0x^{m-1} & h + m(m-1)A_0x^{m-2} & \dfrac{h^2}{1.2} + \ldots + mA_0x & h^{m-1} + A_0h^m. \\
& + A_1x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} & + (m-1)(m-2)A_1x^{m-3} & + A_1 & \\
& + A_2x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} & + (m-2)(m-3)A_2x^{m-4} & & \\
& + \ldots\ldots + \ldots\ldots & + \ldots\ldots & & \\
& \vdots \qquad \vdots & \vdots & & \\
& + A_{m-1}x + A_{m-1} & + 2A_{m-2} & & \\
& + A_m & & &
\end{array}$$

Les termes indépendants de h forment le polynôme proposé lui-même, comme cela doit être. Le coefficient de la première puissance de h est ce qu'on appelle *le polynôme dérivé* ou *la dérivée* du polynôme proposé. La notation de la dérivée est $F'(x)$.

Le polynôme

$$F'(x) = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} + \ldots + A_{m-1}$$

se déduit du polynôme $F(x)$ suivant une loi très-simple : *il suffit pour*

l'obtenir de multiplier chaque terme de ce polynôme par l'exposant de x dans ce terme, et de diminuer en même temps l'exposant de x d'une unité.

On voit facilement, en examinant les coefficients de $\frac{h^2}{1.2}$, $\frac{h^3}{1.2.3}$, ..., que chacun d'eux se déduit du précédent en appliquant la même règle. Il en résulte que le coefficient de $\frac{h^2}{1.2}$ est la dérivée de $F'(x)$ ou la *dérivée seconde* de $F(x)$: sa notation sera $F''(x)$. De même, le coefficient de $\frac{h^3}{1.2.3}$ est la dérivée de $F''(x)$ ou la dérivée seconde de $F'(x)$ ou la *dérivée troisième* de $F(x)$: sa notation sera $F'''(x)$, etc.

D'après cela, on pourra écrire (*)

$$(1)\quad F(x+h) = F(x) + F'(x).h + F''(x)\frac{h^2}{1.2} + F'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots + F^{(m)}(x)\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}.$$

Il est facile de reconnaître, en effet, que $F^{(m)}$ ou *la $m^{ième}$ dérivée* de $F(x)$ est égale à $1.2.3\ldots(m-1)m.A_0$, de sorte que le dernier terme du second membre, écrit comme nous l'avons indiqué, représente bien A_0h^m.

Il est très-important de remarquer que le degré de chaque dérivée diminue d'une unité, c'est-à-dire que le polynôme proposé étant du degré m, sa dérivée première est du degré $m-1$, sa dérivée seconde du degré $m-2$, ..., sa $m^{ième}$ dérivée du degré $m-m$ ou 0, de sorte qu'elle ne renferme plus x, et que les dérivées suivantes sont nulles ou n'existent pas. A chaque nouvelle dérivée, un coefficient de moins, parmi ceux du polynôme proposé, entre dans l'expression de la dérivée; et la dernière ou $m^{ième}$ dérivée ne contient que le coefficient A_0 du premier terme du polynôme.

Si l'on a

$$F(x) = \overset{[A_0]}{2}x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 3x - 1,$$

(*) Dans la formule générale qu'on vient d'obtenir, permutons x et h, puis remplaçons h par a, quantité donnée. Nous aurons

$$F(x+a) = F(a) + F'(a)x + F''(a)\frac{x^2}{1.2} + F'''(a)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + F^{(m)}(a)\cdot\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}.$$

Ce nouveau développement permettra de calculer rapidement le résultat de la substitution de $x+a$ à la place de x dans le polynôme $F(x)$.

Cherchons ce que devient le polynôme $2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 3x - 1$, quand on y remplace x par $x+3$. Il suffira de former les différentes dérivées de ce polynôme, et d'y faire $x=3$. On aura ainsi

$$F'(3) = 60,\quad F''(3) = 100,\quad F'''(3) = 102,\quad F^{IV}(3) = 48.$$

On a d'ailleurs

$$F(3) = 26.$$

On pourra donc écrire

$$F(x+3) = 26 + 60x + 50x^2 + 17x^3 + 2x^4.$$

il viendra

$$F'(x) = 8x^3 - 21x^2 + 10x + 3,$$
$$F''(x) = 24x^2 - 42x + 10,$$
$$F'''(x) = 48x - 42,$$
$$F^{\text{IV}}(x) = 48 = 1.2.3.4.(2). \quad [A_4]$$

114. De la relation générale (1), on peut déduire l'*accroissement* pris par la fonction, lorsque la variable x subit elle-même l'*accroissement* ou la variation positive ou négative h (*). De cette relation (113), on tire en effet

$$(2) \quad F(x+h) - F(x) = F'(x)h + F''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots.$$

On peut remarquer que, si l'accroissement h de la variable est très-petit, l'accroissement $[F(x+h) - F(x)]$ de la fonction sera lui-même très-petit, comme somme d'un nombre *fini* de quantités très-petites; et si le premier tend vers zéro, le second tendra aussi vers zéro. Ce qui montre que *lorsque la variable x croît d'une manière continue, toute fonction entière de x croît d'une manière continue.*

Ceci posé, prenons le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable : il suffit de diviser les deux membres de la relation (2) par h, et il viendra

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) + F''(x)\frac{h}{1.2} + F'''(x)\frac{h^2}{1.2.3} + \ldots + F^{(m)}(x)\frac{h^{m-1}}{1.2.3\ldots m}.$$

x conservant une valeur *fixe,* faisons tendre h vers zéro. La limite du second membre et, par suite, celle du premier sera $F'(x)$.

Nous pouvons donc écrire

$$F'(x) = \lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Ce qui veut dire que *la dérivée du polynôme* $F(x)$ *est la limite du rapport de l'accroissement de ce polynôme à l'accroissement de la variable dont il dépend, lorsque ce dernier accroissement converge vers zéro.*

Cette nouvelle définition de la dérivée convient *à une fonction continue quelconque de x,* et nous dirons d'une manière générale que :

La dérivée d'une fonction est la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable correspondante, lorsque celui-ci tend vers zéro ou, plus rapidement, *la limite du rapport des accroissements infiniment petits correspondants de la fonction et de la variable.*

La dérivée seconde d'une fonction est la dérivée de sa dérivée, la dérivée troisième est la dérivée de la dérivée seconde, et ainsi de suite.

115. *Remarques* — I. Lorsque la fonction se réduit à la variable elle-même, l'accroissement de la fonction est toujours égal à l'accroissement de la variable. Donc, *la dérivée de la variable indépendante est l'unité.*

(*) Il faut bien faire attention qu'en mathématiques le mot *accroissement* est simplement synonyme du mot *variation* dans un sens ou dans l'autre.

II. Si la fonction se réduit à une constante, on peut supposer à la variable tel accroissement qu'on voudra sans que la fonction en prenne aucun. Donc *la dérivée d'une constante est nécessairement nulle.*

III. *Lorsque deux fonctions sont constamment égales, leurs dérivées sont égales.*

Classement des fonctions.

116. Il y a un nombre illimité de fonctions, puisque le nombre des questions qui peuvent leur donner naissance est lui-même illimité. Mais si l'on partage les fonctions en *fonctions simples* et en *fonctions complexes,* on trouve que le nombre des premières est au contraire très-restreint.

Les fonctions simples correspondent à toutes les opérations de calcul qui nous sont aujourd'hui connues.

Elles sont au nombre de *dix* et se partagent en *cinq* groupes, comme l'indique le tableau suivant; chaque groupe renferme une opération directe et son inverse. Nous désignons par x la variable indépendante, par y la fonction, par m une constante quelconque.

1°	Somme	$y = m + x,$
	Différence	$y = m - x,$
2°	Produit	$y = mx,$
	Rapport	$y = \frac{m}{x},$
3°	Puissance	$y = x^m,$
	Racine	$y = \sqrt[m]{x},$
4°	Fonction exponentielle	$y = m^x,$
	Fonction logarithmique	$y = \log x,$
5°	Fonction circulaire directe	$y = \sin x,$
	Fonction circulaire inverse	$y = \text{arc}(\sin = x).$

On donne aux six premières fonctions le nom de *fonctions algébriques,* et aux quatre dernières le nom de *fonctions transcendantes.*

117. Les fonctions complexes sont de deux espèces. Ou bien, elles ont été obtenues en remplaçant dans les expressions précédentes *la seule lettre x* par une nouvelle fonction simple dépendante de x. On a alors *une fonction de fonction.* Si, par exemple, dans $y = mx$, on remplace x par $\sin x$, il vient $y = m.\sin x$; et l'on a une fonction où sont *superposées* les deux fonctions simples : *produit* et *sinus.* De même, si dans cette nouvelle fonction on remplace encore x par $\log x$, on a

$$y = m.\sin\log x,$$

et *la fonction de fonctions* est formée alors par la superposition des trois fonctions simples : *produit, sinus, logarithme.*

Il est clair d'ailleurs qu'en effectuant les opérations indiquées, on peut souvent convertir une fonction de fonctions en fonction simple. Ainsi

$$(x^3)^4 = x^{12}, \quad \log a^x = x\log a.$$

Les fonctions complexes de seconde espèce ou *fonctions composées* proprement dites s'obtiennent en remplaçant, dans les expressions du numéro précédent (116), *les lettres m et x à la fois*, soit par de nouvelles fonctions simples, soit par des fonctions de fonctions toujours finalement dépendantes de x. Les fonctions

$$y = m\sin x + \log x, \quad y = (a + bx)\left(\sqrt[m]{x} - \arcsin x\right),$$

sont des fonctions composées.

Nous commencerons par chercher les dérivées des dix fonctions simples (116), et nous montrerons ensuite comment la détermination des dérivées des fonctions complexes se ramène à celle des dérivées des fonctions simples.

DÉRIVÉES DES FONCTIONS SIMPLES.

118. Pour trouver les dérivées de ces fonctions, nous suivrons la marche générale suivante. Nous ferons varier la variable et par suite la fonction, c'est-à-dire x et y, en mettant en évidence leurs accroissements simultanés, que nous représenterons par Δx et Δy. L'équation sur laquelle on opère permettra alors d'isoler dans le premier membre le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. En faisant converger dans le second membre Δy et Δx vers zéro, on obtiendra la limite du second membre, qui sera celle du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ou la dérivée cherchée (114).

Somme, différence, produit, rapport.

119. Soit $y = m + x$. Supposons qu'on donne à x l'accroissement Δx, y recevra un accroissement correspondant Δy; et l'on aura en vertu de la relation donnée

$$y + \Delta y = m + x + \Delta x,$$

c'est-à-dire, puisque $y = m + x$,

$$\Delta y = \Delta x \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Quel que soit Δx, l'accroissement de la fonction sera égal à l'accroissement de la variable; donc, Δx convergeant vers zéro, il en sera de même de Δy, mais le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ restera toujours égal à 1. A la limite, y' étant la dérivée de la fonction y, on aura (115)

$$y' = 1.$$

On voit que, pour la fonction *somme*, la constante disparaît dans la dérivation.

120. Soit $y = m - x$. On aura de même

$$y + \Delta y = m - (x + \Delta x) = m - x - \Delta x,$$

d'où

$$\Delta y = -\Delta x \quad \text{et} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

L'accroissement de la fonction est donc alors constamment égal et de signe contraire à celui de la variable ; ce qui signifie que la fonction diminue quand la variable augmente. On a à la limite

$$y' = -1.$$

On voit que, pour la fonction *différence*, la constante disparait aussi dans la dérivation.

121. Soit $y = mx$. On aura

$$y + \Delta y = m(x + \Delta x) = mx + m\Delta x,$$

d'où

$$\Delta y = m\Delta x \quad \text{et} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = m;$$

ce qui montre que l'accroissement de la fonction est constamment égal à l'accroissement de la variable, multiplié par m. Δx convergeant vers zéro, il en est de même de Δy; mais leur rapport reste constamment égal à m; de sorte qu'à la limite, y' étant la dérivée de y, on a

$$y' = m.$$

Ainsi, pour la fonction *produit*, la constante ne disparaît pas.

122. Soit $y = \frac{m}{x}$. Si x reçoit l'accroissement Δx, y recevra l'accroissement correspondant Δy, et l'on aura

$$y + \Delta y = \frac{m}{x + \Delta x}.$$

y étant constamment égal à $\frac{m}{x}$, on déduira de cette relation

$$\Delta y = \frac{m}{x + \Delta x} - \frac{m}{x} = \frac{-m.\Delta x}{x(x + \Delta x)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-m}{x(x + \Delta x)}.$$

Si l'on fait converger Δx vers zéro, le premier membre convergera vers y', et le second membre vers l'expression $\frac{-m}{x^2}$. On aura donc à la limite

$$y' = \frac{-m}{x^2}.$$

La dérivée est précédée du signe *moins*, parce que, pour la fonction *rapport* comme pour la fonction *différence*, la fonction diminue lorsque la variable augmente : c'est là un fait général.

Puissance et racine.

123. 1° *Exposant entier et positif.* Soit $y = x^m$. On en déduira

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^m,$$

d'où

$$y + \Delta y = x^m + mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\Delta x^2 + \dots$$

On peut supprimer dans les deux membres $y = x^m$, et en divisant par Δx, il viendra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\Delta x + \dots$$

Dans le second membre de cette égalité, le premier terme seul ne contient pas Δx; tous les autres renferment Δx ou des puissances supérieures de Δx. Δx convergeant vers zéro, le premier membre convergera vers la dérivée y' de la fonction y; le second membre convergera vers mx^{m-1}, puisque tous ses termes, sauf le premier, contiendront, outre des facteurs finis, un facteur tendant vers zéro. A la limite, on aura donc

$$y' = mx^{m-1}.$$

Donc *la dérivée d'une puissance s'obtient en diminuant l'exposant d'une unité et en multipliant par l'exposant de la puissance primitive.*

Il faut prouver que cette règle est générale.

2° *Exposant fractionnaire et positif.* Soit $y = x^{\frac{p}{q}}$. Élevons les deux membres de cette égalité à la puissance q. Nous aurons

$$y^q = x^p.$$

Supposons que x reçoive un accroissement Δx, y recevra un accroissement correspondant Δy, et il viendra

$$(y + \Delta y)^q = (x + \Delta x)^p,$$

d'où, en supprimant dans les deux membres $y^q = x^p$,

$$qy^{q-1}\Delta y + \frac{q(q-1)}{1.2}y^{q-2}\Delta y^2 + \dots = px^{p-1}\Delta x + \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}\Delta x^2 + \dots$$

On en déduit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(qy^{q-1} + \frac{q(q-1)}{1.2}y^{q-2}\Delta y + \dots\right) = px^{p-1} + \Delta x\left(\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2} + \dots\right).$$

A mesure que Δx converge vers zéro, il en est de même de Δy; de sorte que, y' étant la dérivée de la fonction y, le second membre converge vers px^{p-1} et le premier vers $y'qy^{q-1}$. A la limite, on aura donc

$$y'qy^{q-1} = px^{p-1},$$

d'où, en remarquant que $y^{q-1} = x^{\frac{p}{q}(q-1)} = x^{p-\frac{p}{q}}$,

$$y' = \frac{p}{q}\,\frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Si l'on suppose $p = 1$, on a

$$y = x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x} \quad \text{et} \quad y' = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{1}{q} x^{-\frac{q-1}{q}} = \frac{1}{q\sqrt[q]{x^{q-1}}}.$$

Supposons en particulier $q = 2$. Nous aurons

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3° *Exposant négatif.* Soit $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. On en déduit

$$y + \Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)^n} \quad \text{et} \quad \Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)^n} - \frac{1}{x^n} = \frac{x^n - (x+\Delta x)^n}{x^n(x+\Delta x)^n},$$

d'où, en simplifiant et en divisant par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-nx^{n-1} - \Delta x\left(\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} + \ldots\right)}{x^n(x+\Delta x)^n}.$$

Si Δx converge vers zéro, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ converge vers la dérivée y', et le second membre de l'égalité vers le rapport $\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$ A la limite, on peut donc écrire

$$y' = -n\frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Si l'on suppose en particulier $n = 1$, on a

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

comme on l'aurait trouvé au n° 122, en donnant à la constante m la valeur 1.

Quelle que soit la nature de l'exposant, qu'il soit entier ou fractionnaire, positif ou négatif, la règle pour trouver la dérivée de la puissance reste, d'après ce qui précède, toujours la même.

Fonction exponentielle.

124. Soit $y = m^x$. On aura

$$y + \Delta y = m^{x+\Delta x},$$

d'où

$$\Delta y = m^{x+\Delta x} - m^x = m^x(m^{\Delta x} - 1) \quad \text{et} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{m^x(m^{\Delta x}-1)}{\Delta x}.$$

Δx étant une quantité très-petite, quelle que soit la quantité *positive* m, $m^{\Delta x}$ différera très-peu de 1 (*Alg. élém.*, 243). On peut alors poser, en désignant par α une quantité positive ou négative qui tend vers zéro

en même temps que Δx,

$$m^{\Delta x} = 1 + \alpha.$$

En prenant les logarithmes des deux membres de cette dernière égalité, on aura

$$\Delta x \log m = \log(1+\alpha), \quad \text{d'où} \quad \Delta x = \frac{\log(1+\alpha)}{\log m}.$$

Par conséquent, puisque $m^{\Delta x} - 1 = \alpha$, il viendra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m^x \frac{\alpha}{\dfrac{\log(1+\alpha)}{\log m}} = \frac{m^x \log m}{\dfrac{1}{\alpha}\log(1+\alpha)}.$$

Δx convergeant vers zéro, le premier membre converge vers la dérivée y' de la fonction proposée. Le numérateur du second membre reste invariable. Il faut donc chercher vers quelle limite tend le dénominateur $\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha)$, quand Δx ou α tend vers zéro.

Or $\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha)$ revient à $\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Il est évident que la limite de ce logarithme est le logarithme de la limite de la quantité $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, limite qui, d'après ce qui précède (**111**), est le nombre incommensurable e. On aura donc

$$y' = \frac{m^x \log m}{\log e}.$$

Cette expression est tout à fait indépendante du système de logarithmes adopté, car nous savons que les logarithmes de deux nombres, pris dans deux systèmes différents, forment un rapport constant (T. I, Note III).

Si l'on opère dans le système *népérien*, on doit remplacer $\log m$ par $1.m$ et $\log e$ par 1. On a alors

$$y' = m^x\, 1.m.$$

Si la fonction proposée est en particulier $y = e^x$, on a

$$y' = e^x,$$

puisqu'on doit remplacer m par e et que $1.e$ est égal à 1. Ainsi *la dérivée de la fonction e^x est cette fonction elle-même.*

Fonction logarithmique.

125. Soit $y = \log x$. On aura

$$y + \Delta y = \log(x + \Delta x),$$

d'où

$$\Delta y = \log(x+\Delta x) - \log x = \log\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Il en résulte

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

x ayant une valeur déterminée, on peut poser $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$, α étant une quantité qui converge vers zéro en même temps que Δx. On aura alors

$$\Delta x = \alpha x,$$

et l'expression considérée deviendra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(1 + \alpha)}{\alpha x} = \frac{\frac{1}{\alpha}\log(1 + \alpha)}{x} = \frac{\log(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}.$$

Δx convergeant vers zéro, le premier membre converge vers la dérivée y' de la fonction y, le dénominateur du second membre demeure invariable, tandis que le numérateur tend vers $\log e$, comme nous venons de le voir (124). On aura donc à la limite

$$y' = \frac{\log e}{x}.$$

En se rappelant que $\log e$ représente le module M du système de logarithmes adopté (*Alg. élém.*, 255), on peut encore écrire

$$y' = \frac{M}{x}.$$

Si l'on opère dans le système népérien, on a simplement

$$y' = \frac{1}{x},$$

et la dérivée de la fonction est alors l'inverse de la variable.

Fonction circulaire directe.

126. Soit $y = \sin x$. On aura

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x),$$

d'où

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x \quad \text{et} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Mais (*Trig.*, 26)

$$\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

On peut donc écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Si l'on fait converger Δx vers zéro, le rapport $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ converge vers l'unité (*Trig.*, 31), et $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ vers $\cos x$. On aura donc à la limite

$$y' = \cos x.$$

La dérivée du sinus est donc le cosinus.

Fonction circulaire inverse.

127. Soit $y = \text{arc}\sin x$, ce qu'on doit lire : y *égale l'arc dont le sinus est* x. A un même sinus, correspondent une infinité d'arcs (*Trig.*, 7); *mais nous n'entendons parler que de l'arc positif et plus petit qu'un quadrant, qui a* x *pour sinus.*

Si y est l'arc dont le sinus est x, on peut écrire

$$x = \sin y.$$

Si l'on regarde alors x comme la fonction et y comme la variable, on aura (126)

$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = \cos y,$$

d'où

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos y}.$$

Mais puisque $x = \sin y$, on a

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Il viendra donc enfin

$$y' = \frac{1}{+\sqrt{1 - x^2}};$$

car l'arc y étant moindre que $\frac{\pi}{2}$, son cosinus est positif.

128. Nous venons de trouver les dérivées des dix fonctions simples *primitives*. Il en est d'autres qu'on peut regarder également comme simples, mais qui rentrent dans les précédentes, comme nous le verrons en traitant des dérivées des fonctions complexes. Voici le tableau des résultats obtenus jusqu'ici. Nous le reproduirons à la fin de ce chapitre, en le complétant par l'indication des dérivées qu'il est essentiel de savoir par cœur.

Dérivées des fonctions simples primitives.

$$y = m + x, \quad y' = 1,$$
$$y = m - x, \quad y' = -1,$$
$$y = mx, \quad y' = m,$$
$$y = \frac{m}{x}, \quad y' = -\frac{m}{x^2},$$
$$y = x^m, \quad y' = mx^{m-1},$$
$$y = \sqrt[q]{x}, \quad y' = \frac{1}{q.\sqrt[q]{x^{q-1}}}, \quad y = \sqrt{x}, \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$
$$y = m^x, \quad y' = \frac{m^x \log m}{\log e} = m^x.1.m, \quad y = e^x, \quad y' = e^x,$$
$$y = \log x, \quad y' = \frac{\log e}{x} = \frac{M}{x}, \quad y = 1.x, \quad y' = \frac{1}{x},$$
$$y = \sin x, \quad y' = \cos x,$$
$$y = \text{arc} \sin x, \quad y' = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}.$$

7. Dérivées des fonctions de fonctions.

129. Soit $y = F(u)$, u représentant une fonction $f(x)$ de x qui est la variable indépendante. On aura

$$y = F[f(x)],$$

les caractéristiques F et f indiquant les opérations superposées (**117**). Il s'agit de trouver la dérivée y' de la fonction y par rapport à x.

Si l'on donne à x un accroissement Δx, il en résultera pour $u = f(x)$ un accroissement Δu et, pour $y = F(u)$, un accroissement Δy. Or l'on a identiquement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

La limite d'un produit est le produit des limites des facteurs (*Géom.*, **132**). Quand Δx tend vers zéro, il en est de même de Δu et, par suite, de Δy. La limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quand Δx tend vers zéro, est y'; la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ quand Δu tend vers zéro, est $F'(u)$; enfin, la limite du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ quand Δx tend vers zéro, est $f'(x)$ ou u'. On aura donc

$$y' = F'(u).u'.$$

Soit encore

$$y = F(v), \quad v = f(u), \quad u = \varphi(x),$$

c'est-à-dire

$$y = F\{f[\varphi(x)]\}.$$

A l'accroissement Δx correspondront les accroissements Δu, Δv, Δy,

et l'on aura comme précédemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

En passant à la limite, il viendra

$$y' = F'(v).f'(u).u'.$$

On voit donc que *la dérivée d'une fonction de fonctions est égale au produit des dérivées des fonctions simples qui la composent, chaque dérivée devant être prise par rapport à la variable dont la fonction correspondante dépend immédiatement.*

Cette règle montre que les dérivées des fonctions simples se superposent pour former la dérivée de la fonction de fonctions, comme ces fonctions simples elles-mêmes pour former la fonction considérée.

130. *Exemples :*

1° Soit $y = \cos x$. On peut remplacer $\cos x$ par $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, et regarder alors y comme une fonction de fonction. Si l'on pose

$$\frac{\pi}{2} - x = u,$$

on a

$$y = \sin u,$$

d'ou (126)

$$y' = \cos u . u'.$$

De $\frac{\pi}{2} - x = u$ on déduit d'ailleurs $u' = -1$ (120). Par conséquent,

$$y' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

La dérivée du cosinus est donc égale au sinus pris en signe contraire.

2° Soit $y = \text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x}$. Posons $\cos x = u$, il viendra

$$y = \frac{1}{u},$$

et nous pourrons appliquer le théorème des fonctions de fonctions. On aura (122)

$$y' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'.$$

Mais $u' = -\sin x$, d'après ce qu'on vient de voir (1°). Donc

$$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

3° Soit $y = \text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x}$. Posons $\sin x = u$, il viendra

$$y = \frac{1}{u},$$

d'où

$$y' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'.$$

Mais $u' = \cos x$. Par suite,

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

4° Soit $y = \log \sin x$. Posons $\sin x = u$. Il viendra $y = \log u$, d'où (125)

$$y' = \frac{\log e}{u} \cdot u'.$$

On a

$$u' = \cos x.$$

Par suite,

$$y' = \frac{\log e \cos x}{\sin x} = \log e \, . \cot x.$$

5° De même, pour $y = \log \cos x$, on posera $\cos x = u$. Il viendra

$$y = \log u,$$

d'où

$$y' = \frac{\log e}{u} \cdot u'.$$

On a

$$u' = -\sin x,$$

et par suite,

$$y' = -\frac{\log e \sin x}{\cos x} = -\log e \, . \operatorname{tang} x.$$

6° Soit $y = (\log x)^m$. Posons $\log x = u$. Nous aurons

$$y = u^m,$$

d'où

$$y' = m . u^{m-1} . u',$$

et

$$u' = \frac{\log e}{x}.$$

Par suite,

$$y' = \frac{m \log e \, . \, (\log x)^{m-1}}{x}.$$

7° Soit encore $y = \sin^4 x^2$. Posons

$$x^2 = u \quad \text{et} \quad \sin u = v,$$

il viendra

$$y = v^4, \quad \text{d'où} \quad y' = 4 v^3 . v'.$$

Mais

$$v' = \cos u . u' \quad \text{et} \quad u' = 2x.$$

Par conséquent,

$$y' = 8 x \sin^3 x^2 \cos x^2.$$

A propos de cet exemple, il faut bien remarquer que, comme nous l'avons déjà dit (129), chaque signe d'opération correspond à une fonction particulière. L'exposant 2 de la variable x conduit à une première fonction

$x^2 = u$, le signe sinus à une seconde fonction v, l'exposant 4 superposé au signe sinus à une nouvelle et dernière fonction v^4 ou y.

Quand on a pris un peu d'habitude, on opère plus rapidement en décomposant les fonctions par la pensée, sans employer de lettres auxiliaires.

8° Soit, comme dernier exemple, $y = e^{e^{e^x}}$. On posera

$$e^{e^x} = v \quad \text{et} \quad e^x = u.$$

On aura alors

$$y = e^v,$$

d'où, en opérant dans le système népérien,

$$y' = e^v v'.$$

On a d'ailleurs

$$v = e^u, \quad \text{d'où} \quad v' = e^u u', \quad \text{enfin} \quad u' = e^x.$$

En substituant, il viendra

$$y' = e^v e^u e^x = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x;$$

ce qu'on aurait pu écrire immédiatement, en appliquant la formule générale (129)

$$y' = F'(v) f'(u) u'.$$

Dérivées des fonctions inverses.

131. Nous avons fait au n° 127 usage d'une méthode que nous devons généraliser avant d'aller plus loin.

Supposons qu'on ait $y = F(x)$. En résolvant cette équation par rapport à x, on en déduira $x = \varphi(y)$, φ caractérisant une autre fonction qui pourra être plus facile à dériver que la fonction F. Les deux fonctions F et φ sont dites *inverses* l'une de l'autre.

Les deux équations considérées n'étant que deux formes différentes d'une même relation, si l'on donne à x un accroissement Δx, y prendra dans toutes les deux le même accroissement Δy; c'est-à-dire que, de toutes les deux, on tirera le même $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Or on aura

$$y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\varphi'(y)} \quad \text{ou} \quad y' = \frac{1}{\varphi'[F(x)]}.$$

Ainsi, au n° 127, nous avions

$$y = \arcsin x, \quad \text{d'où} \quad x = \sin y \quad \text{et} \quad x' = \varphi'(y) = \cos y.$$

Par conséquent,

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}.$$

132. *Exemples :*

1° Soit $y = \arccos x$. Nous aurons

$$x = \cos y.$$

Par suite,

$$x' = -\sin y \quad \text{et} \quad y' = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sin(\operatorname{arc}\cos x)},$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{-1}{+\sqrt{1-x^2}},$$

l'arc y étant toujours compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

2° Soit $y = \operatorname{arc séc} x$. Nous aurons

$$x = \operatorname{séc} y.$$

Il viendra (130, 2°)

$$x' = \frac{\sin y}{\cos^2 y} \quad \text{d'où} \quad y' = \frac{\cos^2 y}{\sin y} = \frac{\cos^2(\operatorname{arc séc} x)}{\sin(\operatorname{arc séc} x)} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}},$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

3° Soit $y = \operatorname{arc coséc} x$, d'ou $x = \operatorname{coséc} y$. Nous aurons (130, 3°)

$$x' = -\frac{\cos y}{\sin^2 y} \quad \text{et} \quad y' = \frac{-\sin^2 y}{\cos y} = \frac{-\sin^2(\operatorname{arc coséc} x)}{\cos(\operatorname{arc coséc} x)} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}},$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Dérivée d'une somme.

133. Soit u, v, t différentes fonctions continues de la variable x, et supposons qu'on ait la fonction continue

$$(1) \qquad y = u + v - t.$$

Je dis que *la dérivée y' de la fonction y par rapport à x sera égale à la somme algébrique des dérivées u', v', t' des fonctions qui la composent, par rapport à x.*

En effet, si x reçoit un accroissement Δx, il en résultera pour u, v, t, y les accroissements simultanés Δu, Δv, Δt, Δy; on aura évidemment

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (t + \Delta t).$$

On en déduit, d'après la relation (1),

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta t,$$

et, par suite,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Si l'accroissement Δx tend vers zéro, il en sera de même des accrois-

sements Δu, Δv, Δt, Δy. La limite d'une somme étant la somme des limites de ses parties (*Géom.*, 132), on aura donc

$$y' = u' + v' - t'.$$

Si l'une des parties de la somme est constante, sa dérivée est nulle, ce qui conduit à une remarque déjà faite (119).

En se reportant au n° 113, on voit que la dérivée d'un polynôme entier par rapport à x doit être la somme des dérivées de ses différents termes.

134. *Exemples :*

1° Soit $y = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$. On aura immédiatement (123, 122) :

$$y' = \frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}.$$

2° Soit $y = \log\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$.

Nous appliquerons à la fois le théorème des fonctions de fonctions et le théorème relatif à la dérivée d'une somme.

Nous poserons

$$\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}} = u, \quad \text{d'où} \quad y = \log u \quad \text{et} \quad y' = \frac{\log e}{u} u'.$$

Mais si l'on pose

$$x + \sqrt{1 + x^2} = z,$$

on aura

$$u = \sqrt{z} \quad \text{et} \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{z}} z'.$$

On voit par là que, pour avoir la dérivée d'un radical du second degré, il faut prendre la dérivée de la quantité qu'il recouvre, et diviser par 2 fois le radical. C'est là une remarque générale. *Toutes les règles trouvées pour la dérivation des fonctions simples s'appliquent aux fonctions composées soumises au signe caractéristique d'une fonction simple. Seulement, la dérivée de la variable x, qui est 1, doit être partout remplacée par la dérivée de la fonction composée subordonnée.*

D'après ce qu'on vient de dire, on écrira immédiatement

$$z' = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}.$$

Si x n'était pas la variable indépendante, il faudrait multiplier $\frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}$ par x', et continuer le calcul. Ici, x étant la variable indépendante, x' est égale à 1. En remplaçant de proche en proche, il viendra

$$y' = \frac{\log e . u'}{u} = \frac{\log e . z'}{2z} = \frac{\log e\left(\sqrt{1 + x^2} + x\right)}{2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\sqrt{1 + x^2}},$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{\log e}{2\sqrt{1 + x^2}}.$$



Dérivée d'un produit.

135. Soient d'abord u et v deux fonctions de x, et supposons qu'on ait

$$y = uv.$$

A un accroissement Δx donné à la variable correspondront les accroissements simultanés Δu, Δv, Δy. On aura donc

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v).$$

Effectuons la multiplication indiquée dans le second membre, et supprimons dans les deux membres $y = uv$. Il viendra

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v.$$

On en déduit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Quand Δx tend vers zéro, il en est de même des quantités Δu, Δv, Δy; de sorte que les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, tendent simultanément vers les dérivées u', v', y', des fonctions u, v, y. A la limite, le terme $\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$ devient donc $u' \times 0$, c'est-à-dire disparait, et il reste simplement

$$y' = uv' + vu',$$

La dérivée d'un produit de deux facteurs est donc égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant chaque facteur par la dérivée de l'autre.

Si l'un des facteurs v est nul, sa dérivée v' est nulle (115, II), et l'on a

$$y' = vu',$$

ce qui ramène à la remarque du n° **121**.

La règle donnée est générale. Soit $y = uvt$. En considérant le produit uv comme un seul facteur, on aura

$$y' = (uv)t' + t(uv)'.$$

D'après ce qui précède, on a

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

En substituant, on aura donc

$$y' = uvt' + utv' + vtu'.$$

Donc *la dérivée du produit d'un nombre quelconque de facteurs, est égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres.*

136. *Exemple :*
Soit

$$y = (9a^2 - 6abx + 5b^2x^2)(a + bx)^{\frac{2}{3}}.$$

On aura

$$y' = (-6ab + 10b^2x)(a+bx)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(a+bx)^{-\frac{1}{3}}.b.(9a^2 - 6abx + 5b^2x^2).$$

Il faut remarquer que le premier facteur est simplement une somme, et le second la puissance d'une somme. On peut écrire, en multipliant et en divisant par $(a+bx)^{\frac{1}{3}}$,

$$y' = \frac{(-6ab + 10b^2x)(a+bx) + \frac{2}{3}b(9a^2 - 6abx + 5b^2x^2)}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}}.$$

En effectuant et en simplifiant, on trouve

$$y' = \frac{40b^3x^2}{3(a+bx)^{\frac{1}{3}}}.$$

Dérivée d'un quotient.

137. Soient u et v deux fonctions de x, et supposons qu'on ait

$$y = \frac{u}{v}.$$

On cherche, comme précédemment, la dérivée y' de y, par rapport à x. On déduit de l'équation donnée

$$u = vy,$$

d'où (135)

$$u' = vy' + yv'$$

et

$$y' = \frac{u' - yv'}{v}.$$

Si l'on remplace au numérateur y par sa valeur $\frac{u}{v}$, il vient

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Donc *la dérivée d'un quotient est égale à la dérivée du numérateur multipliée par le dénominateur, moins la dérivée du dénominateur multipliée par le numérateur, le tout divisé par le carré du dénominateur.*

Si le numérateur u est constant, sa dérivée est nulle. Il reste

$$y' = -\frac{uv'}{v^2} \ (122).$$

138. *Exemples :*

1° Soit

$$y = \operatorname{tang} x \quad \text{ou} \quad y = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

On aura

$$y' = \frac{\cos x \,.\, \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x},$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tang^2 x.$$

De même,

$$y = \cot x \quad \text{ou} \quad y = \frac{\cos x}{\sin x}$$

donne

$$y' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x},$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x).$$

Pour compléter ce qui a rapport aux fonctions circulaires (131, 132), cherchons, à l'aide des résultats qu'on vient d'obtenir, les dérivées des fonctions

$$y = \text{arc tang}\, x \quad \text{et} \quad y = \text{arc cot}\, x.$$

De

$$y = \text{arc tang}\, x, \quad \text{on déduit} \quad x = \tang y,$$

d'où

$$x' = \frac{1}{\cos^2 y} \quad \text{et} \quad y' = \cos^2 y = \cos^2(\text{arc tang}\, x),$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{1}{1+x^2};$$

car le cosinus de l'arc dont la tangente est x, est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ (\textit{Trig.}, 13).}$$

De même, pour $y = \text{arc cot}\, x$, on aura

$$x = \cot y,$$

d'où

$$x' = -\frac{1}{\sin^2 y} \quad \text{et} \quad y' = -\sin^2 y = -\sin^2(\text{arc cot}\, x),$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{-1}{1+x^2};$$

car le sinus de l'arc dont la cotangente est x, est égal à $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2° Soit encore

$$y = \log \frac{a+bx}{a-bx}.$$

Nous poserons

$$\frac{a+bx}{a-bx} = u, \quad \text{d'où} \quad y = \log u$$

et

$$y' = \frac{\log e}{u} \cdot u'.$$

On aura

$$u' = \frac{b(a-bx)-(-b)(a+bx)}{(a-bx)^2} = \frac{2ab}{(a-bx)^2}.$$

Par conséquent

$$y' = \log e \cdot \frac{u'}{u} = \log e \cdot \frac{2ab}{a^2-b^2x^2}.$$

Théorème général relatif aux fonctions composées.

139. Soit une fonction de deux variables $F(u, v)$. Si regardant v comme une constante, on prend la dérivée de la fonction par rapport à u, on obtient *la dérivée partielle de la fonction par rapport à u*.

De même, si regardant u comme une constante, on prend la dérivée de la fonction par rapport à v, on obtient *la dérivée partielle de la fonction par rapport à v*. On indiquera ces deux dérivées partielles par les notations

$$F'_u(u, v), \quad F'_v(u, v).$$

Ceci posé, admettons que chacune des variables u et v soit une fonction de x, et qu'on ait

$$y = F(u, v).$$

y sera une fonction de x, dont on cherche la dérivée. x recevant un accroissement Δx, u, v et y prendront les accroissements simultanés Δu, Δv, Δy, et l'on aura

$$y + \Delta y = F(u+\Delta u,\ v+\Delta v),$$

d'où

$$\Delta y = (u+\Delta u,\ v+\Delta v) - F(u, v).$$

On peut ajouter au second membre et en retrancher la quantité

$$F(u,\ v+\Delta v)$$

obtenue en regardant fictivement u comme une constante dans la fonction proposée. Il viendra

$$\Delta y = [F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u, v+\Delta v)] + [F(u, v+\Delta v) - F(u, v)].$$

A la limite, comme Δv disparaît, on peut considérer la première différence du second membre comme l'accroissement infiniment petit pris par la fonction, lorsqu'on y fait varier seulement u; et la seconde différence comme l'accroissement infiniment petit reçu par la fonction, quand on y fait varier seulement v. On est ainsi conduit à écrire, en introduisant Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u, v+\Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{F(u, v+\Delta v) - F(u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Si Δx converge vers zéro, il en est de même de Δu, Δv, Δy. Les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ont alors pour limites u', v', y'. Le rapport

$$\frac{F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u, v+\Delta v)}{\Delta u}$$

a pour limite

$$F'_u(u, v),$$

puisque c'est comme si l'on faisait seulement varier u dans la fonction $F(u, v + \Delta v)$ qui se réduit en réalité à $F(u, v)$. De même, le rapport

$$\frac{F(u, v + \Delta v) - F(u, v)}{\Delta v}$$

a pour limite

$$F'_v(u, v).$$

On aura donc

$$y' = F'_u(u, v) \,.\, u' + F'_v(u, v) \,.\, v',$$

ou, plus simplement,

$$y' = F'_u \,.\, u' + F'_v \,.\, v'.$$

On arrive donc à ce théorème, qui peut s'appliquer à un nombre quelconque de variables et qui est fondamental. *La dérivée d'une fonction composée est égale à la somme de ses dérivées partielles par rapport à toutes les variables qui y entrent d'une manière explicite, chaque dérivée partielle devant être multipliée par la dérivée de la variable correspondante par rapport à la variable indépendante.*

140. Les théorèmes démontrés précédemment (133, 135, 137) relativement aux dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient, sont des cas particuliers de ce théorème général.

Ainsi

$$y = u + v - t$$

donne immédiatement

$$y' = F'_u \,.\, u' + F'_v \,.\, v' + F'_t \,.\, t' = u' + v' - t',$$

parce qu'on a dans ce cas

$$F'_u = 1, \quad F'_v = 1, \quad F'_t = -1.$$

De même,

$$y = uvt$$

donne

$$y' = F'_u \,.\, u' + F'_v v' + F'_t \,.\, t' = u' vt + v' ut + t' uv,$$

parce que la dérivée partielle par rapport à u est égale au coefficient vt regardé comme une constante, etc.

141. *Exemples :*

1° Soit la fonction

$$y = u^v.$$

On aura

$$y' = v \,.\, u^{v-1} \,.\, u' + \frac{u^v \,.\, \log . u}{\log e} \cdot v',$$

c'est-à-dire

$$y' = u^v \left(\frac{v}{u} \cdot u' + \frac{\log u}{\log e} \cdot v'\right).$$

Si la fonction est, par exemple,

$$y = x^x.$$

on a

$$y' = x^x\left(1 + \frac{\log x}{\log e}\right).$$

2° Soit la fonction

$$y = \log\frac{\sqrt{x^2 - 1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}.$$

On posera

$$u = \sqrt{x^2 - 1} - 1, \quad v = \sqrt{x^2 - 1} + 1,$$

d'où

$$y = \log\frac{u}{v} = \log u - \log v.$$

On aura

$$y' = \frac{\log e}{u} \cdot u' - \frac{\log e}{v} \cdot v'.$$

D'ailleurs

$$u' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{et} \quad v' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}};$$

donc

$$u' = v'.$$

On peut donc écrire

$$y' = \log e \cdot u'\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) = \log e \cdot u' \cdot \frac{v - u}{uv},$$

ce qui conduit à

$$y' = \log e \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{2}{x^2 - 2}.$$

Dérivées des fonctions implicites.

142. Supposons une équation entre la fonction y et la variable x. En résolvant l'équation par rapport à y, on obtiendrait dans le second membre une fonction de x, dont on saurait trouver la dérivée d'après les règles précédentes. Mais souvent on ne peut résoudre l'équation par rapport à y. Il est facile alors, en appliquant le théorème général des fonctions composées (139), de trouver la dérivée de la fonction y; seulement, elle est dans ce cas exprimée généralement en x et en y à la fois, ce qui n'empêche pas sa connaissance d'être très-utile dans un grand nombre de questions.

Tous les termes étant réunis dans le premier membre, soit donc l'équation

$$F(x, y) = 0.$$

y est alors une fonction *implicite* de x. Comme les deux membres de l'équation donnée doivent être constamment égaux, leurs dérivées doivent être égales, c'est-à-dire que la dérivée du premier membre est égale à zéro. En appliquant le théorème fondamental, on aura donc, dans cette hypothèse particulière,

$$F'_y \cdot y' + F'_x \cdot x' = 0.$$

x étant la variable indépendante, on a $x' = 1$, et l'on déduit du ré-

sultat trouvé

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Donc *la dérivée d'une fonction implicite est égale au quotient de la dérivée partielle par rapport à la variable indépendante, divisée par la dérivée partielle par rapport à la fonction, ce quotient étant pris en signe contraire.*

143. *Exemples* :

1° Soit l'équation générale du second degré

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

On aura

$$F'_x = By + 2Cx + E,$$
$$F'_y = 2Ay + Bx + D,$$

d'où

$$y' = -\frac{By + 2Cx + E}{2Ay + Bx + D}.$$

2° Soit

$$x^3 + y^3 + 3xy = 0.$$

On aura

$$F'_x = 3x^2 - 3y, \quad F'_y = 3y^2 - 3x,$$

d'où

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

3° Soit encore

$$x^y - y^x = 0.$$

On aura

$$F'_x = yx^{y-1} - y^x \cdot \frac{\log y}{\log e}, \quad F'_y = x^y \frac{\log x}{\log e} - xy^{x-1},$$

d'où

$$y' = \frac{y^x \log y - \log e \,.\, y \,.\, x^{y-1}}{x^y \log x - \log e \; xy^{x-1}}.$$

Si l'on prenait les logarithmes dans le système népérien, et si l'on divisait haut et bas par $y^x = x^y$, on obtiendrait l'expression de y' sous une forme très-simple, savoir

$$y' = \frac{l \,.\, y - \frac{y}{x}}{l \,.\, x - \frac{x}{y}}.$$

4° On retrouvera très-rapidement, à l'aide de la méthode indiquée, les résultats obtenus précédemment. Soit

$$y = x^{\frac{p}{q}}.$$

On en déduit

$$y^q = x^p \quad \text{et} \quad y^q - x^p = 0,$$

d'où

$$q \cdot y^{q-1} \cdot y' - p \cdot x^{p-1} = 0 \quad \text{et} \quad y' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Soit encore

$$y = \text{arc tang}\, x.$$

On en déduit

$$x = \text{tang}\, y,$$

d'où

$$x - \text{tang}\, y = 0 \quad \text{et} \quad 1 - (1 + \text{tang}^2 y)\, y' = 0,$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

5° Soit en dernier lieu

$$y = \log \text{tang}\, x.$$

On aura

$$y - \log \text{tang}\, x = 0,$$

d'où

$$y' - \frac{\log e}{\text{tang}\, x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 0,$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{\log e}{\sin x \cos x}.$$

Tableau des dérivées fondamentales.

144 $y = \frac{1}{x}$, $\quad y' = -\frac{1}{x^2}$,

$y = x^m$, $\quad y' = m x^{m-1}$,

$y = \sqrt{x}$, $\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$y = m^x$, $\quad y' = \frac{m^x \log m}{\log e} = m^x \,\text{l}.m$,

$y = e^x$, $\quad y' = e^x$,

$y = \log x$, $\quad y' = \frac{\log e}{x}$,

$y = \text{l}.x$, $\quad y' = \frac{1}{x}$,

$y = F(x) + f(x)$, $\quad y' = F'(x) + f'(x)$,

$y = C + f(x)$, $\quad y' = f'(x)$,

$y = F(x).f(x)$, $\quad y' = F'(x).f(x) + f'(x).F(x)$,

$y = C.F(x)$, $\quad y' = C.F'(x)$,

$y = \frac{F(x)}{f(x)}$, $\quad y' = \frac{F'(x).f(x) - f'(x).F(x)}{f(x)^2}$,

$$y = \sin x, \qquad y' = \cos x,$$

$$y = \cos x, \qquad y' = -\sin x,$$

$$y = \tang x, \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tang^2 x,$$

$$y = \text{séc}\, x, \qquad y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tang x \,\text{séc}\, x,$$

$$y = \cot x, \qquad y' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x),$$

$$y = \text{coséc}\, x, \qquad y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \,\text{coséc}\, x,$$

$$y = \text{arc}\sin x, \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$y = \text{arc}\cos x, \qquad y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$y = \text{arc}\tang x, \qquad y' = \frac{1}{1 + x^2},$$

$$y = \text{arc}\cot x, \qquad y' = \frac{-1}{1 + x^2},$$

$$y = \text{arc}\,\text{séc}\, x, \qquad y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$y = \text{arc}\,\text{coséc}\, x, \qquad y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

On remarquera que les dérivées des fonctions circulaires inverses sont deux à deux égales et de signes contraires. C'est ce qui doit être; car, lorsque le sinus d'un arc, par exemple, est égal au cosinus d'un autre arc, ces deux arcs ont une somme constante, et la somme de leurs dérivées doit être nulle.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES DÉRIVÉES.

Étude des variations des fonctions, maximums et minimums.

145. Soit une fonction continue $y = F(x)$. D'après ce qui précède (114), on peut poser

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x) + \alpha,$$

α étant une quantité qui converge vers zéro en même temps que Δx, de sorte qu'à la limite l'équation posée devient l'identité $y' = F'(x)$.

On a donc

$$\Delta y = \Delta x[F'(x) + \alpha].$$

Supposons que la variable indépendante x aille en croissant à partir

d'une certaine valeur, c'est-à-dire supposons l'accroissement Δx positif. A mesure que Δx diminuera, il en sera de même de α. $F'(x)$, qui a une valeur déterminée, finira toujours par surpasser α en valeur absolue, c'est-à-dire par donner son signe à la parenthèse. Δy, *ou l'accroissement de la fonction, aura donc le signe de la dérivée de cette fonction.*

Si la dérivée est positive, la fonction est croissante ; si la dérivée est négative, la fonction est décroissante.

146. Lorsque la fonction considérée atteint un *maximum*, elle diminue après avoir augmenté : sa dérivée, d'abord positive, devient négative. Lorsque la fonction considérée atteint un *minimum*, elle augmente après avoir diminué : sa dérivée, d'abord négative, devient positive (*Alg. élém.*, 218).

Ainsi, aux maximums ou aux minimums de la fonction, correspondent les passages de sa dérivée du positif au négatif ou du négatif au positif ; mais la dérivée d'une fonction continue étant elle-même en général une fonction continue, ne peut changer de signe qu'en passant par *zéro*, limite commune des valeurs positives et négatives.

Par suite, *les valeurs de la variable indépendante x qui rendent la fonction correspondante un maximum ou un minimum, sont précisément celles qui annulent la fonction dérivée.*

Il y a MAXIMUM *pour une certaine valeur de x si, les valeurs plus petites rendant la dérivée positive, les valeurs plus grandes rendent la dérivée négative.*

Il y a MINIMUM *pour une certaine valeur de x si, les valeurs plus petites rendant la dérivée négative, les valeurs plus grandes rendent la dérivée positive.*

On peut remarquer aussi que, *pour le maximum*, la dérivée passant du positif au négatif *décroît*, de sorte que la dérivée de la dérivée ou $F''(x)$ doit être négative.

Pour le minimum, la dérivée passant du négatif au positif *croît*, de sorte que $F''(x)$ doit être *positive*.

Nous laissons de côté les cas particuliers qui peuvent se présenter, et nous allons appliquer à quelques exemples les considérations qui précèdent.

147. 1° *Les variables x et y étant liées par la relation $x+y=a$, on demande pour quelles valeurs des variables la somme x^m+y^m est un maximum ou un minimum.*

Il faut chercher la dérivée de la fonction x^m+y^m et l'égaler à zéro (146). y étant fonction de x, cette dérivée sera (139) :

$$mx^{m-1}+my^{m-1}y'.$$

On a d'ailleurs, en vertu de la relation $x+y=a$, $y'=-1$. Il viendra donc

$$mx^{m-1}-my^{m-1}=0,$$

d'où

$$x^{m-1}=y^{m-1} \quad \text{et} \quad x=y=\frac{a}{2}.$$

Suivant que x est $<$ ou $>\frac{a}{2}$, F' est négative ou positive. Donc $x=\frac{a}{2}$

correspond à un *minimum*. On suppose ici $m-1>0$. Si l'on avait $m-1<0$, $x=\frac{a}{2}$ correspondrait au contraire à un *maximum*.

148. 2° *Les variables x et y étant liées par la relation $x+y=a$, on demande pour quelles valeurs des variables le produit $x^m y^n$ est un maximum ou un minimum.*

La dérivée de la fonction est ici, en appliquant le théorème des fonctions composées et en regardant x comme la variable indépendante,

$$mx^{m-1}y^n+nx^m y^{n-1}y'.$$

On a d'ailleurs $y'=-1$, en vertu de la relation $x+y=a$. L'équation qui donnera les valeurs de x qu'on cherche sera donc

$$mx^{m-1}(a-x)^n-nx^m(a-x)^{n-1}=0;$$

ce qu'on peut écrire

$$x^{m-1}(a-x)^{n-1}[m(a-x)-nx]=0$$

ou

$$x^{m-1}(a-x)^{n-1}[am-(m+n)x]=0.$$

Cette equation se partage immédiatement en trois autres, qui donnent

$$x=0,\quad x=a,\quad x=\frac{am}{m+n},$$
$$y=a,\quad y=0,\quad y=\frac{an}{m+n}.$$

Considérons la valeur $x=\frac{am}{m+n}$. Pour des valeurs moindres, la dérivée de la fonction considérée est positive; pour des valeurs plus grandes, elle est négative. Par conséquent, la valeur $x=\frac{am}{m+n}$ correspond à un *maximum* qui est $m^m n^n\left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n}$.

Considérons la valeur $x=0$. Si m et n sont tous deux *pairs*, les valeurs plus petites de x rendent la dérivée négative, les valeurs plus grandes la rendent positive. Donc la valeur $x=0$ correspond à un *minimum*. Il en est de même de la valeur $x=a$.

Si l'on suppose $m=n$, le *maximum* correspond à $x=y=\frac{a}{2}$.

149. 3° *Chercher le nombre x dont la racine x est un maximum.*

La fonction dont il faut chercher le maximum est $y=\sqrt[x]{x}$. On en déduit

$$y=x^{\frac{1}{x}}\quad\text{et}\quad \log y=\frac{1}{x}\log x.$$

En prenant la dérivée, il vient (142)

$$\frac{\log e}{y}y'=\frac{1}{x}\,\frac{\log e}{x}-\frac{\log x}{x^2},$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{y}{\log e}\left(\frac{\log e - \log x}{x^2}\right).$$

Pour que y' soit nulle, il faut donc qu'on ait

$$\log e - \log x = 0 \quad \text{ou} \quad x = e.$$

Pour une valeur plus petite de x, la dérivée est positive; pour une valeur plus grande, elle est négative. Le nombre demandé est donc la base des logarithmes népériens.

150. 4° *Étudier la marche de la fonction $y = x - \log x$, lorsque x varie de 0 à l'infini positif.*

Prenons la dérivée de la fonction. Il viendra

$$y' = 1 - \frac{\log e}{x}.$$

Pour $x = 0$, on a

$$y' = -\infty.$$

A mesure que x augmente, $\frac{\log e}{x}$ diminue, et y' reste négative jusqu'à ce qu'on atteigne la valeur de x pour laquelle on a

$$1 - \frac{\log e}{x} = 0,$$

c'est-à-dire

$$x = \log e.$$

Au delà de cette valeur, y' devient positive et croît jusqu'à la valeur 1 pour $x = \infty$.

La fonction y part donc de $+\infty$ pour $x = 0$ (*Alg. élém.*, 247), diminue jusqu'à son *minimum*, qui correspond à $x = \log e$, et augmente ensuite jusqu'à une valeur infinie pour $x = \infty$, un nombre très-grand étant beaucoup plus grand que son logarithme (*voir* 156).

151. 5° *Étant donnés un cercle O et une base BC = a, trouver le triangle ABC construit sur cette base et circonscrit au cercle, dont l'aire est un minimum.*

Fig. 2.

Désignons BD par x, le rayon OD par r, le périmètre du triangle par $2p$, et sa surface par y. Nous aurons (*Trig.*, 58)

$$y^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Mais

$$AE = AF$$

et

$$2AE = 2p - a - x - (a - x) = 2p - 2a,$$

(on a évidemment $BE = BD = x$, $CD = CF = a - x$); par conséquent

$$AE = p - a.$$

On aura donc

$$b = a - x + p - a = p - x,$$
$$c = x + p - a.$$

On peut écrire d'après cela

$$y^2 = px(p-a)(a-x).$$

On a d'ailleurs (*Géom.*, 139)

$$y = pr, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{y}{r}.$$

Il viendra donc, en substituant,

$$y^2 = y\frac{x}{r}\left(\frac{y}{r} - a\right)(a-x),$$

d'où

$$r^2 y = x(y - ar)(a-x).$$

On en déduit

$$\frac{r^2 y}{y - ar} = x(a-x).$$

Prenons la dérivée, nous aurons

$$\frac{r^2 y'(y-ar) - y'.r^2 y}{(y-ar)^2} = a - x - x,$$

c'est-à-dire

$$\frac{-ar^3.y'}{(y-ar)^2} = a - 2x.$$

Pour que y' soit nulle, il faut qu'on ait

$$a - 2x = 0$$

ou

$$x = \frac{a}{2}.$$

Dans ce cas, $b = c$, et le triangle circonscrit est *isocèle*.

$x = \frac{a}{2}$ correspond bien à un *minimum*; car, pour $x < \frac{a}{2}$, la valeur de y' est négative, et elle est positive pour $x > \frac{a}{2}$.

152. 6° *Quel est le segment sphérique maximum, parmi tous les segments sphériques terminés par des zones à une seule base de surface constante?*

Désignons par x le rayon de la sphère dont fait partie le segment cherché et par y sa hauteur; comme il est à une seule base, z étant son volume, on aura (*Géom.*, 284)

$$z = \frac{1}{3}\pi y^2(3x - y).$$

Si la surface constante de la zone correspondante est représentée par πa^2, on a en outre

$$2\pi x.y = \pi a^2 \quad \text{ou} \quad 2xy = a^2.$$

On en déduit

$$x = \frac{a^2}{2y},$$

et la valeur de z devient

$$z = \frac{\pi a^2 y}{2} - \frac{\pi y^3}{3}.$$

En prenant la dérivée, il viendra

$$z' = \frac{\pi a^2}{2} - \pi y^2.$$

Pour que la dérivée soit nulle, il faut dono qu'on ait

$$y^2 = \frac{a^2}{2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2} = y.$$

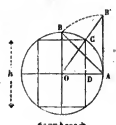
Lo segment considéré est alors une demi-sphère.

Cette solution est bien un *maximum*, car la dérivée est positive pour des valeurs de y moindres que $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, et négative pour des valeurs plus grandes.

Le rayon de la sphère étant $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, la surface de la demi-sphère est bien πa^2.

153. 7° *Étant donné un tronc d'arbre, on demande de le tailler en poutre rectangulaire présentant le maximum de résistance.*

Fig. 3.



Supposons que le cercle O représente la section de l'arbre. Soient b la base et h la hauteur de la section rectangulaire qu'on veut obtenir en enlevant les dosses. On démontro en *Mécanique appliquée* que la résistance de la poutre est proportionnelle au produit bh^2. C'est donc ce produit qu'il s'agit de rendro un maximum. Si nous appelons R le rayon de la section circulaire, on aura

$$b^2 + h^2 = 4R^2,$$

d'où

$$h^2 = 4R^2 - b^2.$$

L'expression bh^2 deviendra donc

$$4R^2 b - b^3.$$

La dérivée de cetto expression est $4R^2 - 3b^2$. Si on l'égale à o, il vient

$$b^2 = \frac{4R^2}{3} \quad \text{et} \quad h^2 = 4R^2 - \frac{4R^2}{3} = \frac{8R^2}{3}.$$

La valeur trouvée pour b^2 correspond bien à un maximum, puisque, pour les valeurs plus petites, la dérivée est positive, et qu'elle devient négative pour les valeurs plus grandes.

La solution obtenue correspond au rapport

$$\frac{b^2}{h^2} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1,414\ldots}.$$

Ce rapport s'éloigne, comme on voit, très-peu des rapports pratiques



$\frac{5}{7}$ et $\frac{7}{10}$, habituellement établis entre la base b et la hauteur h des poutres rectangulaires en bois, supposées placées sur champ.

La construction géométrique qui permet de tracer immédiatement sur la section circulaire les traits de scie qui doivent la transformer en section rectangulaire, est très-simple. On mène le côté AB du carré inscrit, on le reporte par un arc de cercle sur la tangente AB′, et l'on joint le point B′ au centre. La perpendiculaire CD, abaissée du point C sur OA, est égale à $\frac{h}{2}$ et OD à $\frac{b}{2}$. On a, en effet,

$$\frac{OD}{CD} = \frac{OA}{AB'} = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vraie valeur des expressions qui se présentent sous forme indéterminée.

154. Soit l'expression $y = \frac{u}{v}$, u et v étant des fonctions de x; supposons qu'elle se présente, pour $x = a$, sous la forme $\frac{0}{0}$.

Si l'on suppose que x passe d'une valeur déterminée quelconque x à la valeur $x + \Delta x$, l'expression proposée deviendra

$$\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{u + \Delta u}{\Delta x}}{\frac{v + \Delta v}{\Delta x}}.$$

Mais si la valeur déterminée considérée est précisément la valeur a qui annule les deux fonctions u et v, la limite de l'expression proposée pour $x = a$ sera la limite du rapport

$$\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\frac{\Delta v}{\Delta x}}$$

pour $x = a$, c'est-à-dire la valeur correspondante du quotient

$$\frac{F'(x)}{f'(x)},$$

en supposant $u = F(x)$ et $v = f(x)$.

La règle générale sera donc, quand une expression se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$, de remplacer ses deux termes par leurs dérivées, et de chercher la valeur du nouveau rapport obtenu pour la valeur particulière de la variable qui a conduit au symbole de l'indétermination.

Exemples :

155. 1° Soit la progression par quotient

$$\div\!\div 1 : x : x^2 : x^3 : \ldots\ldots$$

La somme des n premiers termes est $\frac{x^n - 1}{x - 1}$. Si l'on suppose $x = 1$, l'ex-

pression devient $\frac{0}{0}$, et l'indétermination est nécessairement apparente, puisque, dans ce cas, la somme des n premiers termes est n. Si l'on prend les dérivées des deux termes, il vient

$$\frac{nx^{n-1}}{1}$$

qui, pour $x = 1$, se réduit bien à n.

2° Soit l'expression

$$\frac{ax^2 - 2abx + ab^2}{cx^2 - 2bcx + cb^2}.$$

Pour $x = b$, elle se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Prenons le rapport des dérivées, il viendra

$$\frac{2ax - 2ab}{2cx - 2bc}.$$

Pour $x = b$, ce rapport se présente encore sous la même forme. Il faut donc redoubler la dérivation et considérer le rapport $\frac{2a}{2c}$ ou $\frac{a}{c}$, qui est la véritable valeur de l'expression proposée pour $x = b$.

3° Soit

$$y = \frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}.$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $y = \frac{0}{0}$. Si l'on prend les dérivées, il vient

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x},$$

et si l'on fait $x = \frac{\pi}{2}$, ce rapport devient 1 qui est la vraie valeur cherchée.

156. 4° Soit l'expression $\frac{\log x}{x}$. On demande la limite de ce rapport quand x croît indéfiniment. Le rapport se présente alors sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. C'est un autre symbole d'indétermination. La règle à appliquer sera encore la même.

En effet, soit d'une manière générale $y = \frac{u}{v}$. Si u et v deviennent infinis pour une certaine valeur de x, pour cette valeur, $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$ deviendront nuls. Or on a

$$y = \frac{\frac{1}{v}}{\frac{1}{u}}.$$

Pour la valeur particulière considérée, y mis sous cette forme se confon-

dra avec le symbole $\frac{0}{0}$. Prenons, suivant la première règle (154), les dérivées des deux termes; nous aurons

$$\frac{-\frac{1}{v^2}\cdot v'}{-\frac{1}{u^2}\cdot u'} = \frac{u^2}{v^2}\cdot\frac{v'}{u'}.$$

Cette expression représente ce que devient $\frac{u}{v}$ pour la valeur spéciale considérée. On aura donc, *seulement pour cette valeur spéciale*,

$$\frac{u}{v} = \frac{u^2}{v^2}\cdot\frac{v'}{u'}, \quad \text{d'où} \quad 1 = \frac{uv'}{vu'} \quad \text{et} \quad \frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}.$$

On retombe ainsi sur la règle générale (154).

Sans qu'il soit besoin d'entrer dans les détails, il sera facile de ramener aux cas précédents les symboles $0 \times \infty$, $\infty - \infty$ (*Alg. élém.*, 127).

Revenons à l'exemple proposé. L'expression $\frac{\log x}{x}$ donne, quand on prend les dérivées de ses deux termes, $\frac{\log e}{x}$: de sorte que la vraie valeur cherchée est 0, pour $x = \infty$.

CHAPITRE IV.

RETOUR A LA FONCTION PRIMITIVE. — APPLICATIONS.

157. Il est facile de voir d'abord que *deux fonctions qui ont des dérivées égales ne peuvent différer que par une constante.*

En effet, soit $F(x)$ *une fonction dont la dérivée est constamment nulle : je dis que cette fonction se réduit à une constante.* On a d'une manière générale (145)

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta x[F'(x) + \alpha].$$

Si F' est constamment nulle, il restera

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta x \,.\, \alpha.$$

Partageons Δx en n parties égales à δ; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$ étant des quantités qui convergent vers zéro en même temps que δ, nous pourrons écrire la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
F(x+\delta) - F(x) &= \delta.\alpha_1,\\
F(x+2\delta) - F(x+\delta) &= \delta.\alpha_2,\\
F(x+3\delta) - F(x+2\delta) &= \delta.\alpha_3,\\
&\ldots\ldots\\
F(x+n\delta) - F[x+(n-1)\delta] &= \delta\alpha_n.
\end{aligned}$$

Si on les ajoute membre à membre, il vient :

$$F(x+n\delta) - F(x) = \delta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n).$$

Soit E la plus grande des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$; on aura

$$F(x+\Delta x) - F(x) < n\delta.E \quad \text{ou} \quad < \Delta x.E.$$

En laissant Δx constant, si l'on multiplie le nombre n de ses parties, δ diminuera de plus en plus, ainsi que les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, et, par conséquent, ainsi que la plus grande d'entre elles E. La différence $F(x+\Delta x) - F(x)$ est donc moindre qu'un produit qui converge vers zéro et qui en approche autant qu'on veut, cette différence est donc nécessairement nulle; et la fonction proposée conservant toujours la même valeur, est une *constante*.

D'après cela, deux fonctions ayant des dérivées égales, ont pour dérivée de leur différence la différence de leurs dérivées, c'est-à-dire zéro. La dérivée de leur différence étant zéro, cette différence est une constante : c'est ce que nous voulions établir.

158. Ceci posé, *on appelle fonction primitive d'une fonction donnée, toute fonction qui a pour dérivée la fonction proposée.*

Quand on donne une fonction, sa dérivée est complétement déterminée. Le problème inverse admet au contraire, d'après ce qu'on vient de dire, une infinité de solutions. En effet, si $F(x)$ est l'une des fonctions primitives de $f(x)$, toutes les fonctions primitives de $f(x)$ seront renfermées dans la formule générale

$$F(x) + C,$$

C désignant une constante tout à fait arbitraire.

Le plus souvent, les conditions de la question particulière qu'on aura en vue de résoudre, permettront de déterminer la *constante*. Si l'on sait, par exemple, quelle valeur M la fonction primitive *générale* doit prendre pour une certaine valeur m de la variable indépendante x, on aura

$$F(m) + C = M, \quad \text{d'où} \quad C = M - F(m).$$

Si l'on a $M = 0$, par exemple, on a $C = -F(m)$, et la fonction primitive *déterminée* est $F(x) - F(m)$.

159. Le tableau général des dérivées (144) permet de revenir immédiatement à la fonction primitive, dans les cas simples.

Soit la fonction x^{m+1}, sa dérivée est $(m+1)x^m$. Il en résulte que la puissance x^m a pour fonction primitive $\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$: ce qu'on reconnaît d'ailleurs immédiatement par la dérivation. Donc, *pour avoir la fonction primitive d'une puissance (sauf la constante), on augmente l'exposant d'une unité, et l'on divise par l'exposant ainsi modifié.* On trouvera facilement, d'après cette règle, la fonction primitive d'un polynôme entier tel que

$$5x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 5x - 3.$$

Cette fonction primitive sera

$$x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{7x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + \mathrm{C}.$$

La même règle s'applique évidemment aux exposants quelconques.

160. Nous désignerons dans le tableau suivant la fonction proposée par $f(x)$, et la fonction primitive par $\mathrm{F}(x)$. On a d'après ce qui précède (**144**) :

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\quad \mathrm{F}(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C} = \frac{2}{3}\,x\sqrt{x} + \mathrm{C}$,

$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$, $\quad \mathrm{F}(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + \mathrm{C} = -\frac{1}{2x^2} + \mathrm{C}$,

$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, $\quad \mathrm{F}(x) = \Phi(x) + \Psi(x) + \mathrm{C}$,

$f(x) = m.\varphi(x)$, $\quad \mathrm{F}(x) = m\Phi(x) + \mathrm{C}$,

$f(x) = m^x$, $\quad \mathrm{F}(x) = \frac{\log e}{\log m} m^x + \mathrm{C}$,

$f(x) = e^x$, $\quad \mathrm{F}(x) = e^x + \mathrm{C}$,

$f(x) = \frac{1}{x}$, $\quad \mathrm{F}(x) = \frac{\log x}{\log e} + \mathrm{C} = l.x + \mathrm{C}$,

$f(x) = \sin x$, $\quad \mathrm{F}(x) = -\cos x + \mathrm{C}$,

$f(x) = \cos x$, $\quad \mathrm{F}(x) = \sin x + \mathrm{C}$,

$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tang}^2 x$, $\quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{tang}\, x + \mathrm{C}$,

$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \mathrm{tang}\, x\, \mathrm{séc}\, x$, $\quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{séc}\, x + \mathrm{C}$,

$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$, $\quad \mathrm{F}(x) = -\cot x + \mathrm{C}$,

$f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \cot x\, \mathrm{coséc}\, x$, $\quad \mathrm{F}(x) = -\mathrm{coséc}\, x + \mathrm{C}$,

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\quad \mathrm{F}(x) = \arcsin x + \mathrm{C}$,

$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\quad \mathrm{F}(x) = \arccos x + \mathrm{C}$,

$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, $\quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{arc\,tang}\, x + \mathrm{C}$,

$f(x) = \frac{-1}{1 + x^2}$, $\quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{arc\,cot}\, x + \mathrm{C}$,

$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$, $\quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{arc\,séc}\, x + \mathrm{C}$.

$f(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$, $\quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{arc\,coséc}\, x + \mathrm{C}$.

161. Le théorème relatif aux fonctions de fonctions (**129**) permet souvent d'obtenir la fonction primitive.

Si l'on a $f(x) = \frac{1}{x+a}$, comme la dérivée d'un logarithme conserve la fonction intacte en dénominateur, et que la dérivée do la variable indépendante est l'unité, on peut écrire

$$F(x) = l.(x+a) + C$$

ou

$$F(x) = \frac{\log(x+a)}{\log e} + C.$$

De même, de

$$f(x) = \frac{1}{(x+a)^p} = (x+a)^{-p},$$

on déduira

$$F(x) = \frac{(x+a)^{-p+1}}{-p+1} + C = \frac{-1}{(p-1)(x+a)^{p-1}} + C.$$

Si l'on donne

$$f(x) = \frac{1}{a^2+x^2},$$

on pourra écrire, en divisant haut et bas par a^2,

$$f(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Remarquons alors que si l'on a $y = \text{arc tang}\, u$, u étant une fonction de x, il vient

$$y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

D'après cela, $\frac{1}{a}$ étant précisément la dérivée de $\frac{x}{a}$, on a pour la fonction primitive de $f(x)$

$$F(x) = \frac{1}{a} \cdot \text{arc tang}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

162. Souvent aussi, en simplifiant d'abord l'expression proposée ou en la transformant, on arrive ensuite immédiatement à la fonction primitive. Soit

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 5}{x-1}.$$

En effectuant la division, on trouve

$$f(x) = x^2 + x - 1 + \frac{4}{x-1}.$$

Par suite,

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 4 \cdot \frac{\log(x-1)}{\log e} + C.$$

Si l'on a

$$f(x) = \sin^2 x,$$

on pourra remplacer $\sin^2 x$ par $\frac{1-\cos 2x}{2}$ (*Trig.*, 23), et l'on aura

$$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Soit encore

$$f(x) = \cos 3x . \sin x.$$

On remplacera $\cos 3x$ par

$$\cos^3 x - 3\sin^2 x . \cos x \ (\textit{Trig.}, 23),$$

et l'on aura

$$f(x) = \cos^3 x \sin x - 3\sin^3 x \cos x,$$

d'où

$$F(x) = -\frac{\cos^4 x}{4} - \frac{3\sin^4 x}{4} + C.$$

Séries qui servent au calcul des logarithmes.

163. Considérons la fonction

$$F(x) = l(1+x).$$

On en déduira

$$F'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Si l'on suppose que x reçoive seulement des valeurs comprises entre 0 *et* 1, on pourra remplacer le quotient $\frac{1}{1+x}$ par la somme des termes de la progression indéfiniment décroissante

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \pm x^{n-1} \mp x^n \pm \ldots,$$

qu'on obtient par division (105).

On pourra donc écrire, en s'arrêtant au $n^{ième}$ ou au $(n+1)^{ième}$ terme,

$$F'(x) \left\{ \begin{aligned} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \pm x^{n-1} \mp \frac{x^n}{1+x}, \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \mp x^n \pm \frac{x^{n+1}}{1+x}. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^n}{n}.$$

$\varphi(x)$ n'est autre chose que la fonction primitive de $F'(x)$, bornée au $n^{ième}$ terme et prise sans constante [on a $F(0) = 0$].

On aura

$$\varphi'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \pm x^{n-1}.$$

Si l'on retranche $\varphi'(x)$ des deux expresions de $F'(x)$, il vient

$$F'(x) - \varphi'(x) = \frac{\mp x^n}{1+x}, \quad F'(x) - \varphi'(x) \pm x^n = \frac{\pm x^{n+1}}{1+x}.$$

Les seconds membres des équations obtenues étant nécessairement de signes contraires, les deux fonctions primitives qui correspondent à leurs premiers membres, c'est-à-dire

$$F(x) - \varphi(x) \quad \text{et} \quad F(x) - \varphi(x) \pm \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

sont l'une *croissante* et l'autre *décroissante*, quand x croît de 0 à 1 [145]. Pour $x = 0$, *elles sont nulles toutes les deux*. Pour une certaine valeur de x comprise entre 0 et 1, elles seront donc *de signes contraires*. Dès lors on aura, par exemple,

$$F(x) - \varphi(x) < 0 \quad \text{et} \quad F(x) - \varphi(x) \pm \frac{x^{n+1}}{n+1} > 0.$$

$F(x)$ tombera donc entre $\varphi(x)$ et $\varphi(x) \mp \frac{x^{n+1}}{n+1}$. On pourra donc poser

$$F(x) = \varphi(x) \mp \alpha \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

α étant une quantité inférieure à l'unité. Et comme à mesure que n augmente, le terme $\frac{\alpha \cdot x^{n+1}}{n+1}$ tend vers zéro (ce qui n'aurait pas lieu si x était plus grand que 1), on peut, en se reportant d'ailleurs à ce que nous avons dit sur la convergence des séries, poser à la limite

$$F(x) = \varphi(x),$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad \mathrm{l}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots.$$

La démonstration précédente prouve qu'on peut admettre pour x la valeur 1; la série obtenue donnera, dans ce cas, le logarithme népérien de 2.

164. Si l'on change x en $-x$ dans la relation (1), on a

$$\mathrm{l}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

ou

$$(2) \qquad -\mathrm{l}(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots.$$

Cette série reste convergente, comme la première, *pourvu que x reste compris entre 0 et 1*. On ne peut plus ici supposer $x = 1$ ou, du moins, les deux membres de l'équation deviennent alors infinis : le premier membre devenant $-\mathrm{l}.0$, et le second membre représentant la série harmonique (103, 2°).

165. *Calcul des logarithmes népériens.*

Ajoutons les formules (1) et (2) membre à membre, il viendra

$$(3) \quad \mathrm{l}(1+x) - \mathrm{l}(1-x) = \mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right).$$

Comme $\frac{1+x}{1-x}$ est > 1, on peut écrire

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{z}{N} = \frac{N+z}{N},$$

N et z étant deux nombres positifs quelconques. On tire de cette relation

$$x = \frac{z}{2N+z}.$$

Le premier membre de la relation (3) devient ainsi

$$\mathrm{l} \cdot \frac{N+z}{N} = \mathrm{l}(N+z) - \mathrm{l}.N,$$

et l'on peut écrire

$$(4)\quad \mathrm{l}(N+z) = \mathrm{l}.N + 2\left[\frac{z}{2N+z} + \frac{z^3}{3(2N+z)^3} + \frac{z^5}{5(2N+z)^5} + \ldots\right].$$

La formule (4) permet de calculer le logarithme népérien de $N+z$ quand on connaît celui de N.

Il est facile de juger du degré d'approximation qu'on a atteint, en s'arrêtant à un certain terme.

Si l'on néglige dans le développement tous les termes qui suivent le terme

$$\frac{2z^{2p+1}}{(2p+1)(2N+z)^{2p+1}},$$

l'erreur commise sera égale à

$$2\left[\frac{z^{2p+3}}{(2p+3)(2N+z)^{2p+3}} + \frac{z^{2p+5}}{(2p+5)(2N+z)^{2p+5}} + \ldots\right].$$

Elle sera donc moindre que

$$\frac{2z^{2p+3}}{(2p+3)(2N+z)^{2p+3}}\left[1 + \frac{z^2}{(2N+z)^2} + \frac{z^4}{(2N+z)^4} + \ldots\right]$$

ou que

$$\frac{2z^{2p+3}}{(2p+3)(2N+z)^{2p+3}\left[1 - \frac{z^2}{(2N+z)^2}\right]},$$

en remarquant que la parenthèse forme une progression indéfiniment décroissante dont la raison est $\frac{z^2}{(2N+z)^2}$. On peut donc poser, en appelant E l'erreur commise et en simplifiant,

$$E < \frac{z^{2p+3}}{2N(N+z)(2p+3)(2N+z)^{2p+1}}.$$

Si l'on écrit simplement, en ne conservant que le premier terme de la série,

$$\mathrm{l}(N+z) = \mathrm{l}.N + \frac{2z}{2N+z},$$

on aura, en faisant $2p+1=1$,

$$E < \frac{z^3}{6N(N+z)(2N+z)}$$

et, à plus forte raison,

$$E < \frac{1}{12}\left(\frac{z}{N}\right)^3.$$

166. *Calcul du module.* Pour passer des logarithmes népériens aux logarithmes vulgaires, il faut calculer le module M, qui est égal à $\frac{1}{l.10}$ (*Alg. élém.*, 255).

Pour calculer l. 10, nous chercherons l. 2 et l. 5; nous aurons ensuite

$$l.10 = l.2 + l.5.$$

Pour avoir l. 2, il suffira de faire dans la formule (4)

$$N = 1 \quad \text{et} \quad z = 1.$$

Il viendra

$$l.2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right).$$

On calculera rapidement un grand nombre de termes, en réduisant en décimales les fractions $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^5}, \ldots$, ce que l'on fera en divisant successivement par 9 les différents résultats trouvés à partir du premier; puis, en les divisant de nouveau et dans l'ordre convenable par la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, ...

Si, dans la formule (4), on fait $N = 4$ et $z = 1$, il vient

$$l.5 = l.4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \ldots\right).$$

On a l. 4 en doublant l. 2, et on calcule la parenthèse en employant le procédé indiqué pour l. 2.

On obtient ainsi :

$$l.2 = 0,693147180559,$$
$$l.5 = 1,609437912434,$$

et, par suite,

$$l.10 = 2,302585092993.$$

On a donc

$$M = \frac{1}{l.10} = \log e = 0,434294481903.$$

167. *Calcul des logarithmes vulgaires.* Pour avoir directement les logarithmes vulgaires, il suffira de multiplier par le module M les deux membres de la relation (4). On aura ainsi

$$\log(N+z) - \log N = 2M\left[\frac{z}{2N+z} + \frac{z^3}{3(2N+z)^3} + \frac{z^5}{5(2N+z)^5} + \ldots\right].$$

En supposant $z = 1$, il vient

$$(5)\quad \log(N+1) - \log N = 2M \left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2N+1)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2N+1)^5} + \ldots \right].$$

C'est cette dernière formule qui a servi à calculer les tables usuelles. L'erreur, en ne conservant dans le second membre que le premier terme, sera moindre (165) que $\frac{1}{12}\left(\frac{1}{N}\right)^3$.

Séries qui conduisent au calcul de π.

168. Considérons la fonction $F(x) = \text{arc tang } x$. Nous aurons

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Si l'on suppose que x reçoive seulement des valeurs comprises entre o *et* 1, on pourra remplacer le quotient $\frac{1}{1+x^2}$ par la somme des termes de la progression indéfiniment décroissante

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots - x^{4n-2} + x^{4n} - \ldots,$$

qu'on obtient par division (nous mettons en évidence la divisibilité par 4 des exposants des termes positifs) (105). On pourra donc écrire

$$F'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots - x^{4n-2} + \frac{x^{4n}}{1+x^2}.$$

Posons

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots - \frac{x^{4n-1}}{4n-1}.$$

$\varphi(x)$ n'est autre chose que la fonction primitive de $F'(x)$, bornée au $2n^{ième}$ terme et prise sans constante [on a $F(0) = 0$].

On aura

$$\varphi'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots - x^{4n-2}.$$

Il en résulte

$$F'(x) - \varphi'(x) = \frac{x^{4n}}{1+x^2}.$$

La différence entre ces deux dérivées est donc constamment positive et moindre que x^{4n}. On peut donc écrire

$$F'(x) - \varphi'(x) > 0 \quad \text{et} \quad F'(x) - \varphi'(x) - x^{4n} < 0.$$

Si l'on considère la première inégalité, on voit que la fonction primitive $F(x) - \varphi(x)$ est *croissante à partir de zéro*. Si l'on considère la seconde inégalité, on voit que la fonction primitive $F(x) - \varphi(x) - \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ est, au contraire, *décroissante à partir de zéro*. Les deux fonctions considé-

rées sont donc, l'une *positive*, l'autre *négative*, *pour toute valeur de x comprise entre* o *et* 1. Par conséquent, $F(x)$ tombant entre

$$\varphi(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x) + \frac{x^{4n+1}}{n+1},$$

on peut poser

$$F(x) = \varphi(x) + \alpha \cdot \frac{x^{4n+1}}{n+1},$$

α étant une quantité inférieure à l'unité. Le terme $\alpha \cdot \frac{x^{4n+1}}{n+1}$ convergeant vers zéro à mesure que n augmente (ce qui n'aurait pas lieu si x était plus grand que 1), on pourra poser à la limite

$$F(x) = \varphi(x),$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad \text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Si l'on change x en $-x$, on a

$$\text{arc tang}(-x) = -\text{arc tang}(x) = -x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \ldots,$$

c'est-à-dire qu'on retombe sur la même série (1). *Cette série subsiste donc pour toutes les valeurs de x comprises entre* -1 *et* $+1$ et, aussi, pour les valeurs limites. La série (1) a été donnée pour la première fois par *Leibnitz*: elle porte souvent son nom.

Si la tangente x donnée était plus grande que l'unité, la série (1) qui fait connaître l'arc correspondant deviendrait divergente. On chercherait dans ce cas l'arc tang $\frac{1}{x}$, complémentaire de l'arc demandé, et l'on aurait

$$\text{arc tang}\, \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\, x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3.x^3} + \frac{1}{5.x^5} - \frac{1}{7.x^7} + \ldots.$$

La série ainsi trouvée est convergente.

169. *Calcul du rapport de la circonférence au diamètre.* Si dans la formule (1) on suppose $x = 1$, on a

$$\text{arc tang}\, x = \frac{\pi}{4},$$

et il vient

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots.$$

Cette série est convergente (105), mais trop lentement pour qu'on puisse l'employer au calcul de π.

Posons d'une manière générale

$$\text{arc tang}\, x = a, \quad \text{arc tang}\, y = b.$$

Nous aurons

$$x = \text{tang}\, a, \quad y = \text{tang}\, b.$$

Par suite,

$$\tang(a+b) = \frac{\tang a + \tang b}{1 - \tang a \tang b} = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Ainsi,

(2) $$\text{arc}(a+b) = \text{arc}\tang x + \text{arc}\tang y = \text{arc}\tang \frac{x+y}{1-xy}.$$

Cette formule permet de diviser le calcul en deux parties, et d'employer des séries très-convergentes.

On trouverait de même la formule

$$\text{arc}\tang x - \text{arc}\tang y = \text{arc}\tang \frac{x-y}{1+xy},$$

qui se déduit d'ailleurs de la précédente en changeant y en $-y$.

Nous voulons avoir, par hypothèse,

$$\text{arc}\tang x + \text{arc}\tang y = \frac{\pi}{4}.$$

Il faudra donc, d'après la formule (2), que les valeurs choisies dans ce cas pour x et pour y, satisfassent à la relation

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1, \quad \text{d'où} \quad x+y = 1-xy.$$

Soit X l'arc dont la tangente est égale à $\frac{1}{5}$. Nous aurons

$$\tang 2X = \frac{2\tang X}{1-\tang^2 X} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

et

$$\tang 4X = \frac{2\tang 2X}{1-\tang^2 2X} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119}.$$

On voit que l'arc $4X$ doit surpasser $\frac{\pi}{4}$ d'une très-petite quantité. Si l'on remplace x par $\frac{120}{119}$ dans la relation

$$x+y = 1-xy,$$

il vient

$$\frac{120}{119} + y = 1 - \frac{120y}{119},$$

d'où

$$y = -\frac{1}{239}.$$

A cette tangente, correspond l'arc $-Y$, et l'on pourra écrire

$$\frac{\pi}{4} = 4X - Y = 4\,\text{arc}\tang\frac{1}{5} - \text{arc}\tang\frac{1}{239}.$$

La série (1) donne d'ailleurs

$$4 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{5} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right),$$

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots.$$

Les séries obtenues ainsi sont très-convergentes, surtout la seconde. Pour avoir π avec 15 décimales exactes, il faut prendre *onze* termes dans la première série, et *trois* seulement dans la seconde, l'erreur commise étant plus petite que le terme auquel on s'arrête (105). On peut aller, en opérant de cette manière, jusqu'à la dix-septième décimale; mais comme on a deux fois à multiplier par 4, pour avoir d'abord $4X$ et ensuite π, on ne comptera que sur les 15 premières décimales. On prendra donc

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1° Prouver que $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ a pour limite e^x, quand m augmente indéfiniment, et trouver l'expression du développement de e^x en série.

2° En conclure l'expression du développement de a^x en série.

3° Prouver que la limite de $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m$ est $\frac{1}{e}$, lorsque m augmente indéfiniment, et former la série correspondante.

4° La série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$ est convergente, si la limite de $\sqrt[n]{u_n}$ est inférieure à l'unité.

5° Trouver la dérivée de l'expression

$$y = \mathrm{l.}\left(\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}\right) \quad \left(y' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\right).$$

6° Trouver la dérivée de l'expression

$$y = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2} \quad \left(y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

7° Trouver la dérivée de l'expression

$$y = \log\left[x + (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{arc\,séc} \frac{x}{a}\right] \quad \left[y' = \frac{\log e}{x}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

8° Trouver la dérivée de l'expression

$$y = \operatorname{arc\,tang} \frac{a+x}{1-ax} \quad \left(y' = \frac{1}{1+x^2}\right).$$

9° Chercher la dérivée de l'expression

$$y = \log \frac{1 - \cos mx}{1 + \cos mx} \quad \left(y' = \log e\, \frac{2m}{\sin mx}\right).$$

10° Chercher les dérivées des expressions suivantes (142) :

$$\arcsin x + \arcsin y = a \qquad \left(y' = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\right),$$

$$x\sqrt{1+y} = y\sqrt{1+x} \qquad \left[y' = \frac{y^2(2+x)}{x^2(2+y)}\right],$$

$$y.\sin nx = ae^{nx+y} \qquad \left[y' = \frac{ny}{1-y}(1-\cot nx)\right].$$

11° Chercher les maximums et les minimums de la fonction

$$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12,$$

$(x = 1$, minimum, $x = 2$, maximum, $x = 3$, minimum$)$.

12° Chercher les maximums et les minimums de la fonction

$$y = \frac{x}{1+x^2} \quad (x = \pm 1).$$

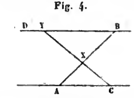
13° Chercher les maximums et les minimums de la fonction

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1} \quad (x = 0, \quad x = 2).$$

14° Un point lumineux, situé sur une verticale donnée, éclaire une surface horizontale élémentaire de position connue. A quelle hautenr, par rapport à la surface horizontale prolongée, doit être situé le point lumineux, pour que l'élément considéré reçoive le maximum d'éclairement?

15° Étant données les parallèles AC, BD, et la ligne AB, mener par le point C la ligne CXY, telle, que la somme des triangles BXY, ACX, soit un minimum.

Fig. 4.



16° Chercher le rayon du cercle dans lequel, à un arc de longueur donnée, correspond le segment maximum.

17° Sur la droite qui joint deux lumières, trouver le point le plus éclairé.

18° Parmi toutes les niches de même surface, quelle est celle de volume maximum?

19° Parmi tous les cylindres ou tous les cônes de même surface totale, quel est celui dont le volume est maximum?

20° Parmi tous les cylindres ou tous les cônes de même volume, quel est celui de surface minimum (on distinguera le cas où le volume considéré est ouvert et celui où il est fermé)?

21° Maximum de la surface totale d'un cylindre inscrit dans une sphère donnée.

22° Maximum de la surface totale d'un cône inscrit dans une sphère donnée.

23° Chercher le maximum de la fonction

$$y = \frac{\log x}{x^n} \qquad \left(y = \frac{1}{ne}\right).$$

24° Étudier la marche de la fonction

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 1},$$

lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

25° Étudier, dans les mêmes conditions, la marche de la fonction

$$y = e^x + e^{-x}.$$

26° Chercher les dérivées successives, c'est-à-dire premières, secondes, troisièmes, quatrièmes, ..., des fonctions

$$\mathrm{l}.x, \quad e^x, \quad \sin x, \quad \cos x.$$

27° Vraie valeur de l'expression

$$\frac{a^n - x^n}{\log a^n - \log x^n},$$

pour $x = a$

$$(a^n).$$

28° Vraie valeur de l'expression

$$\frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{1 - x^2},$$

pour $x = 1$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right].$$

29° Vraie valeur de l'expression

$$\frac{x^4 + \tang^2 x}{x^5 + \sin^2 x},$$

pour $x = 0$

$$(1).$$

30° Étant donnée la fonction implicite

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0,$$

trouver la vraie valeur de y' pour $x = 0$

$$(\pm 1).$$

LIVRE TROISIÈME.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS.

CHAPITRE PREMIER.

GÉNÉRALITÉS RELATIVES AUX VARIATIONS D'UNE FONCTION ENTIÈRE. — COMPOSITION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

Définitions.

170. Lorsqu'une équation renferme seulement des fonctions algébriques, elle est dite *algébrique;* elle est *transcendante* dans le cas contraire (116).

Toute équation algébrique à une seule inconnue ou à une seule variable peut, après la disparition des dénominateurs, celle des radicaux, et la transposition des termes, être ramenée à la forme (*)

(A) $$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

x est la *variable;* m est un nombre entier, *degré de l'équation;* $A_0, A_1, A_2 \ldots, A_{m-1}, A_m$, sont des *coefficients donnés :* ces coefficients sont ou des quantités réelles ou des quantités imaginaires de la forme $a+bi$.

Quand tous les coefficients sont des *nombres donnés,* l'équation reçoit le nom d'*équation numérique.*

On peut ramener, quand on le juge convenable, le coefficient du premier terme de l'équation à l'unité (*voir* 188).

La résolution algébrique d'une équation consiste à trouver les expressions qui, *composées algébriquement* avec les coefficients de cette équation et substituées à l'inconnue, rendent les deux membres identiques, c'est-à-dire le premier égal à zéro : ces expressions sont les *racines* de l'équation.

Il a été démontré qu'au delà du *quatrième* degré, la *résolution algébrique* des équations générales était impossible.

Les efforts infructueux tentés pour parvenir à cette résolution algébrique ont du moins conduit à la connaissance d'un grand nombre de propriétés communes aux équations de tous les degrés. L'ensemble de ces propriétés constitue la *théorie générale des équations,* et cet ensemble sert de base aux principes employés pour la résolution des équations numériques.

171. I. Nous avons déjà démontré que toute fonction entière et rationnelle de la variable x était une fonction continue. Et la démonstration

(*) C'est cette forme que nous sous-entendrons toujours, quand nous n'exprimerons pas le contraire.

rappelée s'applique évidemment à toute fonction dont la dérivée est *finie*. Car, d'une manière générale, on a (114)

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta x[F'(x) + \alpha].$$

Et le produit qui compose le second membre tendant vers zéro en même temps que Δx, puisqu'on suppose que $F'(x)$ ne peut prendre aucune valeur infinie, il en est de même du premier membre.

On peut donc dire que *toute fonction reste continue tant que sa dérivée reste finie.*

172. II. *Étant donnée une fonction entière et rationnelle*

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

on peut toujours substituer à x une valeur assez grande pour que le premier terme l'emporte sur la somme de tous les autres, et impose son signe au polynôme.

Comparons le premier terme $A_0 x^m$ au terme quelconque $A_n x^{m-n}$. Nous aurons

$$A_0 x^m - A_n x^{m-n} = x^{m-n}[A_0 x^n - A_n].$$

On pourra toujours donner à x une valeur assez grande pour que le produit $A_0 x^n$ l'emporte sur le coefficient A_n, et de telle quantité qu'on voudra. Le facteur x^{m-n} pouvant lui-même croître sans limites, on voit que le premier terme $A_0 x^m$ peut surpasser un terme quelconque du polynôme d'une quantité aussi grande qu'on voudra, et, par suite, il peut surpasser de même la somme de tous les termes du polynôme.

A partir d'une certaine valeur de x, le polynôme prendra donc le signe de son premier terme et le conservera pour toutes les valeurs supérieures de x, en croissant lui-même indéfiniment.

173. D'après ce théorème, toute fonction *de degré pair* a le même signe que le coefficient A_0 de son premier terme pour des valeurs très-grandes, *positives ou négatives*, de la variable. Toute fonction *de degré impair* a le même signe que le coefficient A_0 de son premier terme pour des valeurs très-grandes, mais *positives*, de la variable; elle a un signe contraire à celui de A_0 pour des valeurs très-grandes, mais *négatives*, de la variable.

174. III. *Lorsque deux nombres a et b, substitués dans une fonction entière $F(x)$, donnent des résultats de signes contraires, on peut affirmer que l'équation $F(x) = 0$ a au moins une racine réelle comprise entre a et b.*

En effet, si la variable x varie d'une manière continue depuis a jusqu'à b, $F(x)$ variera également d'une manière continue depuis $F(a)$ jusqu'à $F(b)$ (171). Et comme $F(a)$ et $F(b)$ ont des signes contraires, $F(x)$ entre ces deux valeurs passera nécessairement par zéro, limite commune des quantités positives et négatives. Donc, entre a et b, la valeur de x se confondra au moins une fois avec l'une des racines de l'équation proposée.

175. De cet important théorème, résultent les conséquences suivantes :

1° *Toute équation algébrique à coefficients réels et de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à son dernier terme.*

Soit
$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0.$$

On peut toujours supposer que le coefficient A_0 est positif. m étant impair, une très-grande valeur positive donnée à x rendra le polynôme positif; une très-grande valeur négative donnée à x le rendra négatif (173). Si l'on fait $x = 0$, le polynôme se réduira à son dernier terme A_m. Si A_m est *positif*, le changement de signe du polynôme aura lieu pour x compris entre $-\infty$ et o : l'équation aura donc au moins une racine *négative*. Si A_m est *négatif*, le changement de signe du polynôme aura lieu pour x compris entre $+\infty$ et o : l'équation aura alors au moins une racine *positive*.

Le tableau suivant résume ce que nous venons de dire :

VALEURS DONNÉES A x.	SIGNES DE $F(x)$.
$-\infty$	$-$
o	Même signe que $A_m (\pm)$.
$+\infty$	$+$

L'équation $x^3 - 4x^2 + 5x + 7 = 0$ a au moins une racine négative.

L'équation $x^5 - 7x^3 + 2x^2 - 3x - 9 = 0$ a au moins une racine positive.

2° *Toute équation algébrique à coefficients réels et de degré pair a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative, lorsque son dernier terme est négatif.*

D'après ce qui précède, il suffit de former le tableau suivant :

VALEURS DONNÉES A x.	SIGNES DE $F(x)$.
$-\infty$	$+$
o	Même signe que $A_m (-)$.
$+\infty$	$+$

Il y a donc changement de signe du polynôme quand x passe de $-\infty$ à o et quand x passe de o à $+\infty$, c'est-à-dire que l'équation admet au moins une racine *négative* et au moins une racine *positive*.

L'équation $x^4 - 3x^3 + x^2 - 11x - 2 = 0$ a au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

176. On voit qu'il y a doute *quand le dernier terme du polynôme est positif*, l'équation étant de degré pair, parce qu'aucun changement de signe ne se *manifeste* dans la fonction, quand x saute de $-\infty$ à $+\infty$ en passant par o. Nous admettrons que, dans ce cas aussi, l'équation $F(x) = 0$ a au moins *une* racine : seulement, cette racine peut être *imaginaire*.

Nous énoncerons sous une forme tout à fait générale, mais sans la démontrer, la proposition fondamentale suivante (voir les *Exercices de Mathématiques* de Cauchy) :

Toute équation algébrique à une inconnue, de la forme définie précédemment (170), *admet au moins une racine réelle ou une racine imaginaire de la forme* $a + bi$.

Il faut bien comprendre de quelle manière une racine imaginaire $a + bi$ peut satisfaire à l'équation $F(x) = 0$. D'après les détails donnés dans le Livre Ier sur les expressions imaginaires (ch. VI), on sait que la substitution de la quantité imaginaire $a + bi$ à la place de x dans le premier membre de l'équation, conduira finalement à un résultat de même forme $A + Bi$. Si $a + bi$ est racine, on aura

$$A + Bi = 0.$$

c'est-à-dire que les valeurs de a et de b satisferont aux conditions $A = 0$ et $B = 0$.

Composition des équations.

177. Théorème fondamental. — *Toute équation du degré m (170) admet exactement m racines réelles ou imaginaires.*

L'équation $F(x) = 0$ admet en effet au moins une racine (176). Désignons cette racine par a. Puisqu'on a $F(a) = 0$, $F(x)$ est divisible par le binôme $x - a$ (*Alg. élém.*, 36). Le premier terme du quotient Q sera $A_0 x^{m-1}$, et l'on aura identiquement :

$$F(x) = (x - a) \cdot Q.$$

Toute équation ayant au moins une racine, l'équation $Q = 0$ en admettra une b, et l'on aura

$$Q = (x - b) \cdot Q'.$$

Le premier terme du quotient Q' sera évidemment $A_0 x^{m-2}$. De même, l'équation $Q' = 0$ admettra une racine c, et l'on aura

$$Q' = (x - c) \cdot Q''.$$

Le premier terme du quotient Q'' sera $A_0 x^{m-3}$.

En continuant toujours de la même manière, on obtiendra chaque fois un nouveau facteur binôme; et le degré des quotients successifs allant toujours en diminuant d'une unité, on finira par arriver à un dernier quotient indépendant de x qui sera nécessairement A_0. En remplaçant alors dans l'expression de $F(x)$, Q par sa valeur en fonction de Q', Q' par sa valeur en fonction de Q'', etc., on arrivera à l'identité

$$F(x) = (x - a)(x - b)(x - c)\ldots(x - k)(x - l) \cdot A_0.$$

Cette identité prouve que l'équation $F(x) = 0$ est satisfaite pour les valeurs $x = a$, $x = b$, $x = c, \ldots$, en nombre m, et qu'elle l'est seulement pour ces valeurs (78); car toute autre quantité mise à la place de x n'annulant aucun des facteurs du second membre, ne peut non plus annuler le premier membre.

178. *Remarques.* — I. La relation obtenue montre comment on peut former le premier membre d'une équation dont les racines sont données. Le seul coefficient A_0 restant arbitraire, on voit que deux équations qui ont les mêmes racines ne peuvent différer que par un facteur constant.

II. *Deux polynômes en x du degré m étant égaux pour plus de m valeurs de la variable, sont identiques.* En effet, l'expression de l'égalité de ces deux polynômes X et X′ conduit à une équation du degré m de la forme $X - X' = 0$, qui admet précisément pour racines les valeurs considérées de la variable, et qui ne peut en admettre un nombre supérieur à m, à moins que le premier membre ne se réduise de lui-même à zéro.

III. La démonstration précédente ne suppose pas que les racines $a, b, c, \ldots, k, l$, soient différentes. Il peut arriver, par exemple, que l'équation admette n racines *égales* à a. On dit alors que a est *une racine multiple du $n^{\text{ième}}$ ordre*. Une racine qui ne se reproduit pas est *une racine simple ou du premier ordre.*

IV. Les facteurs $(x - a)$, $(x - b)$, $(x - c)$, ..., sont appelés *facteurs du premier degré* ou *facteurs premiers* du polynôme $F(x)$ [12].

Si on les multiplie deux à deux, trois à trois, ..., on formera *tous* les

diviseurs du polynôme $F(x)$. Le nombre des diviseurs du second degré est donc $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$; celui des diviseurs du troisième degré est

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ etc.}$$

179. *Pour essayer si un nombre a est racine, on divise* $F(x)$ *par* $x - a$. On obtient un quotient de la forme

$$A_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} + \ldots + B_{m-1},$$

et un reste R. $F(x)$ *étant égal au produit du diviseur par le quotient plus le reste,* on doit avoir *identiquement*

$$F(x) = A_0 x^m + \begin{array}{c|}B_1 \\ -aA_0\end{array}\, x^{m-1} + \begin{array}{c|}B_2 \\ -aB_1\end{array}\, x^{m-2} + \begin{array}{c|}B_3 \\ -aB_2\end{array}\, x^{m-3} + \ldots + \begin{array}{c|}B_{m-1} \\ -aB_{m-2}\end{array}\, x + \begin{array}{c}R \\ -aB_{m-1}\end{array}$$

c'est-à-dire, en égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres :

$$A_1 = B_1 - aA_0, \quad A_2 = B_2 - aB_1, \quad A_3 = B_3 - aB_2, \ldots.$$
$$A_{m-1} = B_{m-1} - aB_{m-2}, \quad A_m = R - aB_{m-1}.$$

On aura donc

$$B_1 = A_1 + aA_0, \quad B_2 = A_2 + aB_1, \quad B_3 = A_3 + aB_2, \ldots,$$
$$B_{m-1} = A_{m-1} + aB_{m-2}, \quad R = A_m + aB_{m-1}.$$

Ces égalités permettront de déduire rapidement les différents termes du quotient les uns des autres. On voit que *chaque coefficient du quotient se compose du coefficient du terme de même rang dans* $F(x)$, *augmenté du produit de a par le coefficient du terme précédemment écrit au quotient.*

a est un nombre positif ou négatif. Si $a = -2$, on a

$$x - a = x + 2 = x - (-2).$$

Soit à diviser $4x^5 - 10x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 9x - 11$ par $x - 2$.

Le premier terme du quotient est $4x^4$. On obtient alors comme il suit les différents coefficients du quotient et le reste de la division.

$$-10 + 2 \times 4 = -2. \quad +6 - 2 \times 2 = 2, \quad -7 + 2 \times 2 = -3,$$
$$9 - 2 \times 3 = 3, \quad -11 + 2 \times 3 = -5.$$

On a alors pour quotient

$$4x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3,$$

et le reste est égal à -5. Ainsi, 2 n'est pas racine et $F(2) = -5$ (*Alg. élém.*, 36).

Si le polynôme proposé n'est pas *complet,* il faut supposer les termes manquants écrits avec le coefficient 0. Soit à essayer si -2 est racine de l'équation

$$2x^4 - 5x^3 + 7x - 5 = 0.$$

Le premier terme du quotient est $2x^3$. On a ensuite

$$-5 - 2 \times 2 = -9, \qquad 0 + 2 \times 9 = 18,$$
$$7 - 2 \times 18 = -29, \quad -5 + 2 \times 29 = 53.$$

Le quotient sera donc

$$2x^3 - 9x^2 + 18x - 29$$

et le reste de la division étant 53, -2 ne sera pas racine, et l'on aura

$$F(-2) = 53.$$

180. *Si deux nombres α et β, substitués dans l'équation $F(x) = 0$ à la place de x, donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent un nombre impair de racines (une racine multiple d'ordre n compte nécessairement n fois).*

Soient $a, b, c, \ldots, g$, les racines comprises entre α et β; soit Q le quotient de $F(x)$ par le produit $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-g)$. On aura

$$F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-g).Q.$$

Q représente le produit du coefficient du premier terme de l'équation, par les facteurs qui correspondent aux racines réelles non comprises entre α et β et aux racines imaginaires.

Substituons successivement dans l'identité obtenue α et β à la place de x. Il viendra

$$F(\alpha) = (\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)\ldots(\alpha-g)Q_\alpha,$$

$$F(\beta) = (\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)\ldots(\beta-g)Q_\beta.$$

$F(\alpha)$ et $F(\beta)$ étant par hypothèse de signes contraires, il doit en être de même des seconds membres correspondants. Q_α et Q_β sont de même signe, sans quoi l'équation $Q = 0$ aurait une racine comprise entre α et β. Les produits

$$(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)\ldots(\alpha-g),$$
$$(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)\ldots(\beta-g),$$

doivent donc être de signes contraires; et comme les facteurs du premier produit sont tous négatifs, tandis que les facteurs du second sont tous positifs, il faut que ces facteurs soient en nombre impair, c'est-à-dire qu'il existe entre α et β un nombre impair de racines réelles.

Si $F(\alpha)$ et $F(\beta)$ étaient de même signe, on arriverait à la conclusion contraire. Ainsi, *deux nombres qui, substitués à x, donnent des résultats de même signe, comprennent nécessairement un nombre pair de racines réelles* (*ce qui n'exclut pas zéro*) (*).

(*) Les considérations géométriques suivantes peignent bien aux yeux le théorème qu'on vient de démontrer.

Fig. 5.

Choisissons deux axes rectangulaires OX et OY. Portons les valeurs de x en abscisses sur l'axe OX, à partir de l'origine O, et les valeurs de $F(x)$ en ordonnées, comme nous l'avons déjà expliqué (*Trigon.*, 2). Les points où la courbe ainsi obtenue rencontrera l'axe OX, correspondront aux valeurs de x qui rendent $F(x) = 0$, c'est-à-dire aux racines de cette équation. Si deux valeurs $x = OA$, $x = OB$, correspondent à des valeurs AM et BN de la fonction, qui soient de signes contraires, pour aller du point M au point N, la courbe de-

En se reportant au n° 175, on voit que *toute équation algébrique de degré impair admet un nombre impair de racines réelles, et que toute équation de degré pair admet un nombre pair de racines réelles; de sorte que les racines imaginaires, quand elles existent, sont toujours en nombre pair.*

181. *Racines imaginaires conjuguées.* — Le nombre toujours pair des racines imaginaires se trouve encore établi par le remarquable théorème suivant.

Lorsqu'une équation algébrique à coefficients réels admet une racine imaginaire de la forme $a+bi$, elle admet aussi pour racine l'expression conjuguée $a-bi$.

En remplaçant x par $a+bi$, on arrive à l'expression

$$A+Bi=0,$$

et comme $a+bi$ est racine, on a (176)

$$A=0 \quad \text{et} \quad B=0.$$

Si l'on remplace x par $a-bi$, les coefficients de $F(x)$ étant supposés réels, le résultat obtenu ne différera du précédent que par le changement de i en $-i$. On aura donc pour premier membre $A-Bi$, et ce premier membre sera bien égal à zéro, puisqu'on a $A=0$ et $B=0$, c'est-à-dire $a-bi$ sera racine.

Cette proposition ne serait plus vraie, si l'équation avait des coefficients imaginaires, puisque ces coefficients ne changeraient pas quand on passerait pour x de la valeur $a+bi$ à la valeur $a-bi$. On ne pourrait donc plus répondre d'arriver, par la seconde substitution, à un résultat conjugué du premier.

Les deux racines $a+bi$ et $a-bi$ correspondent aux facteurs du premier degré $(x-a-bi)$ et $(x-a+bi)$ Le produit de ces deux facteurs $(x-a)^2+b^2$ est un polynôme du second degré.

Par suite, on peut dire que *le premier membre de toute équation algébrique à coefficients réels est le produit d'autant de facteurs réels du premier degré qu'elle admet de racines réelles, et d'autant de facteurs réels du second degré qu'elle admet de couples de racines imaginaires.*

Il est évident que si la racine $a+bi$ est une racine multiple d'ordre n, sa conjuguée $a-bi$ sera aussi une racine multiple du même ordre.

---

vra nécessairement couper l'axe OX *une* fois au point C ou un nombre *impair* do fois aux points D, C, E.

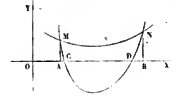


Fig. 6.

Si les deux valeurs $x=OA$, $x=OB$, correspondent à des valeurs AM et BN de la fonction, qui soient de même signe, pour aller du point M au point N, la courbe *ne coupera pas* l'axe OX ou le coupera nécessairement un nombre *pair* de fois, aux points C et D par exemple. (*Voir*, pour plus de détails, la *Géométrie analytique*, t. III.)

Relations qui lient les coefficients et les racines d'une équation algébrique.

182. Supposons, pour plus de simplicité, que l'équation considérée ait l'unité pour coefficient de son premier terme. Nous aurons identiquement (177)

$$\begin{aligned} &x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m \\ &= (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l). \end{aligned}$$

Si nous nous reportons alors à l'établissement de la formule du binôme (*Alg. élém.*, 236), nous pourrons remplacer le second membre par

$$x^m - S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} - S_3 x^{m-3} + \ldots \pm S_m.$$

En effet, dans le produit de m binômes $(x+a)$, $(x+b)$ $(x+c)$, ..., le coefficient de x^{m-1} est la somme des seconds termes a, b, c, ..., le coefficient de x^{m-2} est la somme des mêmes seconds termes pris deux à deux; le coefficient de x^{m-3} est la somme des seconds termes des binômes pris trois à trois; ...; le dernier terme est le produit de tous ces seconds termes. Si les seconds termes des binômes considérés changent de signes, il suffit de changer les signes des coefficients du développement qui renferment les produits des quantités a, b, c, ..., assemblées en nombre impair.

De l'identité

$$\begin{aligned} &x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m \\ &= x^m - S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} - S_3 x^{m-3} + \ldots \pm S_m, \end{aligned}$$

on déduit

$$\begin{aligned} A_1 &= -S_1 = -(a+b+c+\ldots+k+l), \\ A_2 &= S_2 = (ab+ac+\ldots+kl), \\ A_3 &= -S_3 = -(abc+abd+\ldots+akl+\ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_m &= \pm S_m = \pm\, abcd\ldots kl. \end{aligned}$$

Donc, *dans toute équation algébrique dont le premier terme a pour coefficient l'unité :*

Le coefficient du second terme est la somme des racines, prise en signe contraire ;

Le coefficient du troisième terme est la somme des produits des racines prises deux à deux ;

Le coefficient du quatrième terme est la somme des produits des racines trois à trois, prise en signe contraire, etc.

Le dernier terme est égal au produit de toutes les racines, pris avec son signe si l'équation est de degré pair, pris en signe contraire si l'équation est de degré impair.

183. Comme l'équation complète du degré m renferme $m+1$ termes, le théorème précédent fournit m équations entre les m racines. Ces équations pourront faciliter la résolution de l'équation proposée, lorsqu'on connaîtra quelques autres relations entre ses racines (184); mais, seules,

elles ne peuvent pas conduire à cette résolution. Car si l'on voulait obtenir la racine a, par exemple, en se servant des m équations du n° 182, il faudrait éliminer entre ces m équations les $m-1$ autres racines. Comme toutes les racines y entrent d'ailleurs d'une manière parfaitement symétrique, l'équation en a à laquelle on parviendra sera identiquement celle qu'on aurait trouvée en cherchant l'une quelconque des autres racines $b, c, d, \ldots$, c'est-à-dire que l'équation en a aura nécessairement pour racines, non-seulement a, mais toutes les autres racines $b, c, d, \ldots$ L'équation en a ne sera donc autre chose que l'équation proposée elle-même, sauf la substitution du symbole a au symbole x.

C'est ce que le calcul vérifie immédiatement.

Séparons la racine a des autres racines $b, c, d, \ldots$, et désignons par $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{m-1}$, les sommes de produits de ces autres racines prises 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ..., $m-1$ à $m-1$. On aura alors (61)

$$\begin{aligned}
A_1 &= -a - s_1,\\
A_2 &= s_1 a + s_2,\\
A_3 &= -s_2 a - s_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{m-1} &= \mp s_{m-2} a \mp s_{m-1},\\
A_m &= \pm s_{m-1} a.
\end{aligned}$$

Multiplions la première équation par a^{m-1}, la seconde par a^{m-2}, la troisième par $a^{m-3}, \ldots$, l'avant-dernière par a, et ajoutons membre à membre tous les résultats obtenus. Il viendra évidemment

$$A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + A_3 a^{m-3} + \ldots + A_{m-1} a + A_m = -a^m.$$

184. *Exemple. — Résoudre l'équation* $x^3 + px + q = 0$, *sachant qu'elle a deux racines égales entre elles.*

Le terme en x^2 manquant a pour coefficient 0, ce qui apprend que la somme des racines est nulle.

Si l'on désigne par x' la racine *simple* et par x'' la racine *double*, on aura donc

$$x' + 2x'' = 0, \quad \text{d'où} \quad x' = -2x''.$$

p représente la somme des produits des racines prises deux à deux, c'est-à-dire

$$2x'x'' + x''^2 = -4x''^2 + x''^2.$$

On peut donc écrire

$$p = -3x''^2,$$

d'où

$$x'' = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{et} \quad x' = \mp 2\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Un seul signe convient, et l'on doit prendre ensemble, soit les signes supérieurs, soit les signes inférieurs.

Comme une équation de degré impair admet toujours au moins une racine réelle (180), dans le cas que nous examinons, p est nécessairement *négatif*, et l'équation $x^3 + px + q = 0$ a ses *trois* racines *réelles*.

Si l'on demande quelle relation existe alors entre les coefficients p et q, on remarquera que q représentant le produit des trois racines, pris en

signe contraire (182), on a

$$q = 2x''^3,$$

d'où

$$x'' = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

La condition demandée est donc, en vertu de la première valeur $\sqrt{-\frac{p}{3}}$ trouvée pour x'',

$$\sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}},$$

d'où

$$\left(-\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

ce qui revient à

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$$

ou à

$$4p^3 + 27q^2 = 0.$$

Des valeurs $p = -3x''^2$ et $q = 2x''^3$, on déduit aussi

$$x'' = -\frac{3q}{2p}$$

et

$$x' = \frac{3q}{p}.$$

On voit que les racines égales entre elles sont de même signe que q, puisque p est nécessairement négatif; la racine simple est alors de signe contraire à q.

CHAPITRE II.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS. — LIMITES DES RACINES.

Transformation des équations.

185. La transformation des équations a pour objet général de déduire d'une équation donnée une autre équation dont les racines aient avec celles de la première une relation déterminée.

Nous allons parcourir les transformations les plus simples et les plus usitées.

186. I. *Changer les signes des racines d'une équation.*

On veut trouver une équation qui ait pour racines les racines de l'équation donnée, changées de signes. Par conséquent, x représentant une racine quelconque de l'équation proposée et y la racine correspondante de l'équation cherchée, on devra avoir $x = -y$. Il suffira donc de substituer à x cette valeur pour résoudre la question. Et comme le symbole qui représente l'inconnue est ici tout à fait indifférent, il sera plus simple de changer

x en $-x$. Les termes qui contiennent x à une puissance impaire changeront de signes, et ceux qui contiennent x à une puissance paire garderont les leurs. Si l'équation est de degré impair, le premier terme deviendra alors négatif. Pour le rendre positif, il faudra changer tous les signes, c'est-à-dire que les termes qui contiendront x à une puissance impaire conserveront leurs signes, tandis que ceux qui contiennent x à une puissance paire en changeront. o doit être regardé comme un nombre pair.

L'équation

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7 = 0$$

a pour *transformée* en $-x$

$$x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 7 = 0.$$

L'équation

$$x^5 - 7x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

a pour transformée en $-x$

$$x^5 - 7x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0.$$

187. II. *Multiplier ou diviser par une quantité quelconque l les racines d'une équation.*

x représentant une racine quelconque de l'équation proposée, et y la racine correspondante de l'équation cherchée; on devra avoir dans le premier cas :

$$y = lx, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{y}{l}.$$

Il suffira donc pour résoudre la question de substituer à x cette valeur, ou, ce qui revient au même, la valeur $\frac{x}{l}$. Il viendra alors (en supposant le coefficient du premier terme égal à l'unité)

$$\frac{x^m}{l^m} + A_1\frac{x^{m-1}}{l^{m-1}} + A_2\frac{x^{m-2}}{l^{m-2}} + \ldots + A_m = 0,$$

d'où, en multipliant par l^m,

$$x^m + A_1 l x^{m-1} + A_2 l^2 x^{m-2} + \ldots + A_m l^m = 0.$$

Il faudra donc, pour avoir la *transformée* en lx, multiplier respectivement les termes de l'équation proposée par les puissances l^0, l^1, l^2, $l^3, \ldots, l^m$. Dans chaque terme, la somme des exposants du multiplicateur l et de l'inconnue x est toujours égale à m.

Quand on aura trouvé les racines de la transformée, pour avoir celles de la proposée, on les divisera par l.

Si les racines de l'équation donnée devaient être divisées par l, au lieu de multiplier les coefficients des différents termes par les puissances successives de l, on les diviserait par ces mêmes puissances.

188. III. *Chasser les dénominateurs d'une équation, de manière que le premier terme ait toujours pour coefficient l'unité.*

Effectuons la transformation du numéro précédent en laissant le multiplicateur l indéterminé. Une fois cette transformation effectuée, il suffira de remplacer l par le plus petit nombre divisible par tous les dénominateurs, ou mieux, par un nombre tel, que tous les dénominateurs disparaissent.

Soit l'équation

$$x^3 - \frac{7x^2}{2} + \frac{3x}{7} - \frac{5}{4} = 0.$$

Passons à la transformée en lx. Nous aurons

$$x^3 - \frac{7lx^2}{2} + \frac{3l^2x}{7} - \frac{5l^3}{4} = 0.$$

Le plus petit nombre divisible par tous les dénominateurs est 28; mais il suffit évidemment de prendre $l = 14$, puisque l^3 contiendra alors 2^3. On trouvera ainsi pour *transformée*

$$x^3 - 49x^2 + 84x - 3430 = 0.$$

189. IV. *Augmenter ou diminuer les racines d'une équation d'une même quantité h.*

Supposons d'abord qu'il s'agisse de *diminuer* les racines.

x représentant une racine quelconque de l'équation proposée, y la racine correspondante de l'équation cherchée, on devra avoir

$$y = x - h, \quad \text{d'où} \quad x = y + h.$$

Il faut donc remplacer x par $y + h$. Si l'on représente l'équation donnée par $F(x) = 0$, on obtient pour transformée en y (113, *en note*) :

$$F(h) + F'(h)y + \frac{F''(h)}{1.2}y^2 + \frac{F'''(h)}{1.2.3}y^3 + \ldots + \frac{F^{(m)}(h)}{1.2.3\ldots m}y^m = 0.$$

Soit l'équation

$$2x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Supposons qu'on veuille diminuer toutes les racines de 3. On aura

$$\begin{array}{ll}
F = 2x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 5x - 1, & F(3) = -85, \\
F' = 8x^3 - 21x^2 - 16x + 5, & F'(3) = -16, \\
F'' = 24x^2 - 42x - 16, & \dfrac{F''(3)}{1.2} = 37, \\
F''' = 48x - 42, & \dfrac{F'''(3)}{1.2.3} = 17, \\
F^{\text{IV}} = 48, & \dfrac{F^{\text{IV}}(3)}{1.2.3.4} = 2.
\end{array}$$

(Pour calculer $F(3)$, $F'(3)$, ..., on pourra faire usage de la règle établie au n° 179.)

La transformée sera donc, en ordonnant suivant les puissances décroissantes de y,

$$2y^4 + 17y^3 + 37y^2 - 16y - 85 = 0.$$

Si l'on voulait *augmenter* les racines de la quantité h, on changerait h en $-h$ dans tout ce qui précède.

Si h était une fraction $\frac{k}{l}$, on aurait

$$y = x \mp \frac{k}{l}, \quad \text{d'où} \quad ly = lx \mp k.$$

On poserait $ly = Y$, $lx = X$, et l'on aurait

$$Y = X \mp k.$$

Pour former l'équation en X, il suffirait de chercher la transformée en lx de l'équation proposée (187). Puis, on opérerait comme nous venons de le dire sur l'équation en X, pour avoir la transformée en Y; et en remplaçant dans cette transformée Y par ly, on trouverait l'équation en y qu'on veut obtenir.

Soit l'équation

$$x^4 + 8x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0.$$

Supposons qu'on veuille augmenter toutes les racines de $\frac{2}{3}$ ou les diminuer de $-\frac{2}{3}$. On formera la transformée en lx, l étant égal à 3. Il viendra

$$X^4 + 24X^3 - 18X^2 + 162X - 324 = 0.$$

On changera X en $Y + k$ ou en $Y + (-2)$. On aura

$$\begin{array}{ll} F = X^4 + 24X^3 - 18X^2 + 162X - 324, & F(-2) = -896, \\ F' = 4X^3 + 72X^2 - 36X + 162, & F'(-2) = 490, \\ F'' = 12X^2 + 144X - 36, & \dfrac{F''(-2)}{1.2} = -138, \\ F''' = 24X + 144, & \dfrac{F'''(-2)}{1.2.3} = 16, \\ F^{\text{IV}} = 24, & \dfrac{F^{\text{IV}}(-2)}{1.2.3.4} = 1. \end{array}$$

La seconde transformée sera donc

$$Y^4 + 16Y^3 - 138Y^2 + 490Y - 896 = 0.$$

Il viendra ensuite, en remplaçant Y par $3y$,

$$81y^4 + 432y^3 - 1242y^2 + 1470y - 896 = 0.$$

190. V. *Faire disparaître un terme quelconque d'une équation.*

On changera x en $y + h$ dans l'équation proposée, en laissant h indéterminée. Il viendra

$$(y+h)^m + A_1(y+h)^{m-1} + A_2(y+h)^{m-2} + \ldots + A_m = 0,$$

d'où, en développant,

$$\left.\begin{array}{l|l|l} y^m + mh & y^{m-1} + \dfrac{m(m-1)}{1.2}h^2 & y^{m-2} + \ldots + h^m \\ \quad + A_1 & \quad + (m-1)A_1 h & \quad + A_1 h^{m-1} \\ & \quad + A_2 & \quad + A_2 h^{m-2} \\ & & \quad \vdots \\ & & \quad + A_{m-1} h \\ & & \quad + A_m \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on veut maintenant faire disparaître *le second terme*, il suffira de

déterminer h de manière qu'on ait

$$mh + A_1 = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\frac{A_1}{m}.$$

Il faudra donc changer x en $y + \left(-\frac{A_1}{m}\right)$. Par suite, la règle sera, dans ce cas, de transformer l'équation en *diminuant* toutes ses racines (189) *du coefficient du second terme pris en signe contraire et divisé par le degré de l'équation*. Ce résultat concorde avec ce qu'apprend le n° 182, relativement à la composition du coefficient du second terme de l'équation.

Si l'on voulait faire disparaître le troisième terme, il faudrait poser

$$\frac{m(m-1)}{1.2}h^2 + (m-1)A_1 h + A_2 = 0.$$

On en déduirait, en général, deux valeurs pour h.

Le dernier terme ne disparaîtrait qu'en égalant à zéro une fonction de h identique à la proposée. Et, en effet, la transformée ayant alors une racine *nulle*, h doit être une quelconque des racines de la proposée.

Lorsqu'on a fait disparaître un terme d'un certain rang, si l'on veut en faire disparaître un autre dans la transformée, en suivant la marche indiquée, le terme de même rang que celui considéré d'abord reparaît.

Exemple : On veut chasser le *second terme* de l'équation

$$x^3 - 5x^2 + 3x - 7 = 0.$$

Il faut remplacer x par $y + \frac{5}{3}$. Il vient, en opérant directement,

$$y^3 + 5y^2 + \frac{25y}{3} + \frac{125}{27} - 5y^2 - \frac{50y}{3} - \frac{125}{9} + 3y + 5 - 7 = 0,$$

d'où l'on déduit facilement

$$27y^3 - 144y - 304 = 0.$$

Si l'on veut que le coefficient du premier terme reste égal à l'unité, il faut écrire (187)

$$y^3 - \frac{144 l^2 y}{27} - \frac{304 l^3}{27} = 0,$$

et prendre $l = 3$. Il vient

$$y^3 - 48y - 304 = 0.$$

Quand on aura trouvé les racines de cette dernière équation, on les divisera par 3; puis on augmentera les résultats obtenus de la quantité $\frac{5}{3}$: on aura ainsi les racines de l'équation proposée.

Limites des racines.

191. Nous nous proposerons d'abord de trouver *une limite supérieure des racines positives* de l'équation

$$F(x) = 0.$$

Si le polynôme $F(x)$ est positif pour une valeur L donnée à x, et reste positif pour toutes les valeurs plus grandes, toutes ses racines positives seront inférieures à L : L sera *une* limite supérieure des racines positives.

Si le polynôme $F(x)$ a tous ses termes positifs, on pourra prendre $L = 0$.

192. Soit l'équation

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0.$$

Désignons par N le plus grand coefficient négatif, pris en valeur absolue. Le premier membre de l'équation sera au moins égal à

$$A_0 x^m - N(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + 1),$$

et sera positif si cette expression est positive. Cherchons donc une valeur de x qui satisfasse à l'inégalité

$$A_0 x^m - N(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + 1) > 0.$$

La quantité entre parenthèses revient à $\frac{x^m - 1}{x - 1}$. Par suite, on peut écrire l'inégalité sous la forme

$$x^m > \frac{N(x^m - 1)}{A_0(x - 1)}.$$

Et, pour que cette relation soit satisfaite, il suffit qu'on ait

$$\frac{N}{A_0(x-1)} = 1,$$

d'où

$$x = 1 + \frac{N}{A_0}.$$

Il est évident que toute valeur plus grande de x conviendra à plus forte raison. Donc *on obtient une limite supérieure des racines positives de l'équation* $F(x) = 0$, *en ajoutant l'unité au plus grand coefficient négatif pris positivement (le coefficient du premier terme étant préalablement ramené à l'unité, en divisant les deux membres de l'équation par* A_0*)*.

193. On peut obtenir une limite moindre que la précédente, en tenant compte du rang du premier terme négatif de l'équation.

Admettons que le coefficient du premier terme soit l'unité. Désignons par N le plus grand coefficient négatif pris en valeur absolue, et supposons que le *premier* terme négatif contienne x^{m-p}. Il suffira de trouver pour x une valeur qui satisfasse à l'inégalité

$$x^m > N(x^{m-p} + x^{m-p-1} + \ldots + 1)$$

ou

$$x^m > \frac{N(x^{m-p+1} - 1)}{x - 1},$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{x^{m-p+1}\left[(x-1)x^{p-1} - N\right] + N}{x - 1} > 0.$$

Il faut donc trouver pour x une valeur *plus grande que* 1 (*Alg. élém.*,

169, II) qui satisfasse à la condition

$$(x-1)x^{p-1} > N$$

ou à la condition

$$(x-1)(x-1)^{p-1} = N.$$

On doit donc avoir

$$(x-1)^p = N, \quad \text{d'où} \quad x = 1 + \sqrt[p]{N}.$$

Toutes les valeurs plus grandes de x conviendront à plus forte raison. Donc *on obtient une limite supérieure des racines positives de l'équation* $F(x)=0$, *en ajoutant l'unité à une racine du plus grand coefficient négatif pris positivement, ayant pour indice l'excès du degré de l'équation sur le degré du premier terme négatif* (le coefficient du premier terme de l'équation est supposé égal à l'unité).

194. *Limite de Newton.* — Une équation dont tous les termes sont positifs ne peut admettre aucune racine positive, et toutes les valeurs positives croissantes mises à la place de x rendent le premier membre de l'équation positif et de plus en plus grand.

Or, si l'on *diminue* la variable x d'une quantité h telle que la transformée ait tous ses termes positifs, la quantité h *surpassera* nécessairement la plus grande racine positive de l'équation proposée, et dès lors elle sera *une* limite supérieure des racines positives (191).

Si l'on pose $y = x - h$, d'où $x = y + h$, il viendra

$$F(h) + F'(h)y + \frac{F''(h)}{1.2}y^2 + \frac{F'''(h)}{1.2.3}y^3 + \ldots + \frac{F^{(m)}(h)}{1.2.3\ldots m}y^m = 0;$$

et la question sera de déterminer h de manière à satisfaire aux inégalités

$$F^{(m)}(h) > 0,\ F^{(m-1)}(h) > 0, \ldots, F''(h) > 0,\ F'(h) > 0,\ F(h) > 0.$$

On peut remarquer, à propos de cette solution, qu'une fonction est *croissante* lorsque sa dérivée est positive (145). Donc, si pour une certaine valeur de h, on a $F(h) > 0$ et si $F'(h)$ reste positive à partir de cette valeur, il en sera de même pour $F(h)$. Pour que $F'(h)$ reste *sûrement* positive à partir d'une certaine valeur de h, il faut que cette condition soit remplie pour $F''(h)$, etc. On est ainsi ramené aux mêmes conclusions.

$F^{(m)}(h)$ est *une constante*. $F^{(m-1)}(h)$ est du premier degré, et il sera facile de trouver la valeur de h qui rend $F^{(m-1)}(h) > 0$. On verra si cette valeur satisfait à l'inégalité $F^{(m-2)}(h) > 0$. S'il n'en est pas ainsi, on l'augmentera d'une, deux, trois, ..., unités, jusqu'à ce que l'essai réussisse. On continuera de la même manière jusqu'à $F(h)$.

195. *Exemple :* Soit l'équation

$$2x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 11x - 4 = 0.$$

Le premier procédé (192) donne

$$L = 1 + \frac{N}{A_0}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad L = 1 + \frac{7}{2} = 4,5.$$

Le second procédé (193) donne

$$L = 1 + \sqrt[p]{\frac{N}{A_0}}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad L = 1 + \sqrt{\frac{7}{2}} = 2,88.$$

Appliquons maintenant le procédé de *Newton*. On a

$$\begin{aligned}
F\ (x) &= 2x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 11x - 4,\\
F'\ (x) &= 10x^4 + 16x^3 - 15x^2 - 14x + 11,\\
F''\ (x) &= 40x^3 + 48x^2 - 30x - 14,\\
F'''(x) &= 120x^2 + 96x - 30,\\
F^{\text{IV}}(x) &= 240x + 96,\\
F^{\text{V}}\ (x) &= 240.
\end{aligned}$$

La valeur o rend positives $F^{\text{V}}(x)$ et $F^{\text{IV}}(x)$; la valeur 1 rend positives toutes les autres dérivées et $F(x)$. On peut donc prendre $L = 1$.

Remarque. — Souvent, en décomposant le premier membre de l'équation en différents groupes convenablement choisis, on peut arriver à une limite peu différente de celle de Newton. Reprenons la même équation. On pourra l'écrire comme il suit, *en commençant chaque parenthèse par un terme positif :*

$$2x^3\left(x^2 - \frac{5}{2}\right) + 4x^2\left(x^2 - \frac{7}{4}\right) + 11\left(x - \frac{4}{11}\right) = 0.$$

Il suffit évidemment de satisfaire aux inégalités

$$x^2 - \frac{5}{2} > 0, \quad x^2 - \frac{7}{4} > 0, \quad x - \frac{4}{11} > 0.$$

La dernière est satisfaite pour $x = 1$, et les deux premières pour $x = 1,6$. On prendrait donc, en suivant cette marche,

$$L = 1,6.$$

196. Supposons maintenant qu'on demande *une limite inférieure des racines positives* de l'équation proposée.

On posera $x = \frac{1}{y}$. On cherchera une limite supérieure λ des racines positives de la transformée en y. Et comme la plus petite racine positive de l'équation en x correspond à la plus grande racine positive de l'équation en y, $\frac{1}{\lambda}$ sera évidemment *une* limite inférieure des racines positives de l'équation en x.

Dans les applications, il faudra chercher pour λ la plus petite valeur possible, afin d'avoir pour $\frac{1}{\lambda}$ la plus grande valeur possible.

Si l'on veut seulement une limite différente de o, on opérera comme il suit.

Soit l'équation

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m = 0.$$

La transformée en $\frac{1}{y}$ sera

$$A_m y^m + A_{m-1}y^{m-1} + \ldots + A_0 = 0,$$

et l'on aura (192)

$$\lambda = 1 + \frac{N}{A_m},$$

en désignant par N la valeur absolue du plus grand coefficient négatif, d'où

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{A_m}{A_m + N},$$

c'est-à-dire qu'*on obtient immédiatement une limite inférieure des racines positives de la proposée, en divisant la valeur absolue du dernier coefficient* (*le premier terme de la transformée devra être rendu positif, s'il ne l'est déjà*), *par la somme des valeurs absolues de ce dernier coefficient et du plus grand coefficient de signe contraire.*

197. Si l'on veut enfin marquer aussi pour les racines négatives une limite supérieure et une limite inférieure, il suffira de prendre la transformée en $-x$ de l'équation proposée, et de chercher des limites des racines positives de cette transformée. En les affectant du signe $-$, on aura évidemment des limites entre lesquelles seront comprises les racines négatives de la proposée.

Lorsqu'une équation a tous ses termes positifs, nous avons déjà dit (**191**) que o était la limite supérieure de ses racines positives.

De même, lorsqu'une équation a tous ses termes de degré impair affectés d'un certain signe, tandis que tous ses termes de degré pair sont affectés du signe contraire, il est inutile de chercher les limites des racines négatives. Car tout nombre négatif substitué dans l'équation en rendra tous les termes de même signe, c'est-à-dire que cette équation ne peut admettre aucune racine négative.

198. *Exemple :* Soit

$$F(x) = 6x^5 + 24x^4 - x^3 + 8x^2 - 16x - 60 = 0.$$

En raisonnant comme précédemment (**194**), on trouvera

$$L = 2.$$

Cherchons la transformée en $\frac{1}{y}$. Il viendra

$$60y^5 + 16y^4 - 8y^3 + y^2 - 24y - 6 = 0.$$

On voit immédiatement que $\lambda = 1$ est une limite supérieure des racines de cette équation. Donc $\frac{1}{\lambda} = 1$ sera une limite inférieure des racines positives de la proposée. La règle indiquée à la fin du n° 196 donnerait

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{5}{7}.$$

Cherchons la transformée en $-x$. Nous aurons

$$6x^5 - 24x^4 - x^3 - 8x^2 - 16x + 60 = 0.$$

Les racines positives de cette équation tombent entre 4 et 1. Donc les racines négatives de la proposée tomberont entre -4 et -1, c'est-à-dire que toutes ses racines réelles, si elle en a, sont comprises entre -4 et $+2$.

CHAPITRE III.

THÉORÈME DE DESCARTES

199. Le théorème de *Descartes* permet d'assigner, à la seule vue d'une équation algébrique à coefficients réels, une limite supérieure du *nombre* de racines positives qu'elle peut admettre.

Lorsqu'on considère une suite de termes réunis par les signes + ou —, on dit qu'il y a *variation* lorsque le signe change en passant d'un terme au suivant, et *permanence* lorsqu'il n'y a pas changement de signe.

L'équation $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = 0$ présente *trois* variations et *une* permanence. Quand l'équation est *complète,* le nombre des variations et des permanences réunies est égal au degré.

Ceci posé, ***dans toute équation à coefficients réels, le nombre des racines positives ne peut pas surpasser le nombre des variations, le nombre des racines négatives ne peut pas surpasser le nombre des variations de la transformée en*** $-x$.

Voici la démonstration due à *Gauss :*

1° ***Si l'on multiplie par $x - a$ (a étant un nombre positif) un polynôme entier et rationnel ordonné suivant les puissances décroissantes de x, le produit présente au moins une variation de plus que le multiplicande.***

Mettons en évidence les *variations* du multiplicande. Pour cela, supposons-le partagé en groupes de termes de même signe. Le premier groupe se compose du premier terme (supposé positif) et des termes suivants qui ont le même signe. Un nouveau groupe commence au premier terme négatif, et est formé de ce terme et de tous les termes négatifs qui le suivent. Le troisième groupe commence au nouveau terme positif qui apparaît, et comprend ce terme et tous les termes positifs qui lui succèdent. Et ainsi de suite. Chaque groupe peut ne contenir qu'un seul terme.

D'après cela, on pourra écrire le polynôme considéré, en n'indiquant que le premier terme de chaque groupe, sauf pour le dernier groupe dont on indiquera le premier et le dernier terme.

$$\begin{array}{l}
Mx^m + \ldots - Nx^n - \ldots + Px^p + \ldots - Qx^q - \ldots \pm Ux^u \pm \ldots \pm V \\
x - a \\
\hline
Mx^{m+1} + \ldots - Nx^{n+1} - \ldots + Px^{p+1} + \ldots - Qx^{q+1} - \ldots \pm Ux^{u+1} \pm \ldots \pm Vx \\
\qquad - \ldots - N'x^{n+1} + \ldots + P'x^{p+1} - \ldots - Q'x^{q+1} + \ldots \pm U'x^{u+1} \mp \ldots \mp Va \\
\hline
Mx^{m+1} \ldots - (N+N')x^{n+1} \ldots + (P+P')x^{p+1} \ldots - (Q+Q')x^{q+1} \ldots \pm (U+U')x^{u+1} \ldots \mp Va.
\end{array}$$

Multiplions maintenant ce polynôme par le binôme $x - a$. Le premier produit partiel n'exige aucune remarque. Le second produit partiel commence à un terme en x^m, et ce terme est négatif puisqu'il provient d'un terme positif multiplié par $-a$. Les termes suivants sont négatifs jusqu'au terme en x^{n+1} inclusivement. Ce dernier terme représente le produit par

$-a$ du terme du multiplicande qui précède $-Nx^n$; N' est le produit par a du coefficient du terme considéré au multiplicande. Le terme suivant du second produit partiel commence une série de termes positifs. En effet, on a à considérer au multiplicande un groupe de termes qui sont négatifs comme $-a$. Le dernier terme de cette série est $P'x^{p+1}$: c'est le produit par $-a$ du terme qui précède $+Px^p$ au multiplicande; P' est le produit de la valeur absolue du coefficient de ce terme par a. Au delà, les termes du multiplicande devenant positifs, c'est-à-dire de signe contraire à $-a$, c'est une série de termes négatifs qu'on doit écrire au second produit partiel, etc. On continue ainsi, jusqu'à ce qu'on parvienne au dernier groupe du multiplicande. Après avoir formé le terme $\pm U'x^{u+1}$, qui est de même signe que le terme $\pm Ux^{u+1}$ d'après les remarques qui précèdent, on a à multiplier par $-a$ le terme $\pm Ux^u$ et une série de termes de même signe : tous les termes correspondants du second produit partiel auront donc le signe $\mp$ jusqu'au dernier terme $\mp Va$.

Lorsqu'on ajoutera les deux produits partiels pour avoir le produit total, on ne sait pas quels signes les réductions entre termes semblables de signes contraires introduiront dans l'intervalle qui sépare les termes Mx^{m+1} et $-(N+N')x^{n+1}$; mais on est certain qu'il existera *au moins une variation* entre ces deux termes, comme il en existe *une* au multiplicande entre les termes Mx^m et $-Nx^n$. (De plus, s'il y a *plus d'une variation*, il y en aura toujours *un nombre impair*, deux termes de signes contraires ne pouvant être réunis que par un nombre impair de changements de signes.) De même, entre les deux termes du produit $-(N+N')x^{n+1}$ et $+(P+P')x^{p+1}$, il y aura *au moins une variation*, comme au multiplicande entre les termes $-Nx^n$ et $+Px^p$. On continuera ainsi jusqu'aux termes $\pm(U+U')x^{u+1}$ et $\mp Va$ du produit : entre ces termes, il existe *au moins une variation*, tandis qu'entre les termes correspondants du multiplicande $\pm Ux^u$ et $\pm V$ *il n'en existe pas*. Donc *le nombre des variations du produit surpasse au moins d'une unité le nombre des variations du multiplicande*.

Remarque. — D'ailleurs *l'excès du nombre des variations du produit sur le nombre des variations du multiplicande, sera toujours un nombre impair*. En effet, chaque groupe de termes considéré au produit peut, d'après la remarque faite plus haut, introduire un nombre impair de variations nouvelles, c'est-à-dire un nombre *pair* de variations en excès, par rapport à l'unique variation qui existe au multiplicande; seul, le dernier groupe de termes du produit introduit un nombre *impair* de variations en excès, puisqu'il n'en existe plus au multiplicande. L'excès cherché, composé de plusieurs nombres pairs et d'un nombre impair, sera donc un nombre impair.

2° Soient $a, b, c, \ldots$, les racines positives de $F(x)=0$; soit $\varphi(x)$ le produit des facteurs du premier degré qui correspondent aux racines négatives ou imaginaires de cette équation. En multipliant $\varphi(x)$ par $x-a$, on obtiendra au moins une variation de plus (1°); de même,

$$\varphi(x).(x-a).(x-b)$$

renfermera au moins une variation de plus que $\varphi(x).(x-a)$, etc. Par conséquent, le premier membre de l'équation $F(x)=0$, c'est-à-dire

$$F(x)=\varphi(x).(x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ldots,$$

renfermera un nombre de variations au moins égal à celui de ses racines positives; et si le nombre des variations l'emporte sur celui des racines positives, ce sera d'un nombre *pair;* car *chaque* racine positive introduit, d'après ce qui précède (1°, *Remarque*), un nombre *impair* de variations, c'est-à-dire *une* variation plus un nombre *pair* de variations (qui peut être zéro).

Si l'on forme la transformée en $-x$ de l'équation proposée, les racines positives de cette transformée correspondront aux racines négatives de l'équation donnée. Donc, en appliquant à la transformée le théorème qu'on vient de démontrer, on aura une limite supérieure du nombre des racines négatives de la proposée.

Remarques. — I. L'excès du nombre des variations sur le nombre des racines positives étant nécessairement un nombre pair, si le nombre des variations est pair, le nombre des racines positives est pair; si le nombre des variations est impair, le nombre des racines positives est impair.

II. On peut éviter de considérer la transformée en $-x$, quand l'équation est *complète;* car chaque permanence de la proposée correspond à une variation de la transformée, et réciproquement. De sorte que, dans ce cas, le nombre des permanences de la proposée est une limite supérieure du nombre de ses racines négatives.

200. *Exemples :* Soit l'équation

$$x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 1 = 0.$$

Son premier membre présentant *quatre* variations, elle aura quatre racines positives ou deux ou pas du tout. La transformée en $-x$ est

$$x^5 - 3x^3 - 5x^2 - 7x - 1 = 0.$$

Elle présente *une* variation; donc la proposée a certainement une racine négative (199, 2°, *Remarque* II); ce qui concorde avec un théorème connu (180).

Soit l'équation

$$x^7 - 3x^3 + 2x^2 - x + 10 = 0.$$

Elle présente *quatre* variations, elle aura quatre racines positives ou deux ou pas du tout. La transformée en $-x$ est

$$x^7 - 3x^3 - 2x^2 - x - 10 = 0.$$

Elle ne présente qu'une variation et admet alors forcément une racine positive. Donc la proposée admet certainement une racine négative. Elle ne peut, par conséquent, avoir plus de cinq racines réelles, et elle a nécessairement deux racines imaginaires : elle peut en admettre six.

De même, l'équation

$$3x^6 - 7x^3 - 1 = 0$$

présente une variation : elle a donc une racine positive (la différence entre le nombre des variations et celui des racines positives devant être un nombre pair, ne peut être ici que zéro). La transformée est

$$3x^6 + 7x^3 - 1 = 0.$$

Cette transformée présente aussi une variation. L'équation proposée a donc une racine positive, une racine négative (175), et quatre racines imaginaires.

Lorsqu'une équation est formée d'une série de termes positifs suivis de termes tous négatifs, elle a une racine positive et n'en a qu'une seule.

201. *Si l'équation donnée est complète et si l'on sait qu'elle a toutes ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations, et le nombre des racines négatives au nombre des permanences.*

En effet, soient m le degré, P le nombre des racines positives, N celui des racines négatives, v le nombre des variations, p celui des permanences. On a, à la fois,

$$P + N = m \quad \text{et} \quad v + p = m,$$

d'où

$$v + p = P + N.$$

v ne peut pas être inférieur à P et, s'il lui était supérieur, on aurait

$$p < N,$$

ce qui est impossible (199). On a donc

$$v = P$$

et, par suite,

$$p = N.$$

Si l'équation donnée est incomplète et si l'on sait qu'elle a toutes ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations de la proposée, et le nombre des racines négatives à celui des variations de la transformée en $-x$.

Désignons par v' le nombre des variations de la transformée. On aura, d'après ce qui précède,

$$P \overline{\overline{<}} v, \quad N \overline{\overline{<}} v'.$$

Par suite,

$$P + N = \overline{\overline{<}} v + v'.$$

Comme $P + N = m$, on aura

$$m \overline{\overline{<}} v + v'.$$

Mais il est impossible que m soit plus petit que $v + v'$. En effet, si deux termes consécutifs de la proposée sont de *parité différente* (et, dans ce cas, il peut ne manquer *aucun* terme entre eux), ils ne peuvent donner en tout qu'*une* variation dans la proposée et la transformée. Et si ces termes sont de *même parité* (et, dans ce cas, il manque au moins *un* terme entre eux), ils donneront en tout *deux* variations dans la proposée et la transformée ou ils n'en donneront pas du tout. On a donc encore dans ce cas,

$$m = v + v',$$

et l'on en déduit,

$$P = v, \quad N = v'.$$

202. *Lorsque toutes les racines de la proposée sont réelles,* il est facile de déterminer combien cette équation a de racines comprises entre deux nombres donnés a et b.

Si l'on change x en $y + a$, on diminuera de a toutes les racines de la proposée (189). Donc l'équation en y aura autant de racines positives que l'équation proposée de racines supérieures à a.

Si l'on change x en $Y + b$, on diminuera de b toutes les racines de la proposée. Donc la nouvelle transformée en Y aura autant de racines positives que l'équation proposée de racines supérieures à b.

Si l'on suppose $b > a$, il suffira donc de retrancher le nombre des variations de la transformée en Y du nombre des variations de la transformée en y, pour savoir combien la proposée admet de racines entre a et b.

Plus généralement, *si l'on ne sait rien sur la nature des racines de la proposée*, on peut néanmoins poser

$$y = \frac{x-a}{b-x}.$$

y ne sera positif que pour des valeurs de x comprises entre a et b. Donc, en formant la transformée en y, c'est-à-dire en changeant x en $\frac{by+a}{y+1}$, le nombre des variations de cette transformée sera une limite supérieure du nombre des racines de la proposée qui sont comprises entre a et b.

Si toutes les racines de la proposée sont réelles, il en est de même des racines de la transformée, et le nombre de ses variations donne alors exactement (201) le nombre des racines de la proposée qui tombent entre a et b.

CHAPITRE IV.

RECHERCHE DES RACINES COMMENSURABLES.

Recherche des racines entières.

203. Soit

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

l'équation proposée. *Les coefficients sont supposés des nombres entiers.*

Nous avons vu (179) comment on devait opérer pour s'assurer si un nombre a était racine. En désignant par

$$A_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} + \dots + B_{m-1}$$

le quotient obtenu et par R le reste de la division de $F(x)$ par $x-a$, nous avons trouvé les relations suivantes :

$$A_1 = B_1 - aA_0,\ A_2 = B_2 - aB_1,\ A_3 = B_3 - aB_2, \dots, A_{m-1} = B_{m-1} - aB_{m-2},$$
$$A_m = R - aB_{m-1}.$$

Si tous les coefficients du dividende sont entiers, si a est un nombre entier, positif ou négatif, tous les coefficients du quotient seront aussi des nombres entiers.

Dans le cas où a est racine, on a $R = 0$, et l'on peut alors déduire successivement des égalités précédentes :

$$\frac{A_m}{a} = -B_{m-1},\quad \frac{A_{m-1} - B_{m-1}}{a} = -B_{m-2}, \dots,$$
$$\frac{A_3 - B_3}{a} = -B_2,\quad \frac{A_2 - B_2}{a} = -B_1,\quad \frac{A_1 - B_1}{a} = -A_0.$$

Ces nouvelles égalités montrent que, *si a est racine, a sera un diviseur du dernier coefficient de l'équation*. Donc les nombres à essayer seront pris seulement parmi les diviseurs de ce coefficient.

a devra, de plus, diviser la somme du quotient obtenu $-B_{m-1}$ et de l'avant-dernier coefficient A_{m-1} de l'équation.

De même, a devra diviser la somme du quotient de cette seconde division $-B_{m-2}$ et du coefficient A_{m-2} de l'équation.

Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à diviser par a la somme du quotient $-B_1$, donné par la $(m-1)^{ième}$ division, et du second coefficient A_1 de l'équation. *Si a est racine, on trouve pour quotient de cette $m^{ième}$ et dernière division $-A_0$, c'est-à-dire le coefficient du premier terme changé de signe.*

Si ce coefficient est l'unité, on devra donc trouver -1 pour dernier quotient.

Il est essentiel de remarquer immédiatement que *les différents quotients obtenus*

$$-B_{m-1},\quad -B_{m-2},\ldots,\quad -B_2,\quad -B_1,\quad -A_0,$$

sont précisement les coefficients du quotient de $F(x)$ *par le facteur* $x-a$, *seulement changés de signes*. De sorte que la marche indiquée apprend si a est racine, et donne en même temps l'équation débarrassée de la racine a ou simplifiée pour les calculs ultérieurs.

Si, dans le courant des essais, un quotient fractionnaire se présente, a n'est pas racine, et l'on passe à un autre diviseur de A_m.

Si l'équation proposée n'est pas complète, on doit tenir compte des termes manquants, en remplaçant leurs coefficients par zéro.

Il convient d'essayer toujours directement les diviseurs $+1$ et -1, et de simplifier avant tout l'équation si elle les admet pour racines.

On ne doit évidemment soumettre au calcul que les diviseurs du dernier coefficient A_m qui tombent entre les limites supérieure et inférieure des racines réelles de l'équation.

Enfin, le théorème suivant permet d'abréger les essais dans un grand nombre de cas.

Supposons que a soit racine. On aura identiquement

$$F(x)=(x-a)Q,\quad \text{d'où}\quad Q=\frac{F(x)}{x-a}.$$

Substituons à x un entier quelconque E. Il viendra

$$Q_E=\frac{F(E)}{E-a}.$$

Q_E étant nécessairement entier, il faudra que $E-a$ divise exactement $F(E)$. Ainsi, *a étant racine, la différence qui existe entre un entier quelconque et a, devra diviser exactement le résultat de la substitution de cet entier à la place de x dans* $F(x)$.

Comme on doit d'abord essayer les diviseurs $+1$ et -1, les résultats de ces substitutions sont connus, et l'on cherchera préalablement si $1-a$ ou (ce qui revient au même) $a-1$ ainsi que $-1-a$ ou $a+1$, divisent respectivement $F(1)$ et $F(-1)$.

204. Appliquons ces principes à quelques exemples.

1° Soit l'équation

$$x^4-5x^3+25x-21=0.$$

J'essaye d'abord $+1$ et -1. On a

$$F(1) = 0 \quad \text{et} \quad F(-1) = -40.$$

$+1$ est donc racine, et il faut commencer par diviser le premier membre de l'équation par $x-1$ en suivant la règle connue. On trouve pour quotient (en remarquant que le terme en x^2 a pour coefficient 0 dans l'équation proposée) :

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 21 = 0.$$

Les limites des racines sont ici $1+4=5$ et $-(1+\sqrt{21})$. Parmi les diviseurs du dernier terme 21, on ne doit donc essayer que $+3$ et -3. On a, dans ce cas,

$$\frac{F(-1)}{3+1} = \frac{-40}{4} = -10 \quad \text{et} \quad \frac{F(-1)}{-3+1} = \frac{-40}{-2} = 20.$$

Il faut donc appliquer la méthode générale. Il vient :

$$\frac{21}{3} = 7, \quad \frac{7-4}{3} = 1, \quad \frac{1-4}{3} = -1.$$

Le coefficient du premier terme étant 1 et la dernière division conduisant au quotient -1, 3 est racine. De plus, le quotient de $F(x)$ par $x-3$ est immédiatement

$$x^2 - x - 7.$$

-3 ne pouvant être racine de l'équation $x^2 - x - 7 = 0$, l'équation proposée n'a pas d'autres racines entières que $+1$ et $+3$, et l'on peut écrire

$$x^4 - 4x^3 - 4x + 21 = (x-1)(x-3)(x^2 - x - 7).$$

La détermination des racines de l'équation donnée se trouve ainsi effectuée. $x^2 - x - 7 = 0$ donne

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

2° La meilleure manière de disposer le calcul, quand on a un certain nombre d'essais à faire, est celle-ci : on écrit sur une même ligne horizontale les coefficients de l'équation, à partir du second; dans une colonne verticale, sur la droite, les diviseurs qui peuvent être racines; puis, au-dessous de la première ligne horizontale, une seconde ligne formée des quotients $B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}$, calculés comme il a été dit (203) et changés de signes.

$$\begin{array}{cccccc|c} A_1, & A_2, & A_3, & \ldots, & A_{m-1}, & A_m & \\ & B_1, & B_2, & \ldots, & B_{m-2}, & B_{m-1} & a \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b \end{array}$$

Si le calcul amène à poser A_0 ou 1 si $A_0 = 1$ (en changeant toujours le signe du quotient obtenu), au-dessous de A_1, le diviseur a est racine. Et la seconde ligne horizontale donne précisément les coefficients de l'équation débarrassée de la racine a (203), c'est-à-dire qu'on n'a qu'à opérer sur cette seconde ligne de la même manière que sur la première, pour essayer un second diviseur b.

Soit l'équation

$$x^6 + 3x^5 - 36x^4 - 45x^3 + 93x^2 + 132x + 140 = 0.$$

Les limites des racines sont $1 + \sqrt{45} < 8$ et -8. On a d'ailleurs

$$F(1) = 288 \quad \text{et} \quad F(-1) = 108.$$

Les diviseurs de 140 compris entre 8 et -8 sont :

$$2,\ 4,\ 5,\ 7,\ -2,\ -4,\ -5,\ -7.$$

Ceux qui, diminués de 1, divisent $F(1) = 288$ et, en même temps, augmentés de 1, divisent $F(-1) = 108$, c'est-à-dire les seuls qui puissent être racines, sont : $2, 5, -2, -5, -7$. Le calcul offrira donc la disposition suivante :

1	+3	−36	−45	+93	+132	+140	
	+1	+5	−26	−97	−101	−70	2 est racine.
				»	+68	+35	2 n'est plus racine.
		+1	+10	+24	+23	+14	5 est racine.
			+1	+8	+8	+7	−2 est racine.
						»	−5 n'est pas racine.
				+1	+1	+1	−7 est racine.

2 est racine. 2 divisant 70, on doit essayer de nouveau ce diviseur (l'équation pouvant admettre deux racines *égales* à 2). On reconnaît que 2 n'est racine qu'une seule fois. 5 est racine une seule fois. -2 est racine et ne peut l'être qu'une fois, -2 ne divisant pas 7. Enfin, -5 n'est pas racine et -7 est racine. On peut donc écrire

$$F(x) = (x-2)(x-5)(x+2)(x+7)(x^2+x+1).$$

La détermination des racines de l'équation proposée est complète, puisque $x^2 + x + 1 = 0$ donne les deux racines imaginaires $x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Recherche des racines fractionnaires.

205. On devra toujours commencer par chercher les racines entières de l'équation proposée, pour la simplifier s'il y a lieu.

Il sera facile ensuite de ramener la recherche des racines fractionnaires à celle des racines entières d'une autre équation.

Pour cela, il faut démontrer qu'*une équation*

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

dont le premier terme a pour coefficient l'unité et dont les autres coefficients sont entiers (**203**), *ne peut avoir aucune racine commensurable fractionnaire.*

En effet, si la fraction *irréductible* $\dfrac{a}{b}$ était racine de cette équation, on aurait

$$\frac{a^m}{b^m} + A_1 \frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + A_2 \frac{a^{m-2}}{b^{m-2}} + \ldots + A_{m-1} \frac{a}{b} + A_m = 0,$$

d'où on multipliant par b^{m-1} et en isolant le premier terme,

$$\frac{a^m}{b} = -(A_1 a^{m-1} + A_2 b a^{m-2} + \ldots + A_{m-1} b^{m-2}.a + A_m b^{m-1}).$$

a et b étant supposés premiers entre eux, $\frac{a^m}{b}$ est une fraction irréductible qui ne peut être égale à un nombre entier. $\frac{a}{b}$ n'est donc pas racine, et si l'équation proposée admot des racines commensurables, cos racines sont entières.

206. D'après cola, pour ramener la recherche des racines fractionnaires à celle des racines entières, il suffira de transformer l'équation proposéo en une autre équation qui ait l'unité pour coefficient de son premier termo.

Soit l'équation

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Formons la transformée en lx, en posant $x = \frac{y}{l}$ (187). Il viendra

$$A_0 y^m + A_1 l y^{m-1} + A_2 l^2 y^{m-2} + \ldots + A_{m-1} l^{m-1}.y + A_m.l^m = 0.$$

Et l'on voit que, pour pouvoir diviser les deux membres de l'équation par A_0, il suffit de prendro $l = A_0$ (dans la pratique, on pourra dans certains cas prendre $l < A_0$). La transformée en y devient alors

$$y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 A_0 y^{m-2} + \ldots + A_{m-1} A_0^{m-2}.y + A_m A_0^{m-1} = 0.$$

A chaque racine commensurable de cette équation [qui ne peut admettre que des racines commensurables entières (205)] correspondra une racine fractionnaire de la proposée, déterminée par la relation $x = \frac{y}{A_0}$.

207. Soit, par exemple, l'équation

$$6x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 2 = 0.$$

Cette équation n'a plus de racines entières, il s'agit de chercher ses racines fractionnaires. Nous poserons $x = \frac{y}{6}$, et il viendra

$$y^4 - 7y^3 + 48y^2 - 252y + 432 = 0.$$

Remarquons alors que l'équation en x ayant ses termes alternativement positifs et négatifs ne peut admettre aucune racine négative (197); il en sera donc de même de l'équation en y. De plus, la limite supérieure des racines positives de l'équation en x étant 2, comme il est facile de s'en assurer, les racines positives de la transformée en y auront 12 pour limite supérieure. Parmi les diviseurs de 432, on ne devra donc essayer que 2, 4, 8, 3, 9, 6. Les substitutions $+1$ et -1, dans l'équation transformée, donnent d'ailleurs $F(1) = 222$, $F(-1) = 740$. Et il en résulte immédiatement (203) quo les diviseurs 3 ct 4 peuvent seuls être racines.

Le calcul présente alors la disposition suivante :

1	−7	+48	−252	+432	
	+1	−4	+36	−144	3 est racine.
		»	+4	+48	3 n'est plus racine.
		+1	0	+36	4 est racine.
			»	−9	4 n'est plus racine.

On aura donc

$$F(y) = (y-3)(y-4)(y^2+36).$$

Les racines de cette équation sont :

$$3,\ 4,\ \pm 6i.$$

En vertu de la relation

$$x = \frac{y}{6},$$

les racines de l'équation proposée seront :

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2},\quad \frac{4}{6} = \frac{2}{3},\quad \pm i.$$

CHAPITRE V.

RECHERCHE DES RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS. THÉORIE DES RACINES ÉGALES.

Des racines communes à deux équations.

208. En nous reportant à une théorie exposée dans le Livre I (Ch. II), nous savons que le plus grand commun diviseur de deux polynômes est le produit de tous leurs facteurs premiers communs.

Nous avons démontré que le premier membre de toute équation algébrique $F(x) = 0$ pouvait se décomposer en facteurs premiers du premier degré de la forme $x - a$, a représentant une quantité réelle ou imaginaire indépendante de x (177). De sorte que (sauf un facteur numérique A_0, si le coefficient du premier terme n'est pas égal à l'unité) l'on peut écrire

$$F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l).$$

Si l'on a deux équations algébriques $F(x) = 0$ et $f(x) = 0$, *chercher les racines communes à ces équations, c'est chercher le produit de tous les facteurs du premier degré de la forme* $x - a$, *qui sont communs à leurs premiers membres ;* c'est-à-dire, *c'est chercher le plus grand commun diviseur de ces premiers membres,* en faisant abstraction de tout facteur commun numérique.

Rappelons succinctement la marche à suivre.

Soient $F(x)$ et $f(x)$ les deux polynômes entiers considérés, ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x. Divisons ces deux polynômes l'un par l'autre, désignons par Q le quotient, par $\varphi(x)$ le reste.

Nous aurons

$$F(x) = f(x).Q + \varphi(x).$$

Soit $x - a$ un facteur commun à $F(x)$ et à $f(x)$. Pour $x = a$, $F(x)$ et $f(x)$ s'annulent, sans que Q puisse prendre une valeur infinie. On a donc en même temps $\varphi(x) = 0$, ce qui prouve que $\varphi(x)$ est divisible par $x - a$. Réciproquement, si $f(x)$ et $\varphi(x)$ admettent le diviseur $x - a$, pour $x = a$, on a $F(x) = 0$, c'est-à-dire que $F(x)$ admet ce même diviseur.

En résumé, $F(x)$ et $f(x)$ d'une part, $f(x)$ et $\varphi(x)$ d'autre part, ont la même série de facteurs premiers communs du premier degré : *le plus grand commun diviseur de* $F(x)$ *et de* $f(x)$ *est donc le même que celui de* $f(x)$ *et de* $\varphi(x)$.

On opérera sur $f(x)$ et $\varphi(x)$, comme on vient de le faire sur $F(x)$ et $f(x)$. Le degré des polynômes considérés ira toujours s'abaissant. On parviendra donc à une division algébrique exacte ou à un reste numérique.

Dans le premier cas, le dernier diviseur employé sera le plus grand commun diviseur cherché. En l'égalant à zéro et en cherchant les racines de l'équation formée, on obtiendra toutes les racines qui sont communes aux deux équations proposées.

Dans le second cas, il n'y a pas de plus grand commun diviseur en x *: les équations proposées n'ont aucune racine commune.*

Dans la pratique, on évitera les coefficients fractionnaires comme nous l'avons indiqué (Livre I, Ch. II), en multipliant par un facteur convenablement choisi tous les termes du dividende considéré. On aura soin aussi de supprimer dans le courant de l'opération tout facteur numérique qui serait commun aux différents termes de l'un des restes. Comme nous cherchons le plus grand commun diviseur *seulement par rapport à* x, rien ne sera changé au résultat final qu'on veut trouver.

Enfin, quand on cherche les racines communes à deux équations, il faut avoir soin, en général, de déterminer préalablement leurs racines commensurables et n'opérer que sur les équations simplifiées.

209. *Exemple : Résoudre l'équation*

$$(1) \qquad x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 8x + 4 = 0,$$

sachant qu'elle a deux racines égales et de signes contraires.

Prenons la transformée en $-x$:

$$(2) \qquad x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = 0.$$

Si la proposée admet les racines $+a$ et $-a$, la transformée admettra les racines $-a$ et $+a$, c'est-à-dire que les équations (1) et (2) doivent avoir deux racines communes ou un plus grand commun diviseur du second degré.

On peut, sans rien changer aux conditions du problème (*Alg. élém.*, 130), remplacer les équations (1) et (2) par leur somme et leur différence. On a ainsi à chercher les racines communes aux deux équations plus simples

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \text{et} \quad x^3 - 4x = 0.$$

Comme les équations (1) et (2) ne peuvent admettre la racine commune

$x = 0$, on divisera simplement $x^4 - 5x^2 + 4$ par $x^2 - 4$:

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 5x^2 + 4 & x^2 - 4 \\ \underline{+ 4x^2} & \overline{x^2 - 1} \\ - x^2 & \\ \quad\underline{- 4} & \\ \quad\; 0 & \end{array}$$

On trouve pour plus grand commun diviseur $x^2 - 4$; en égalant à zéro ce plus grand commun diviseur, on obtient $+2$ et -2 pour les racines communes demandées. Pour avoir les autres racines de l'équation (1), il suffira de l'abaisser au second degré en divisant son premier membre par $x^2 - 4$.

Théorie des racines égales.

210. Il est essentiel, lorsqu'on opère sur des équations numériques, de pouvoir reconnaître si l'équation proposée a des racines égales. Et lorsque ce cas a lieu, il faut décomposer l'équation en d'autres de degré moindre, qui n'admettent que des racines inégales.

211. *Pour que a soit une racine multiple de l'ordre n de l'équation algébrique* $F(x) = 0$, *il faut et il suffit que a mis à la place de x annule le polynôme* $F(x)$ *et ses $n - 1$ premières dérivées.*

On peut, en effet, remplacer identiquement x par $a + (x - a)$ et développer alors $F[a + (x - a)]$ ou $F(x)$ suivant la règle connue. C'est comme si, développant $F(x + h)$, on remplaçait ensuite x par a et h par $(x - a)$. Il viendra

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x - a) + F''(a)\frac{(x - a)^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ F^{(n)}(a)\frac{(x - a)^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

On voit alors que si a annule $F(a)$, $F'(a)$, $F''(a)$, ..., jusqu'à $F^{(n-1)}(a)$, les termes qui resteront dans le second membre contiendront tous $(x - a)^n$; de sorte que $F(x)$ sera divisible par $(x - a)^n$, c'est-à-dire admettra a comme racine multiple de l'ordre n. La condition énoncée est donc *suffisante ;* prouvons qu'elle est *nécessaire.*

Je dis qu'il est impossible que a soit racine multiple de l'ordre n, si a annule seulement $F(x)$ et ses p premières dérivées, p étant moindre que $n - 1$. Reprenons, dans cette hypothèse, l'égalité précédente, en n'écrivant pas dans le second membre les dérivées qui s'annulent pour $x = a$. Nous aurons

$$F(x) = \ldots F^{(p+1)}(a)\frac{(x - a)^{p+1}}{1.2\ldots(p + 1)} + F^{(p+2)}(a)\frac{(x - a)^{p+2}}{1.2\ldots(p + 2)} + \ldots$$
$$\ldots + F^{(m)}(a)\frac{(x - a)^m}{1.2\ldots m}.$$

Divisons les deux membres par $(x - a)^{p+1}$, il viendra

$$\frac{F(x)}{(x - a)^{p+1}} = \ldots \frac{F^{(p+1)}(a)}{1.2\ldots(p + 1)} + F^{(p+2)}(a)\frac{x - a}{1.2\ldots(p + 2)} + \ldots$$
$$\ldots + F^{(m)}(a)\frac{(x - a)^{m-p-1}}{1.2\ldots m}.$$

p étant moindre que $n-1$, $p+1$ est moindre que n; donc, $F(x)$ étant divisible par hypothèse par $(x-a)^n$, le premier membre de l'égalité s'annulera pour $x=a$. Il n'en sera pas de même du second membre, dont tous les termes disparaîtront sauf le premier, puisque la dernière dérivée qui s'annule pour $x=a$ est $F^{(p)}(a)$. On voit par là que la condition énoncée est à la fois suffisante et nécessaire.

Le théorème qu'on vient de démontrer prouve évidemment que, *lorsqu'un nombre est racine multiple de l'ordre n de l'équation* $F(x)=0$, *il est racine multiple de l'ordre* $n-1$ *par rapport à l'équation* $F'(x)=0$, puisqu'il annule $F'(x)$ et ses $n-2$ premières dérivées.

D'après cette remarque, si l'on a, en mettant seulement en évidence les racines égales,

$$F(x)=(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\ldots,$$

on aura aussi

$$F'(x)=(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}\ldots.$$

Et dès lors le polynôme $F(x)$ et sa dérivée $F'(x)$ admettront les facteurs communs $(x-a)^{n-1}$, $(x-b)^{p-1}$, $(x-c)^{q-1}\ldots$. D'ailleurs, ils ne pourront en admettre d'autres. Car, si le facteur $x-l$ entrait à la fois dans $F(x)$ et $F'(x)$, il correspondrait à une racine *double* de l'équation

$$F(x)=0.$$

Donc, d'une manière générale, *le plus grand commun diviseur de* $F(x)$ *et de sa dérivée* $F'(x)$ *est formé de tous les facteurs premiers du premier degré qui correspondent aux racines multiples de l'équation*

$$F(x)=0,$$

chaque facteur premier entrant dans le plus grand commun diviseur avec un exposant inférieur d'une unité à l'ordre de multiplicité de la racine qu'il représente.

Pour reconnaître si une équation $F(x)=0$ a des racines égales, on cherchera le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et de $F'(x)$. Si ce plus grand commun diviseur n'existe pas, l'équation n'admettra pas de racines égales. S'il existe, les racines simples de ce plus grand commun diviseur égalé à zéro seront racines doubles de l'équation proposée; ses racines doubles seront racines triples de cette même équation; etc.

212. Voyons maintenant comment il faut opérer pour décomposer alors l'équation donnée en équations de degré moindre, n'admettant plus que des racines inégales.

Pour fixer les idées, nous supposerons que l'équation proposée renferme des racines simples dont le produit sera représenté par X_1; des racines doubles dont le produit sera représenté par X_2^2 (X_2 représentant le produit des facteurs qui correspondent aux racines doubles, pris seulement une fois); des racines triples dont le produit sera de même représenté par X_3^3; enfin, des racines quadruples dont le produit sera représenté par X_4^4. On aura

$$F(x)=X_1X_2^2X_3^3X_4^4.$$

Le plus grand commun diviseur D entre $F(x)$ et $F'(x)$ sera (211)

$$D=X_2X_3^2X_4^3.$$

Le plus grand commun diviseur D_1 entre D et sa dérivée D' sera

$$D_1 = X_3 X_4^2.$$

Enfin, le plus grand commun diviseur D_2 entre D_1 et sa dérivée D'_1 sera :

$$D_2 = X_4.$$

Et D_2 n'aura plus aucun facteur commun avec sa dérivée.

En divisant régulièrement et successivement deux à deux les polynômes précédents, il viendra :

$$\frac{F(x)}{D} = Q = X_1 X_2 X_3 X_4,$$

$$\frac{D}{D_1} = Q_1 = X_2 X_3 X_4,$$

$$\frac{D_1}{D_2} = Q_2 = X_3 X_4,$$

$$D_2 = X_4.$$

Opérant de même par rapport aux quotients obtenus, en y joignant la dernière équation $D_2 = X_4$, il viendra

$$\frac{Q}{Q_1} = X_1, \quad \frac{Q_1}{Q_2} = X_2, \quad \frac{Q_2}{D_2} = X_3 \quad D_2 = X_4.$$

La résolution de l'équation proposée est ainsi ramenée à celle des équations plus simples et sans racines égales,

$$X_1 = 0, \; X_2 = 0, \; X_3 = 0, \; X_4 = 0.$$

La première fait connaître les racines simples, la seconde donne les racines doubles, etc.

213. *Exemple :* Soit l'équation :

$$F(x) = x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9.$$

On a

$$F'(x) = 6x^5 + 20x^4 - 12x^3 - 48x^2 + 22x + 12,$$

ou, en supprimant le facteur 2,

$$F'(x) = 3x^5 + 10x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 11x + 6.$$

Cherchons le plus grand commun diviseur D entre $F(x)$ et $F'(x)$, en ayant soin d'appliquer les règles connues.

$$\begin{array}{r|l}
x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9 & 3x^5 + 10x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 11x + 6 \\
3x^6 + 12x^5 - 9x^4 - 48x^3 + 33x^2 + 36x - 27 & \overline{x + 2} \\
-10x^5 + 6x^4 + 24x^3 - 11x^2 - 6x & \\
\hline
2x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 22x^2 + 30x - 27 & \\
6x^5 - 9x^4 - 72x^3 + 66x^2 + 90x - 81 & \\
-20x^4 + 12x^3 + 48x^2 - 22x - 12 & \\
\hline
-29x^4 - 60x^3 + 114x^2 + 68x - 93 & \\
29x^4 + 60x^3 - 114x^2 - 68x + 93 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
3x^5+10x^4-6x^3-24x^2+11x+6 & 29x^4+60x^3-114x^2-68x+93 \\ \cline{2-2}
87x^5+290x^4-174x^3-696x^2+319x+174 & 3x+55 \\
-180x^4+342x^3+204x^2-279x & \\ \cline{1-1}
110x^4+168x^3-492x^2+40x+174 & \\
55x^4+84x^3-246x^2+20x+87 & \\
1595x^4+2436x^3-7134x^2+580x+2523 & \\
-3300x^3+6270x^2+3740x-5115 & \\ \cline{1-1}
-864x^3-864x^2+4320x-2592 & \\
x^3+x^2-5x+3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
29x^4+60x^3-114x^2-68x+93 & x^3+x^2-5x+3 \\ \cline{2-2}
-29x^3+145x^2-87x & 29x+1 \\ \cline{1-1}
+31x^3+31x^2-155x+93 & \\
x^3+x^2-5x+3 & \\
-x^2+5x-3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

On a donc

$$D = x^3+x^2-5x+3.$$

On en déduit

$$D' = 3x^2+2x-5.$$

Cherchons le plus grand commun diviseur D_1 entre D et D'.

$$\begin{array}{l|l}
x^3+x^2-5x+3 & 3x^2+2x-5 \\ \cline{2-2}
3x^3+3x^2-15x+9 & x+1 \\
-2x^2+5x & \\ \cline{1-1}
+x^2-10x-9 & \\
3x^2-30x+27 & \\
-2x+5 & \\ \cline{1-1}
-32x+32 & \\
x-1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
3x^2+2x-5 & x-1 \\ \cline{2-2}
+3x & 3x+5 \\ \cline{1-1}
5x-5 & \\
+5 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

On trouve

$$D_1 = x-1.$$

D_1 n'ayant plus aucun facteur commun avec sa dérivée, nous devons nous arrêter, et nous pourrons poser

$$D_1 = X_1.$$

Il viendra ensuite

$$\frac{F(x)}{D} = Q = X_1\,X_2\,X_3 = x^3+3x^2-x-3.$$

$$\frac{D}{D_1} = Q_1 = X_2\,X_3 = x^2+2x-3,$$

$$D_1 = X_3 = x-1.$$

Par conséquent,

$$\frac{Q}{Q_1} = X_1 = x+1,$$

$$\frac{Q_1}{D_1} = X_2 = x+3,$$

$$D_1 = X_3 = x-1.$$

On arrive donc enfin à

$$F(x) = (x+1)(x+3)^2(x-1)^3,$$

et l'équation proposée admet la racine simple -1, la racine double -3, la racine triple $+1$.

214. *Remarque.* — Lorsque les coefficients d'une équation sont commensurables, les polynômes X_1, X_2, X_3, X_4, etc., ne renferment évidemment que des coefficients commensurables. Donc, si l'une des racines de l'équation proposée est une racine multiple de l'ordre n, et si toutes les autres racines appartiennent à des ordres différents, la racine multiple considérée sera commensurable, puisqu'elle sera donnée par une équation du premier degré à coefficients commensurables.

Donc, *pour qu'une racine multiple soit incommensurable, il faut qu'elle ne soit pas seule de son espèce.*

D'après cela, *toute équation à coefficients commensurables (jusqu'au cinquième degré inclusivement) qui n'a pas de racines commensurables, n'a pas non plus de racines multiples* (sauf un seul cas).

En effet, supposons qu'aucun des quotients X_1, X_2, X_3, etc., ne soit *du premier degré*. Le cas le plus simple qui puisse alors se présenter est celui où l'on a $F(x) = X_1 X_2^2$, X_1 et X_2 étant *du second degré*. Mais, dans cette hypothèse, $F(x)$ est *du sixième degré*. Nous laissons de côté le cas où l'on a $F(x) = X_2^2$. L'équation est alors *du quatrième degré*, elle peut avoir des racines multiples incommensurables, mais son premier membre est un carré parfait.

Dans la pratique, comme nous l'avons déjà dit, il faudra toujours commencer par la recherche des racines commensurables, et n'appliquer la théorie des racines égales qu'au delà du cinquième degré.

CHAPITRE VI.

THÉORÈME DE ROLLE. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

Théorème de Rolle.

215. Le théorème de *Rolle* consiste dans la remarque suivante :

Deux racines consécutives de l'équation $F(x) = 0$ *comprennent nécessairement au moins une racine réelle de l'équation* $F'(x) = 0$.

Soient a et b deux racines consécutives de l'équation $F(x) = 0$. Faisons varier x d'une manière continue de a à b. $F(x)$ s'annulant pour $x = a$ et pour $x = b$, ne change pas de signe dans l'intervalle de ces deux racines, puisqu'elles sont consécutives; mais, partant de zéro pour revenir à zéro, croît d'abord en valeur absolue pour décroître ensuite. $F(x)$ passe donc par un maximum absolu, c'est-à-dire que la dérivée $F'(x)$ passe elle-même par zéro en changeant de signe. *Ce fait peut se produire plusieurs fois* (*), et s'il s'agit d'une équation algébrique, il se

(*) $F(x)$ pouvant offrir plusieurs maximums et minimums absolus et successifs, dans l'intervalle des deux racines a et b.

produit alors un nombre impair de fois. *Il en résulte immédiatement que la réciproque du théorème de Rolle n'est pas vraie.*

Remarques. — I. Si $F'(x)$ s'annule pour $x = a$ ou pour $x = b$, ou pour ces deux valeurs à la fois, le théorème sera encore applicable. Car, par suite de la marche de $F(x)$, $F'(x)$ présentera toujours des signes contraires pour une valeur de x un peu plus grande que a et pour une valeur de x un peu plus petite que b; de sorte que $F'(x) = 0$ aura encore une racine entre a et b.

II. Le théorème de Rolle s'applique aux équations transcendantes aussi bien qu'aux équations algébriques : la seule condition, c'est que la dérivée $F'(x)$ reste continue depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$.

216. *Lorsque l'équation* $F(x) = 0$ *a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation* $F'(x) = 0$, *et deux racines consécutives de l'équation* $F'(x) = 0$ *en comprennent une et une seule de l'équation* $F(x) = 0$.

Considérons une équation de degré m dont les m racines réelles, rangées par ordre de grandeur croissante, soient

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots,\ h,\ k,\ l.$$

Il y a m racines et, par suite, $m - 1$ intervalles. Entre chaque groupe de deux racines, il tombe *une* racine de l'équation dérivée (215), mais une seule, sans quoi cette équation aurait plus de $m - 1$ racines. Les $m - 1$ racines de l'équation $F'(x) = 0$ sont donc réelles et, si on les représente par la suite supposée croissante

$$a',\ b',\ c',\ d',\ \ldots,\ h',\ k',$$

on pourra écrire ainsi les racines de $F(x) = 0$ et de $F'(x) = 0$, en les supposant toujours rangées par ordre de grandeur :

$$a,\ a',\ b,\ b',\ c,\ c',\ d,\ \ldots,\ h,\ h',\ k,\ k',\ l.$$

Les racines extrêmes a et l peuvent être regardées comme des limites inférieure et supérieure des racines de $F'(x) = 0$; et, en écrivant à droite et à gauche de cette suite, les limites $-L'$ et $+L$ des racines de $F(x) = 0$, on achèvera la *séparation* des racines de l'équation proposée, si l'on a pu résoudre préalablement l'équation $F'(x) = 0$ (c'est ce qu'on pourra faire directement pour *le troisième et le quatrième degré*).

Caractères auxquels on reconnait la nature des racines de l'équation du troisième degré.

217. On peut toujours priver l'équation du troisième degré de son second terme, sans changer la nature de ses racines, et la considérer sous la forme

$$x^3 + px + q = 0.$$

Cherchons la relation qui doit exister entre les coefficients, pour que cette équation ait *ses trois racines réelles*.

La dérivée $3x^2 + p = 0$ devra avoir *ses deux racines réelles* (216). *Le coefficient p devra donc d'abord être négatif.* Cette condition étant sup-

posée remplie, si a' et b' sont les racines de la dérivée (en les prenant toujours par ordre de grandeur croissante), on aura

$$a' = -\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad b' = +\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Remarquons maintenant que si a, b, c, désignent les trois racines réelles de l'équation $F(x) = x^3 + px + q = 0$, au delà de la première racine a, le polynôme $F(x)$ devra être *positif*; car pour $x = -\infty$, il est *négatif*, et il le reste jusqu'à ce qu'on arrive à substituer a à la place de x. De a à b, $F(x)$ restant positif et a' tombant entre a et b (216), il faut qu'on ait

$$F(a') > 0, \quad \text{ou} \quad -\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q > 0,$$

ce qui revient à

(1) $$-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > -\frac{q}{2}.$$

Au delà de b, $F(x)$ devient négatif et ne change de signe qu'en passant par 0 pour $x = c$. Au delà, il n'y a plus de racine, et la fonction reste positive jusqu'à $+\infty$ pour $x = +\infty$. b' tombant entre b et c, on doit avoir

$$F(b') < 0, \quad \text{ou} \quad \frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > -\frac{q}{2},$$

ce qui révient à

(2) $$-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > \frac{q}{2}.$$

Les inégalités (1) et (2) ne diffèrent que par le signe du second membre. Si on les élève au carré, elles conduiront à un résultat identique.

Si q est positif, l'inégalité (1) est satisfaite d'elle-même, et l'on peut élever l'inégalité (2) au carré, puisque p est *négatif*.

Si q est négatif, l'inégalité (2) est satisfaite d'elle-même, et on peut élever l'inégalité (1) au carré, puisqu'elle a lieu *entre quantités positives*. Dans l'un et l'autre cas, il vient donc

$$-\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0,$$

ce qu'on peut encore écrire,

$$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

D'ailleurs, cette dernière condition ne peut être remplie *que si p est négatif*. Ainsi, *pour que l'équation $x^3 + px + q = 0$ ait ses trois racines réelles, la seule condition est celle-ci :*

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

Si l'on a

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0,$$

l'équation n'a qu'une seule racine réelle, de signe contraire à son dernier terme.

Si l'on a

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0,$$

l'équation a deux racines égales comme nous l'avons vu (184), et la racine b' de $F'(x) = 0$ se confond avec la racine double de $F(x) = 0$ (si q est positif) (*).

L'équation

$$x^3 + 8x - 1 = 0$$

n'a qu'une racine réelle positive, parce que le coefficient du second terme est *positif*.

L'équation

$$x^3 - 5x + 9 = 0$$

n'a qu'une racine réelle négative, parce que la condition

$$\left(\frac{-5}{3}\right)^3 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 > 0$$

est satisfaite.

L'équation

$$x^3 - 7x + 2 = 0$$

a ses trois racines réelles, parce que la condition

$$\left(\frac{-7}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 < 0$$

est satisfaite : deux des trois racines seront positives (201).

Résolution algébrique de l'équation du troisième degré.

218. Reprenons l'équation générale

(1) $$x^3 + px + q = 0.$$

Posons

$$x = y + z.$$

Il viendra, en substituant,

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + p(y+z) + q = 0$$

ou

$$y^3 + z^3 + (y+z)(3yz + p) + q = 0.$$

Les inconnues auxiliaires y et z n'étant assujetties qu'à la condition $y + z = x$, on peut poser

(2) $$3yz + p = 0.$$

L'équation considérée devient alors

(3) $$y^3 + z^3 + q = 0.$$

Mais l'équation (2) et l'équation (3) font alors connaître le produit

$$y^3z^3 = -\frac{p^3}{27}$$

(*) Si q est négatif, c'est la racine a' de $F'(x) = 0$ qui se confond avec la racine double de $F(x) = 0$.

et la somme

$$y^3+z^3=-q.$$

y^3 et z^3 sont donc racines de l'équation

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$$

[qu'on nomme *la réduite* de l'équation (1)].

On a donc

$$y^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\quad z^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

Par conséquent,

$$(4)\qquad x=y+z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Il est essentiel de remarquer que, puisqu'on doit avoir

$$yz=-\frac{p}{3},$$

le produit des deux radicaux cubiques dont la somme constitue la valeur de x, doit être réel et égal à $-\frac{p}{3}$.

Ceci posé, nous savons qu'un radical cubique a trois valeurs et que, lorsqu'on connaît l'une d'elles, il suffit, pour les obtenir toutes, de la multiplier par les racines cubiques de l'unité (83).

Désignons par A et B deux valeurs des radicaux cubiques considérés, satisfaisant aux conditions imposées. Les valeurs de y et de z seront [en désignant par α l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité (84)]

$$\begin{array}{ll} A, & B, \\ A\alpha, & B\alpha, \\ A\alpha^2, & B\alpha^2. \end{array}$$

Le produit AB étant réel, les seules combinaisons qui puissent donner un produit réel sont

$$A.B,\quad A\alpha.B\alpha^2,\quad A\alpha^2.B\alpha.$$

Et, par suite, les seules valeurs admissibles pour x sont les trois valeurs

$$\begin{aligned} x &= A+B, \\ x &= A\alpha+B\alpha^2, \\ x &= A\alpha^2+B\alpha. \end{aligned}$$

Lorsque la quantité $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ est <0, les radicaux cubiques de la formule (4) n'ont plus de valeurs réelles. Cependant, c'est précisément dans ce cas que les trois racines de la proposée sont réelles (217). Ce cas s'appelle *le cas irréductible* de l'équation du troisième degré.

Pour débarrasser la formule des imaginaires qu'elle renferme, il faut alors recourir à des séries composées d'un nombre infini de termes; de sorte qu'au point de vue du calcul numérique, les expressions générales indiquées ne sont plus d'aucune utilité.

Résolution trigonométrique du cas irréductible.

219. Nous supposons que la condition $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ est remplie. La quantité placée sous les radicaux du second degré de la formule

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

est négative; la valeur de x se présente comme somme de deux quantités imaginaires. Posons alors

$$-\frac{q}{2}=\rho\cos\varphi,\quad \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\rho^2\sin^2\varphi.$$

Il viendra

$$x=\sqrt[3]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}+\sqrt[3]{\rho(\cos\varphi-i\sin\varphi)},$$

et, en appliquant la formule de *Moivre* (88), on pourra écrire

$$x=\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\varphi}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{3}\right)$$
$$+\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\varphi}{3}-i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{3}\right).$$

Dans cette formule, on doit donner successivement à k les valeurs $0, 1, 2$, et k doit recevoir la même valeur dans les deux parenthèses pour que le produit yz reste réel et égal à $-\frac{p}{3}$ (218).

On aura donc simplement

$$x=2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{2k\pi+\varphi}{3}.$$

Des deux relations

$$-\frac{q}{2}=\rho\cos\varphi,\quad \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\rho^2\sin^2\varphi,$$

on déduit d'ailleurs

$$\frac{q^2}{4}=\rho^2\cos^2\varphi\quad\text{et}\quad \rho^2=-\frac{p^3}{27},$$

d'où

$$\rho=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\quad\text{et}\quad \cos\varphi=\frac{-q}{2\rho}.$$

Les trois valeurs de x seront

$$x_1=2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi}{3},\quad x_2=2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(120^\circ+\frac{\varphi}{3}\right),$$
$$x_3=2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(240^\circ+\frac{\varphi}{3}\right),$$

ou plus simplement, en se rappelant que deux arcs ont des cosinus égaux et de signes contraires ou égaux et de même signe, suivant que leur somme est égale à π ou à 2π :

$$x_1=2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi}{3},\quad x_2=-2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(60^\circ-\frac{\varphi}{3}\right),\quad x_3=2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(120^\circ-\frac{\varphi}{3}\right).$$

Si la formule $\cos\varphi = \frac{-q}{2\rho}$ donne pour $\cos\varphi$ une valeur négative, on cherche dans les tables l'arc φ' qui a le même cosinus pris positivement : φ est le supplément de φ'.

Quand deux racines sont égales, on trouve $\varphi = 0°$.

220. Applications.

1° Soit l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

La condition

$$\left(\frac{-7}{3}\right)^3 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 < 0$$

est satisfaite. L'équation, d'après le théorème de *Descartes*, a deux racines positives et une négative.

Nous aurons

$$\rho = \sqrt{\frac{343}{27}} \quad \text{et} \quad \cos\varphi = \frac{-7}{2\rho}.$$

CALCUL DE ρ.	CALCUL DE φ.
$\log 343 = 2,5352941$	$\log 7 = 0,8450980$
$\overline{\text{L}}.27 = \bar{2},5686362$	$\overline{\text{L}}.2 = \bar{1},6989700$
$1,1039303$	$\overline{\text{L}}.\rho = \bar{1},4480349$
$\log\rho = 0,5519651$	$\log\cos\varphi' = \bar{1},9921029$
	$\varphi' = 10°53'36'',1$
	$\varphi = 180° - \varphi' = 169°\ 6'23'',9$
	$\frac{\varphi}{3} = 56°22'\ 7'',97$
	$60° - \frac{\varphi}{3} = 3°37'52'',03$
	$120° - \frac{\varphi}{3} = 63°37'52'',03$

CALCUL DE x_1.	CALCUL DE x_2.	CALCUL DE x_3
$\log 2 = 0,3010300$	$\log 2 = 0,3010300$	$\log 2 = 0,3010300$
$\log\sqrt[3]{\rho} = 0,1839884$	$\log\sqrt[3]{\rho} = 0,1839884$	$\log\sqrt[3]{\rho} = 0,1839884$
$\log\cos\frac{\varphi}{3} = \bar{1},7433873$	$\log\cos\left(60° - \frac{\varphi}{3}\right) = \bar{1},9991272$	$\log\cos\left(120° - \frac{\varphi}{3}\right) = \bar{1},6475283$
$\log x_1 = 0,2284057$	$\log(-x_2) = 0,4841456$	$\log x_3 = 0,1325467$
$x_1 = 1,692021$	$x_2 = -3,048917$	$x_3 = 1,356897$

2° *Partager un hémisphère en deux parties équivalentes, par un plan parallèle à la base.*

Désignons par x la hauteur du segment sphérique supérieur à une base. Son volume devra être la moitié de celui de l'hémisphère. On aura donc (*Géom.*, **284**), R désignant le rayon de la sphère,

$$\frac{1}{3}\pi x^2(3\text{R} - x) = \frac{1}{3}\pi \text{R}^3,$$

d'où

$$x^3 - 3Rx^2 + R^3 = 0.$$

Pour plus de simplicité, prenons le rayon de la sphère pour unité. L'équation à résoudre sera

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$$

Faisons disparaître le terme en x^2 en posant

$$x = y + \frac{3}{3},$$

d'où

$$x = y + 1.$$

Il viendra

$$y^3 - 3y - 1 = 0.$$

Cette équation a toutes ses racines réelles, puisqu'on a

$$\left(-\frac{3}{3}\right)^3 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 < 0;$$

elle a une seule racine positive et deux racines négatives, d'après le théorème de *Descartes*. Comme x doit être moindre que le rayon 1, la relation $x = y + 1$ prouve qu'il est inutile de chercher la racine positive de l'équation en y. Et comme x ne peut être négatif, il faudra rejeter également la racine négative de l'équation en y qui surpassera 1 en valeur absolue.

On a ici

$$\rho = \sqrt{\frac{27}{27}} = 1 \quad \text{et} \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}.$$

Il en résulte immédiatement

$$\varphi = 60° \quad \text{et} \quad \frac{\varphi}{3} = 20°.$$

$y_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi}{3}$ représente la racine positive de l'équation. Des deux racines négatives

$$y_2 = -2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(60° - \frac{\varphi}{3}\right) \quad \text{et} \quad y_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(120° - \frac{\varphi}{3}\right),$$

la première surpasse évidemment l'unité ; c'est donc la seconde seulement que nous chercherons.

CALCUL DE y_3.

On a

$$y_3 = 2\cos 100° \quad \text{ou} \quad -y_3 = 2\cos 80°.$$

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log\cos 80° = \bar{1}.2396702$$
$$\log(-y_3) = \bar{1}.5407002$$
$$y_3 = -0,3472963.$$

Par suite, la valeur correspondante de x est

$$x_3 = y_3 + 1 = 0,6527037.$$

Nota. Si l'on change le signe de y_3, on a la distance du plan sécant au centre de la sphère.

Résolution numérique de l'équation du troisième degré, lorsqu'elle n'a qu'une seule racine réelle.

221. Reprenons la formule

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Lorsqu'on a $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0$, l'équation $x^3 + px + q = 0$ n'admet qu'une seule racine réelle, de signe contraire à son dernier terme.

Dans ce cas, chaque radical cubique est susceptible d'une détermination réelle. Soient A et B ces deux déterminations. Nous aurons (**218**) pour les trois valeurs de x

$$x_1 = A + B, \quad x_2 = A\alpha + B\alpha^2, \quad x_3 = A\alpha^2 + B\alpha.$$

Mais (**84**)

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \alpha^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2};$$

par suite,

$$x_1 = A + B, \quad x_2 = -\frac{A+B}{2} + i\frac{(A-B)\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3 = -\frac{A+B}{2} - i\frac{(A-B)\sqrt{3}}{2}.$$

On pourrait avoir recours aux transformations trigonométriques pour calculer ces valeurs; mais il est bien préférable et bien plus court d'extraire directement les racines à l'aide des tables de logarithmes. Nous en donnerons un exemple.

222. Application. — *Calculer les dimensions d'un cylindre inscrit dans une sphère, de manière que sa surface convexe soit équivalente à la somme des deux calottes que ses bases déterminent.*

Désignons par R le rayon de la sphère, par x le rayon de la base du cylindre, par y sa demi-hauteur ou la distance de sa base au centre de la sphère.

La condition du problème est exprimée par l'équation

$$4\pi xy = 4\pi R(R - y),$$

c'est-à-dire

$$xy = R(R - y).$$

On a de plus

$$x = \sqrt{R^2 - y^2}.$$

Il viendra donc par division

$$y = \frac{R(R-y)}{\sqrt{R^2 - y^2}}, \quad \text{d'où} \quad y^3 + Ry^2 + R^2y - R^3 = 0.$$

Pour plus de simplicité, prenons le rayon de la sphère pour unité. L'équation à résoudre sera

$$(1) \qquad y^3+y^2+y-1=0.$$

Chassons le second terme en posant $y=z-\frac{1}{3}$, nous aurons

$$z^3+\frac{2z}{3}-\frac{34}{27}=0.$$

Pour faire disparaître les dénominateurs de cette équation, posons $z=\frac{u}{3}$, et nous trouverons finalement

$$u^3+6u-34=0.$$

$y=z-\frac{1}{3}$ devient $y=\frac{u-1}{3}$, et l'on voit qu'il suffisait de poser immédiatement cette relation pour chasser à la fois le second terme de l'équation (1) et éviter les dénominateurs.

Le coefficient du second terme de l'équation en u étant positif, cette équation n'admet qu'une racine réelle qui est positive. Nous nous bornerons donc à calculer cette racine.

On aura

$$u=\sqrt[3]{17+\sqrt{297}}+\sqrt[3]{17-\sqrt{297}}.$$

Les tables de logarithmes ordinaires donnent

$$\sqrt{297}=17,23369;$$

par suite,

$$u=\sqrt[3]{34,23369}+\sqrt[3]{-0,23369}.$$

En opérant toujours par logarithmes, on trouve

$$u=3,247018-0,615952,$$

c'est-à-dire

$$u=2,631066.$$

Il en résulte

$$y=\frac{u-1}{3}=0,543689.$$

Connaissant les valeurs réelles des deux radicaux cubiques, il serait facile, si la question l'exigeait, de calculer les racines imaginaires de l'équation en u et, par suite, les valeurs imaginaires de y.

CHAPITRE VII

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES.

223. Lorsque les deux termes d'une expression fractionnaire sont des polynômes entiers par rapport à une même variable x, on peut, en effectuant leur division, remplacer l'expression considérée par un polynôme entier par rapport à x, augmenté d'une fraction ayant pour dénominateur le diviseur, et pour numérateur un polynôme de degré moindre en x (*Alg. élém.*, 34). La fraction complémentaire ainsi obtenue peut être elle-même décomposée en fractions plus simples, quand on a pu trouver toutes les racines de l'équation formée en égalant son dénominateur à zéro. C'est ce que nous supposerons dans ce qui va suivre.

Cas des racines inégales.

224. Soit la fraction rationnelle

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{F(x)}.$$

$F(x)$ étant du degré m, $f(x)$ est au plus du degré $m-1$. La fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ est *irréductible*. Supposons que les racines de l'équation $F(x)=0$, *toutes inégales*, soient $a, b, c, \ldots, h, k, l$. Je dis qu'on pourra mettre l'expression (1) sous la forme

$$(2) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{K}{x-k} + \frac{L}{x-l},$$

les numérateurs A, B, C, ..., K, L étant des quantités constantes.

De l'égalité *supposée*, on déduit

$$(3) \qquad f(x) = \frac{AF(x)}{x-a} + \frac{BF(x)}{x-b} + \frac{CF(x)}{x-c} + \ldots + \frac{KF(x)}{x-k} + \frac{LF(x)}{x-l}.$$

Cette équation doit être *identique*, c'est-à-dire *satisfaite pour toutes les valeurs de x*. Remplaçons x par a. Comme on a $F(a)=0$, puisque a est racine de l'équation $F(x)=0$, il viendra

$$f(a) = \frac{AF(a)}{a-a}.$$

Tous les termes du second membre disparaissent, sauf le premier où la fraction $\frac{F(x)}{x-a}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. D'après une règle connue (154), la véritable valeur de cette fraction pour $x=a$ est $\frac{F'(a)}{1}$. On aura donc

$$f(a) = AF'(a), \quad \text{d'où} \quad A = \frac{f(a)}{F'(a)}.$$

Un raisonnement analogue conduit aux valeurs

$$B=\frac{f(b)}{F'(b)},\quad C=\frac{f(c)}{F'(c)},\ldots,\quad K=\frac{f(k)}{F'(k)},\quad L=\frac{f(l)}{F'(l)}.$$

Les valeurs obtenues sont évidemment les seules qui puissent convenir au développement *supposé*. De plus, $f(x)$ étant du degré $m-1$, l'équation admise se trouve par là vérifiée pour m valeurs (puisque $F(x)=0$ est du degré m et a m racines). Cette condition entraîne l'identité complète de $f(x)$ et du second membre de la relation (3) (178, II), c'est-à-dire prouve l'exactitude de la relation (2).

Pour calculer les numérateurs A, B, C, ..., *il suffira de former l'expression*

$$\frac{f(x)}{F'(x)},$$

et d'y remplacer successivement x *par toutes les racines de* $F(x)=0$.

225. Les raisonnements précédents conviennent également au cas des racines imaginaires inégales. On peut seulement éviter les imaginaires dans le développement du second membre, en remarquant qu'à une racine imaginaire $a+bi$ correspond toujours une racine imaginaire conjuguée $a-bi$. Soient A et B les numérateurs des fractions simples qui correspondent à ces deux racines. On aura

$$A=\frac{f(a+bi)}{F'(a+bi)},\quad B=\frac{f(a-bi)}{F'(a-bi)}.$$

A et B seront donc des imaginaires réductibles à la forme générale (Livre I, Chap. VI), et qui ne différeront que par le signe de i, de sorte qu'on peut poser

$$A=P+Qi \quad\text{et}\quad B=P-Qi.$$

Les deux fractions

$$\frac{A}{x-a-bi} \quad\text{et}\quad \frac{B}{x-a+bi}$$

donneront donc en somme

$$\frac{P+Qi}{x-a-bi}+\frac{P-Qi}{x-a+bi}=\frac{2P(x-a)-2Qb}{(x-a)^2+b^2}.$$

On voit donc qu'à un couple de racines imaginaires conjuguées du premier ordre, correspond une fraction réelle de la forme

$$\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}.$$

226. *Exemples :*

1° Soit

$$\frac{2-4x}{x^2-x-2}.$$

$F(x)=0$ donne ici

$$x^2-x-2=0,$$

d'où les racines

$$\begin{Bmatrix} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{Bmatrix}.$$

La dérivée de $F(x)$ est

$$F'(x)=2x-1.$$

Pour avoir les numérateurs A et B, il faudra remplacer successivement x par x_1 et par x_2 dans l'expression

$$\frac{f(x)}{F'(x)} = \frac{2-4x}{2x-1}.$$

Il vient

$$A = -2, \quad B = -2, \quad \text{d'où} \quad \frac{2-4x}{x^2-x-2} = -\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+1}.$$

2° Soit l'expression

$$\frac{1}{x(a^2-x^2)};$$

$F(x) = 0$ donne pour racines

$$0, \quad x = -a, \quad x = a.$$

On a

$$F'(x) = a^2 - x^2 - 2x^2 = a^2 - 3x^2.$$

Pour avoir les trois numérateurs A, B, C, il suffira donc de remplacer x par $0, -a$ et $+a$, dans l'expression $\frac{1}{a^2-3x^2}$. Il viendra donc

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{-1}{2a^2}, \quad C = \frac{-1}{2a^2},$$

d'où

$$\frac{1}{x(a^2-x^2)} = \frac{1}{a^2x} - \frac{1}{2a^2(x+a)} - \frac{1}{2a^2(x-a)}.$$

3° Soit encore l'expression

$$\frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}.$$

$F(x) = 0$ donne une racine réelle -1 et deux racines imaginaires $\pm i$.

Nous pourrons donc écrire (225)

$$\frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Le plus simple, pour déterminer les coefficients A, B, C, est alors d'employer la *Méthode des coefficients indéterminés.* Nous avons démontré (224) *l'identité* des deux membres de la relation posée. Par conséquent, si l'on chasse les dénominateurs, les mêmes puissances de x devront avoir, dans les deux membres, les mêmes coefficients, sans quoi l'équation ne serait pas satisfaite pour toutes les valeurs possibles de x.

Il viendra

$$x^2 - x + 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1).$$

En faisant d'abord

$$x = -1, \quad \text{on trouvera} \quad A = \frac{3}{2};$$

puis, en égalant les coefficients de x^2 et de x dans les deux membres, on

trouvera

$$1 = A + B, \quad -1 = B + C, \quad \text{d'où} \quad B = C = -\frac{1}{2}.$$

Donc

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{2(x+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}.$$

Cas des racines égales.

227. Lorsque $F(x) = 0$ donne des racines multiples, la décomposition indiquée précédemment (**224**) n'est plus possible. Car a étant une racine multiple (**211**), l'expression $A = \frac{f(a)}{F'(a)}$ donne pour A une valeur infinie.

Admettons que a soit une racine multiple de l'ordre n (réelle ou imaginaire). On pourra poser

$$F(x) = (x-a)^n \cdot F_1(x).$$

$F(x)$ étant du degré m, $F_1(x)$ sera du degré $m-n$. Remplaçons, dans $f(x)$ et dans $F_1(x)$, x par $a + (x-a)$. Il viendra, en considérant $(x-a)$ comme un accroissement,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \ldots,$$
$$F_1(x) = F_1(a) + F_1'(a)(x-a) + \frac{F_1''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \ldots.$$

Nous pourrons diviser $f(x)$ par $F_1(x)$ en regardant $(x-a)$ comme la quantité ordonnatrice. Le premier terme du quotient sera constant et égal à $\frac{f(a)}{F_1(a)}$. Nous le désignerons par A_0. Le reste correspondant à ce premier terme ne renfermera plus de terme constant. On poursuivra la division jusqu'à ce qu'on arrive au terme de degré $n-1$ par rapport à $(x-a)$. Tous les termes du reste contiendront alors $(x-a)^n$ en facteur. On pourra donc écrire l'identité suivante qui résulte de toute division :

$$f(x) = \overbrace{[A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots A_{n-1}(x-a)^{n-1}]}^{Q} F_1(x) + \overbrace{(x-a)^n f_1(x)}^{R}.$$

Le dividende $f(x)$ est du degré $m-1$, le diviseur $F_1(x)$ du degré $m-n$, et le quotient du degré $n-1$.

Le produit du diviseur par le quotient sera donc du degré $m-1$. Il en résulte que le reste sera au plus du degré $m-1$. Dès lors le polynôme $f_1(x)$ est au plus du degré $m-n-1$. D'ailleurs, les polynômes $f_1(x)$ et $F_1(x)$ sont premiers entre eux; car s'ils admettaient un facteur commun, la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ ne serait plus irréductible.

Ceci posé, divisons par $F(x)$ ou par $(x-a)^n F_1(x)$ les deux membres de l'égalité précédente. Il viendra

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \ldots \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)}.$$

Ainsi, la racine multiple de l'ordre n représentée par le facteur $(x-a)^n$

donne lieu à n fractions simples dont les dénominateurs sont $(x-a)^n$, $(x-a)^{n-1}$, ..., jusqu'à $x-a$, et dont les numérateurs sont les coefficients du quotient trouvé en divisant $f(x)$ par $F_1(x)$, comme on l'a indiqué.

Il reste à décomposer, en suivant la même marche, une fraction irréductible $\frac{f_1(x)}{F_1(x)}$, dont le dénominateur est du degré $m-n$ et le numérateur du degré $m-n-1$.

Si $F_1(x)=0$ renferme encore une racine multiple d'ordre p, et si b désigne cette racine, on aura

$$\frac{f_1(x)}{F_1(x)}=\frac{B_0}{(x-b)^p}+\frac{B_1}{(x-b)^{p-1}}+\ldots+\frac{B_{p-1}}{x-b}+\frac{f_2(x)}{F_2(x)},$$

$\frac{f_2(x)}{F_2(x)}$ représentant une fraction irréductible dont le dénominateur sera de degré $m-n-p$, et le numérateur de degré $m-n-p-1$.

Supposons que $F_2(x)=0$ ne renferme plus que des racines simples $c, d, \ldots, l$, on pourra poser (**224**)

$$\frac{f_2(x)}{F_2(x)}=\frac{C}{x-c}+\frac{D}{x-d}+\ldots+\frac{L}{x-l},$$

et la décomposition de $\frac{f(x)}{F(x)}$ se trouvera terminée.

228. Il faut prouver maintenant que cette décomposition n'est possible que d'une seule manière. Supposons deux décompositions différentes possibles. Les deux formes obtenues devront donner des résultats égaux, quelle que soit la valeur attribuée à x. On aura donc, par exemple,

$$\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{B_0}{(x-b)^p}+\frac{B_1}{(x-b)^{p-1}}+\ldots$$
$$=\frac{A'_0}{(x-a)^{n'}}+\frac{A'_1}{(x-a)^{n'-1}}+\ldots+\frac{B'_0}{(x-b)^{p'}}+\frac{B'_1}{(x-b)^{p'-1}}+\ldots.$$

Supposons n différent de n' et plus grand. Si l'on multiplie les deux membres de l'égalité par $(x-a)^n$, et si l'on fait ensuite $x=a$, le premier membre se réduit évidemment à A_0; le second s'annule, à moins qu'un des dénominateurs ne soit égal à $(x-a)^n$. Il faut donc que $(x-a)^{n'}$ soit égal à $(x-a)^n$, c'est-à-dire qu'on ait $n'=n$. On trouve alors $A_0=A'_0$. On pourra supprimer les deux fractions égales $\frac{A_0}{(x-a)^n}$ dans les deux membres et, en répétant le même raisonnement pour les restes correspondants, on prouvera que les fractions simples qui composent les deux développements sont identiques.

229. Il nous reste, pour achever le sujet considéré, à examiner spécialement le cas des racines imaginaires multiples.

Si $F(x)=0$ admet une racine imaginaire $a+bi$ d'ordre n, il admettra aussi une racine imaginaire conjuguée $a-bi$ d'ordre n (ou le diviseur réel du second degré $(x-a)^2+b^2$, pris n fois comme facteur). Les deux racines conjuguées, si elles étaient simples, conduiraient dans le dévelop-

pement (225) à une fraction de la forme

$$\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}.$$

Je dis qu'étant de l'ordre n, elles donneront dans le développement n fractions de la forme

$$\frac{M_0x+N_0}{[(x-a)^2+b^2]^n}+\frac{M_1x+N_1}{[(x-a)^2+b^2]^{n-1}}+\ldots+\frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{(x-a)^2+b^2};$$

de sorte que le développement ne sera embarrassé d'aucune expression imaginaire.

Posons

$$F(x)=[(x-a)^2+b^2]^n\,.\,F_1(x).$$

Cherchons à déterminer les constantes M_0 et N_0 par la condition que le polynôme

$$f(x)-(M_0x+N_0)\,F_1(x)$$

soit divisible par $(x-a)^2+b^2$. On pourra alors, en effet, poser

$$f(x)-(M_0x+N_0)\,.\,F_1(x)=[(x-a)^2+b^2]\,\varphi(x),$$

d'où

$$(1)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{M_0x+N_0}{[(x-a)^2+b^2]^n}+\frac{\varphi(x)}{[(x-a)^2+b^2]^{n-1}\,.\,F_1(x)}.$$

Pour exprimer la condition de divisibilité indiquée, il suffit d'écrire que le polynôme

$$f(x)-(M_0x+N_0)\,.\,F_1(x)$$

s'annule pour $x=a+bi$ et pour $x=a-bi$. Supposons que, pour ces deux valeurs, $f(x)$ devienne $A+Bi$ et $A-Bi$; que, de même, $F_1(x)$ devienne alors $C+Di$ et $C-Di$. Nous aurons les deux équations

$$(A+Bi)-[M_0(a+bi)+N_0][C+Di]=0;$$
$$(A-Bi)-[M_0(a-bi)+N_0][C-Di]=0.$$

Par suite, en égalant séparément à zéro la partie réelle et le coefficient de i, il viendra (les deux parties réelles étant identiques et les coefficients de i ne différant que par le signe dans les deux équations) :

$$(bD-aC)\,M_0-CN_0=-A,$$
$$(bC+aD)\,M_0+DN_0=B.$$

Ces équations sont du premier degré en M_0 et en N_0. Le dénominateur commun des valeurs des deux inconnues $b\,(C^2+D^2)$ ne peut pas être nul: car si b était nul, les racines imaginaires n'existeraient pas; et si la somme C^2+D^2 était nulle, le polynôme $F_1(x)$ devenant o pour $x=a\pm bi$, admettrait encore le diviseur $(x-a)^2+b^2$. Les équations précédentes donneront donc toujours des valeurs réelles, finies et déterminées, pour les inconnues M_0 et N_0.

La possibilité et l'exactitude de la transformation (1) étant établie, on pourra de même poser l'expression

$$\frac{\varphi(x)}{[(x-a)^2+b^2]^{n-1}.F_1(x)}=\frac{M_1x+N_1}{[(x-a)^2+b^2]^{n-1}}+\frac{\psi(x)}{[(x-a)^2+b^2]^{n-2}.F_1(x)},$$

et continuer ainsi, jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les facteurs

$$[(x-a)^2+b^2]^n,\quad [(x-a)^2+b^2]^{n-1},\ \ldots,\quad (x-a)^2+b^2.$$

Dans la pratique, il sera préférable de calculer les coefficients M_0, N_0, M_1, N_1, etc., en ayant recours à la *Méthode des coefficients indéterminés.*

230. *En résumé*, étant donnée l'expression

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

si, ayant égard aux racines réelles et aux racines imaginaires de $F(x)=0$, on a

$$F(x)=(x-a)^n(x-b)^p\ldots[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n'}[(x-\gamma)^2+\delta^2]^{p'}\ldots,$$

on pourra toujours poser :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)}&=\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-a}\\&+\frac{B_0}{(x-b)^p}+\frac{B_1}{(x-b)^{p-1}}+\ldots+\frac{B_{p-1}}{x-b}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{M_0x+N_0}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n'}}+\frac{M_1x+N_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n'-1}}+\ldots+\frac{M_{n'-1}x+N_{n'-1}}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\\&+\frac{P_0x+Q_0}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^{p'}}+\frac{P_1x+Q_1}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^{p'-1}}+\ldots+\frac{P_{p'-1}x+Q_{p'-1}}{(x-\gamma)^2+\delta^2}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

231. *Exemples :*

1° Soit

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{5x^4-13x^3+14x^2-5x+3}{(x-1)^3(x+1)x}.$$

On aura (227)

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0}{(x-1)^3}+\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x}.$$

En ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x, on a ici :

$$\begin{aligned}f(x)&=3-5x+14x^2-13x^3+5x^4;\\F_1(x)&=(x+1)x=x+x^2;\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}f[1+(x-1)]&=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{1.2}(x-1)^2+\ldots.\\F_1[1+(x-1)]&=F_1(1)+F'_1(1)(x-1)+\frac{F''_1(1)}{1.2}(x-1)^2.\end{aligned}$$

Comme il s'agit d'une racine *triple*, le quotient de $f(x)$ par $F_1(x)$ devra être du *second degré* en $(x-1)$, et il sera inutile dans la division d'écrire les termes qui contiennent $(x-1)$ à une puissance supérieure à la seconde. Pour plus de rapidité, nous remplacerons dans le calcul $(x-1)$

par X. On trouve

$$f(1)=4,\quad f'(1)=4,\quad \frac{f''(1)}{1.2}=5,$$

$$F_1(1)=2,\quad F'_1(1)=3,\quad \frac{F''_1(1)}{1.2}=1.$$

Par suite, il faudra effectuer cette division :

$$\begin{array}{l|l} 4+4X+5X^2+\ldots & 2+3X+X^2 \\ \quad -6X-2X^2 & \overline{2-X+3X^2} \\ \hline \quad -2X+3X^2\ldots & \\ \qquad +3X^2\ldots & \\ \hline \qquad 6X^2\ldots & \end{array}$$

Le quotient étant de la forme $A_0+A_1X+A_2X^2$, on aura en identifiant

$$A_0=2,\quad A_1=-1,\quad A_2=3.$$

Pour déterminer B et C, nous nous servirons de l'expression $\dfrac{f(x)}{F'(x)}$ (224), c'est-à-dire

$$\frac{5x^4-13x^3+14x^2-5x+3}{3(x-1)^2(x+1)x+(x-1)^3x+(x-1)^3(x+1)}.$$

En y faisant successivement $x=-1$ et $x=0$, nous trouverons

$$B=\frac{40}{8}=5;\quad C=\frac{3}{-1}=-3.$$

Par conséquent

$$\frac{5x^4-13x^3+14x^2-5x+3}{(x-1)^3(x+1)x}=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x}.$$

Nota. S'il y avait eu une autre racine multiple, on aurait répété un calcul analogue, car on peut toujours supposer que la décomposition commence au facteur qu'on est amené à considérer.

2° Soit

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2}.$$

On a dans ce cas deux racines réelles simples et deux racines imaginaires conjuguées doubles. On posera donc

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{M_0x+N_0}{(x^2+1)^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}.$$

Pour déterminer les six inconnues A, B, M_0, N_0, M_1, N_1, nous aurons recours à la *Méthode des coefficients indéterminés*.

Si nous chassons les dénominateurs, nous aurons identiquement

$$1=A(x+1)(x^2+1)^2+Bx(x^2+1)^2+(M_0x+N_0)x(x+1)$$
$$+(M_1x+N_1)x(x+1)(x^2+1).$$

Si l'on suppose successivement $x = 0$ et $x = -1$, il vient

$$A = 1 \quad \text{et} \quad B = -\frac{1}{4}.$$

Égalons maintenant les coefficients des quatre premières puissances de x dans les deux membres (en supposant qu'on ordonne suivant les puissances décroissantes de x), puisqu'il ne reste plus que quatre inconnues. Nous trouverons

$$A + B + M_1 = 0, \qquad A + M_1 + N_1 = 0,$$
$$2A + 2B + M_0 + M_1 + N_1 = 0, \quad 2A + N_0 + M_0 + M_1 + N_1 = 0.$$

On en déduit immédiatement

$$M_1 = -\frac{3}{4}, \quad N_1 = -\frac{1}{4}, \quad M_0 = -\frac{1}{2}, \quad N_0 = -\frac{1}{2}.$$

On arrive donc enfin à

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)^2} - \frac{3x+1}{4(x^2+1)}.$$

Retour aux fonctions primitives.

232. Le but principal qu'on se propose en décomposant les fractions rationnelles, c'est de remonter à leurs fonctions primitives (Livre II, Chap. IV).

Nous ne pouvons que donner quelques exemples.

1° Soit l'expression $\frac{2-4x}{x^2-x-2}$. Nous avons trouvé (226, 1°)

$$\frac{2-4x}{x^2-x-2} = -\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+1}.$$

La fonction primitive est évidemment

$$-\frac{2\log(x-2)}{\log e} - \frac{2\log(x+1)}{\log e} + C$$
$$= -\frac{2}{\log e}\left[\log(x^2-x-2) - \frac{C\log e}{2}\right].$$

C'est ce qu'on aurait d'ailleurs trouvé directement, dans ce cas simple, en mettant l'expression proposée sous la forme $\frac{-2(2x-1)}{x^2-x-2}$, et en remarquant que $2x-1$ représente la dérivée du dénominateur x^2-x-2.

2° Soit l'expression

$$\frac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1}.$$

La fonction primitive sera (159, 161) :

$$\frac{2}{-2(x-1)^2} - \frac{1}{-(x-1)} + \frac{3\log(x-1)}{\log e} + C,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{3\log(x-1)}{\log e}+C.$$

3° Soit enfin l'expression (226, 3°)

$$\frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{3}{2(x+1)}-\frac{x+1}{2(x^2+1)}.$$

On peut mettre la seconde fraction sous la forme suivante, en laissant de côté le facteur $-\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}.$$

Il faut alors chercher la fonction primitive de l'expression

$$\frac{3}{2}\,\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\,\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}.$$

On trouve facilement (161)

$$\frac{3}{2}\,\frac{\log(x+1)}{\log e}-\frac{1}{4}\,\frac{\log(x^2+1)}{\log e}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} x+C.$$

D'une manière générale, pour avoir la fonction primitive d'une fraction simple correspondant à deux racines imaginaires conjuguées, c'est-à-dire de l'expression $\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$, on l'écrit comme il suit :

$$\frac{M}{2}\,\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}+\frac{Ma+N}{b}\,\frac{\frac{1}{b}}{1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2};$$

et l'on a immédiatement pour fonction primitive

$$\frac{M}{2\log e}\log[(x-a)^2+b^2]+\frac{Ma+N}{b}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x-a}{b}\right)+C.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1° Résoudre l'équation du troisième degré, sachant que l'une des racines est égale à la somme des deux autres, et trouver la relation qui existe alors entre les coefficients de l'équation.

2° Résoudre l'équation du troisième degré, connaissant la somme ou le produit de deux racines, et trouver la relation qui existe alors entre les coefficients de l'équation.

3° Déterminer la relation qui existe entre les coefficients de l'équation du quatrième degré, lorsque ses racines forment une proportion dont la raison est donnée, et trouver les expressions des racines.

4° Déterminer la relation qui existe entre les coefficients de l'équation

du troisième degré, lorsqu'une des racines est moyenne proportionnelle entre les deux autres.

5° Résoudre l'équation du quatrième degré, connaissant le produit de deux racines.

6° Chercher un nombre de trois chiffres, sachant que le produit des trois chiffres est 54, que le chiffre du milieu est le sixième de la somme des deux autres, et qu'en soustrayant 594 du nombre demandé, on obtient les mêmes chiffres en ordre inverse. — (923.)

7° Quelle est la base du système do numération dans lequel le nombre 538 est exprimé par les caractères 4123? — (5.)

8° Résoudre l'équation $8\left(\frac{2}{5}\right)^{x^3-5x^2+3x+3} = 125$ (l'une des racines est égale à 2).

9° Résoudre l'équation

$$6x^4 - 19x^3 + 28x^2 - 18x + 4 = 0.$$

$\left(\text{Deux des racines sont } \frac{1}{2} \text{ et } \frac{2}{3}.\right)$

10° Partager un triangle par une droite parallèle à sa base, de manière que le triangle tournant autour de cette base, le volume engendré par le trapèze ainsi déterminé soit la moitié du volume total. — (La distance de la parallèle à la base est la moitié de la hauteur du triangle.)

11° Montrer qu'on peut trouver les racines commensurables d'une équation, sans les ramener à être entières. Si $\frac{a}{b}$ est une des racines réduite à sa plus simple expression, le numérateur a est un diviseur du dernier terme, le dénominateur b est un diviseur du coefficient du premier terme. Prouver qu'on peut vérifier que $\frac{a}{b}$ est racine, par des essais analogues à ceux qu'on a appliqués aux racines entières.

12° Trouver les valeurs entières de x et de y qui vérifient les deux équations

$$x^3 + y^3 = 468, \quad x^5 + y^5 = 19932.$$

13° Appliquer la théorie des racines égales aux équations suivantes :

$$x^4 - 4x^3 + 16x - 16 = 0, \quad [(x+2)(x-2)^3]$$

$$x^8 - 12x^7 + 53x^6 - 92x^5 - 9x^4 + 212x^3 - 153x^2 - 108x + 108 = 0,$$

$$[(x-1)(x-2)^2(x+1)^2(x-3)^3];$$

$$x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0, \quad [(x-2)^2(x+1)^4].$$

14° Déterminer les dimensions d'un cylindre ou d'un cône circulaire droit dont on donne le volume et la surface totale.

15° Déterminer les arêtes d'un parallélipipède rectangle, connaissant son volume, sa surface et sa diagonale.

16° Déterminer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant la somme des côtés de l'angle droit, et le volume engendré par le triangle en tournant autour de son hypoténuse.

17° Résoudre l'équation $x^3 - 5x - 3 = 0$.

$$(x_1 = 2,490862, \quad x_2 = -1,834245, \quad x_3 = -0,6566166.)$$

18° Résoudre l'équation $x^3 - 4x + 1 = 0$.

$$(x_1 = 1,860807, \quad x_2 = -2,114907, \quad x_3 = 0,254101).$$

19° Décomposer en fractions simples les expressions suivantes :

$$\frac{x-1}{2x^3 + x^2 - 8x - 4}; \quad \left(A = \frac{1}{5}, \quad B = \frac{1}{20}, \quad C = -\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{x^6 - 6x^5 + 11x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 13x + 4}{(x^2+1)^2 (x-2)^2 . x},$$

$$\frac{8x^5 + 46x^4 + 107x^3 + 143x^2 + 114x + 70}{(x+1)^5 (x+7)}.$$

$$(A_0 = 5, \; A_1 = 0, \; A_2 = 3, \; A_3 = 0, \; A_4 = 1, \; B = 7.)$$

LIVRE QUATRIÈME.

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS SUR LA THÉORIE DES DIFFÉRENCES.

Définitions.

233. Considérons une suite de nombres

(1) $$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ldots,\ y_{m-1},\ y_m;$$

si l'on retranche chacun d'eux de celui qui le suit, on obtiendra une nouvelle suite

$$y_1-y_0,\ y_2-y_1,\ y_3-y_2,\ldots,\ y_m-y_{m-1}.$$

Les termes de cette nouvelle suite s'appellent les *différences* des termes de la première. y_1-y_0 est *la différence de* y_0; y_2-y_1 est la différence de y_1; ...; y_m-y_{m-1} est la différence de y_{m-1}.

Pour désigner les différences, nous nous servirons du signe Δ : Δy_{m-1} désignera la différence y_m-y_{m-1}. Par conséquent, les différences des termes de la suite (1) formeront la suite (2) :

(2) $$\Delta y_0,\ \Delta y_1,\ \Delta y_2,\ldots,\ \Delta y_{m-1}.$$

La suite (2) *a un terme de moins que la suite* (1).

On peut faire, pour les termes de la suite (2), ce qu'on vient de faire pour les termes de la suite (1). On formera ainsi *les différences des différences premières* ou *les différences secondes* des termes de la suite (1). Les différences secondes seront :

$$\Delta y_1-\Delta y_0,\ \Delta y_2-\Delta y_1,\ldots,\ \Delta y_{m-1}-\Delta y_{m-2}.$$

On désigne les différences secondes par le signe Δ^2; ces différences forment donc la suite (3) :

(3) $$\Delta^2 y_0,\ \Delta^2 y_1,\ldots,\ \Delta^2 y_{m-2}.$$

La suite (3) *contient un terme de moins que la suite* (2).

En prenant les différences premières des différences secondes, on formera *les différences troisièmes* des termes de la première suite, et ces différences auront pour symbole Δ^3.

On peut continuer de la même manière, et former *les différences quatrièmes, cinquièmes,...*, dont les symboles seront Δ^4, Δ^5,... *A chaque*

nouvelle suite, le nombre des termes diminue d'une unité; de sorte que, si la première suite renferme $m+1$ quantités, la $m^{ième}$ renfermera 1 seule quantité et ne donnera plus lieu à aucune différence.

234. On peut écrire les suites formées par les quantités proposées et leurs différences des divers ordres, en colonnes verticales, comme l'indique le tableau suivant :

y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	⋮
y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	⋮	
y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	⋮		
y_4	Δy_4	⋮			
y_5	⋮				
⋮					

Pour le former, *il faut, par définition, retrancher chaque nombre de celui qui le suit, et écrire le résultat obtenu à droite du nombre soustrait.*

Il en résulte que, réciproquement, *chaque nombre du tableau est égal à celui qui le précède verticalement, augmenté du nombre placé à la droite de ce précédent.*

D'après cela, supposons qu'on veuille former le tableau des différences des sept nombres

$$10,\quad 14,\quad 21,\quad 33,\quad 41,\quad 57,\quad 63;$$

On aura :

	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
10	4	3	2	-11	32	-83
14	7	5	-9	21	-51	
21	12	-4	12	-30		
33	8	8	-18			
41	16	-10				
57	6					
63						

Si l'on donne, au contraire, le nombre 10 et ses six premières différences 4, 3, 2, -11, 32, -83, on opérera par voie d'addition, en disant : $-83+32=-51$, $32-11=21$, $-11+2=-9$, $2+3=5$, $3+4=7$, $4+10=14$, et l'on reformera ainsi la seconde ligne horizontale du tableau. Pour reformer la troisième ligne horizontale, on opérera de la même manière sur la seconde ligne.

On aura : $-51+21=-30$, $21-9=12$, $-9+5=-4$, $5+7=12$, $7+14=21$; etc.

Formules symboliques.

235. *Supposons d'abord qu'on donne les $m+1$ nombres $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$* (c'est-à-dire la première colonne verticale du tableau indiqué au n° 234), *et qu'on demande de trouver l'expression algébrique du terme général* $\Delta^n u_0$ (c'est-à-dire un terme quelconque de la première colonne horizontale du même tableau).

On a, par définition,

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0, \quad \Delta u_1 = u_2 - u_1, \quad \Delta u_2 = u_3 - u_2, \ldots,$$

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0, \; \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1, \ldots,$$

$$\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0, \ldots.$$

Dans les seconds membres des égalités obtenues, l'indice de u décroît d'une unité d'un terme au suivant. De plus, on reconnaît facilement dans ces seconds membres les coefficients du développement de la puissance d'un binôme $(x-a)$. Pour $\Delta^2 u_0$, on a les coefficients d'un carré; pour $\Delta^3 u_0$, les coefficients d'un cube. Il faut prouver que la loi est générale.

Admettons donc qu'elle soit vraie pour $\Delta^p u_0$, et prouvons qu'elle l'est encore pour $\Delta^{p+1} u_0$.

D'après l'hypothèse, on a

$$(1) \qquad \Delta^p u_0 = u_p - C_1^p u_{p-1} + C_2^p u_{p-2} - \ldots \mp C_{n-1}^p u_{p+1-n} \pm C_n^p u_{p-n} \ldots \pm u_0.$$

Cette relation étant *admise* pour les $p+1$ nombres quelconques $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_p$, sera également vraie pour la suite $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{p+1}$. On aura donc, en forçant tous les indices d'une unité :

$$(2) \qquad \Delta^p u_1 = u_{p+1} - C_1^p u_p + C_2^p u_{p-1} - \ldots \pm C_n^p u_{p+1-n} \ldots \pm u_1.$$

Mais, par définition,

$$\Delta^{p+1} u_0 = \Delta^p u_1 - \Delta^p u_0.$$

En retranchant membre à membre les égalités (1) et (2), il viendra donc

$$\Delta^{p+1} u_0 = u_{p+1} \begin{array}{c|c|c|l} - C_1^p & u_p + C_2^p & u_{p-1} - \ldots \pm C_n^p & u_{p+1-n} \ldots \mp u_0. \\ -1 & + C_1^p & \pm C_{n-1}^p & \end{array}$$

Nous savons d'ailleurs (61) qu'on a d'une manière générale

$$C_n^m = C_n^{m-1} + C_{n-1}^{m-1}.$$

On peut donc écrire

$$\Delta^{p+1} u_0 = u_{p+1} - C_1^{p+1} u_p + C_2^{p+1} u_{p-1} - \ldots \pm C_n^{p+1} u_{p+1-n} \ldots \mp u_0.$$

Ainsi, la loi existant pour $\Delta^p u_0$, existe encore nécessairement pour $\Delta^{p+1} u_0$; ayant été établie directement pour $\Delta^2 u_0$ et $\Delta^3 u_0$, elle est vraie pour $\Delta^4 u_0$, $\Delta^5 u_0$, etc.

On peut écrire la formule qu'on vient de démontrer, savoir

$$(D) \qquad \Delta^n u_0 = u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} - \ldots \pm u_0.$$

sous la forme symbolique

$$\Delta^n u_0 = (u-1)^n;$$

en convenant de remplacer dans le développement les exposants de u par les indices correspondants, et le dernier terme 1 par u_0.

Si l'on donne comme précédemment (234) les sept nombres 10, 14, 21, 33, 41, 57, 63, on aura directement

$$\Delta^5 . 10 = 57 - 5.41 + 10.33 - 10.21 + 5.14 - 10 = 32.$$

236. *Supposons, au contraire, qu'on donne le nombre u_0 ainsi que ses m différences successives* $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \ldots, \Delta^m u_0$ (c'est-à-dire la première ligne horizontale du tableau indiqué au n° 234), *et qu'on demande de trouver l'expression du terme général u_n* (c'est-à-dire un terme quelconque de la première ligne verticale du même tableau).

On a, par définition,

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0, \quad \Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0, \quad \Delta^2 u_1 = \Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0, \ldots,$$
$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0, \quad \Delta u_2 = \Delta u_1 + \Delta^2 u_1, \ldots,$$
$$u_3 = u_2 + \Delta u_2 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0, \ldots.$$

Dans les seconds membres des égalités obtenues, l'indice de Δ croît d'une unité d'un terme au suivant. De plus, on reconnaît facilement dans ces seconds membres les coefficients du développement de la puissance d'un binôme $(x+a)$. Pour u_2, on a les coefficients d'un carré; pour u_3, les coefficients d'un cube. Il faut prouver que la loi est générale.

Admettons qu'elle soit vraie pour u_p, et prouvons qu'elle l'est encore pour u_{p+1}.

D'après l'hypothèse, on a

$$(1) \quad \begin{cases} u_p = u_0 + C_1^p \Delta u_0 + C_2^p \Delta^2 u_0 + \ldots \\ \quad + C_{n-1}^p \Delta^{n-1} u_0 + C_n^p \Delta^n u_0 + \ldots + \Delta^p u_0. \end{cases}$$

Cette relation étant *admise* pour u_0 et les p différences successives $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \ldots, \Delta^p u_0$, sera également vraie pour la suite $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \Delta^4 u_0, \ldots, \Delta^{p+1} u_0$. On aura donc, en forçant d'une unité tous les indices du signe Δ,

$$(2) \quad \Delta u_p = \Delta u_0 + C_1^p \Delta^2 u_0 + C_2^p \Delta^3 u_0 + \ldots + C_{n-1}^p \Delta^n u_0 + \ldots + \Delta^{p+1} u_0.$$

Mais, par définition,

$$u_{p+1} = u_p + \Delta u_p.$$

En ajoutant membre à membre les égalités (1) et (2), il viendra donc

$$u_{p+1} = u_0 + \begin{array}{c|c|c|l} C_1^p & \Delta u_0 + C_2^p & \Delta^2 u_0 + \ldots + C_n^p & \Delta^n u_0 + \ldots \Delta^{p+1} u_0. \\ +1 & + C_1^p & + C_{n-1}^p & \end{array}$$

En remplaçant alors, d'une manière générale (61), $C_n^p + C_{n-1}^p$, par C_n^{p+1},

il viendra

$$u_{p+1} = u_0 + C_1^{p+1}\Delta u_0 + C_2^{p+1}\Delta^2 u_0 + \ldots + C_n^{p+1}\Delta^n u_0 + \ldots + \Delta^{p+1} u_0.$$

Ainsi, la loi existant pour u_p, existe encore nécessairement pour u_{p+1}; ayant été établie directement pour u_2 et u_3, elle est vraie pour u_4, u_5, etc.

On peut écrire la formule qu'on vient de démontrer, savoir

$$\text{(N)}\qquad u_n = u_0 + \frac{n}{1}\cdot\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots + \Delta^n u_0,$$

sous la forme symbolique

$$u_n = (1+\Delta)^n . u_0;$$

en convenant d'effectuer le développement, comme si le signe Δ était une quantité, et en regardant les exposants trouvés comme les indices de Δ par rapport à u_0.

Supposons, par exemple, qu'on donne (234) le nombre 10 et ses six différences successives 4, 3, 2, -11, 32, -83; on aura directement

$$u^5 = 10 + 5.4 + 10.3 + 10.2 + 5.(-11) + 32 = 57.$$

Différences des fonctions entières.

237. *Étant donné un polynôme de degré m, entier par rapport à x, si l'on y substitue une suite de nombres en progression arithmétique, la série des différences de l'ordre m des résultats obtenus sera représentée par une constante.*

Nous désignerons par y, pour plus de simplicité, le polynôme donné $F(x)$, et nous aurons

$$y = F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m.$$

Substituons à la place de x les valeurs

$$x_0;\quad x_0 + h,\quad x_0 + 2h, \ldots,\quad x_0 + nh.$$

h est une constante, raison de la progression dont le point départ x_0 est complétement arbitraire. On obtiendra pour y les valeurs correspondantes

$$\text{(1)}\qquad y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n.$$

Ces valeurs sont des polynômes de degré m, entiers par rapport à x_0, et dont les coefficients sont fonction de h (sauf pour y_0).

On aura (113)

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = F(x_0 + h) - F(x_0)$$

$$= F'(x_0)h + F''(x_0)\frac{h^2}{1.2} + \ldots + F^{(m)}(x_0)\frac{h^m}{1.2\ldots m}.$$

$F'(x_0)$ est du degré $(m-1)$ en x_0, $F''(x_0)$ du degré $(m-2)$, etc. Cette relation prouve donc que Δy_0 est du degré $(m-1)$ par rapport à x_0, et que ses coefficients dépendent tous de h. Il en sera de même pour Δy_1, Δy_2, $\Delta y_3, \ldots$, car toutes ses différences premières se déduisent succes-

sivement les unes des autres par le changement de x_0 en $x_0 + h$ (*), de sorte que leur degré par rapport à x_0 ne change pas. Ainsi, en passant de la série (1) à la série (2),

$$(2) \qquad \Delta y_0,\quad \Delta y_1,\quad \Delta y_2,\ldots,\quad \Delta y_{n-1},$$

le degré s'abaisse d'une unité.

Mais la loi qui régit les différences premières par rapport aux quantités qui leur ont donné naissance, régit nécessairement les différences secondes par rapport aux différences premières. La suite

$$(3) \qquad \Delta^2 y_0,\quad \Delta^2 y_1,\ldots,\quad \Delta^2 y_{n-2},$$

sera donc formée de polynômes de degré $(m-2)$ par rapport à x_0, et dont tous les coefficients dépendront de h, et même de h^2. En effet, nous venons de voir que, dans la différence première Δy_0, on pouvait mettre h en facteur commun. Si le polynôme $y_0 = F(x_0)$ avait lui-même présenté cette particularité, h se serait encore retrouvé dans les dérivées successives $F'(x_0)$, $F''(x_0)$, ..., et Δy_0 aurait présenté le facteur commun h^2. Or la condition indiquée étant précisément remplie par Δy_0, tous les termes de $\Delta^2 y_0$, et de même tous ceux de $\Delta^2 y_1$, $\Delta^2 y_2$, etc., contiendront h^2.

En continuant le même raisonnement, ou plutôt, en appliquant la loi trouvée de proche en proche, on voit que, lorsqu'on sera arrivé aux différences $m^{\text{ièmes}}$, le degré par rapport à x_0 se sera abaissé de m unités, c'est-à-dire sera devenu zéro. Les différences $m^{\text{ièmes}}$, ne contenant pas x_0, se réduisent donc à une quantité constante qui, d'après ce qui précède, renferme nécessairement le facteur h^m.

Le premier terme de Δy_0 est le premier terme de $F'(x_0)$, multiplié par h, ou

$$m A_0 x_0^{m-1} h.$$

Le premier terme de $\Delta^2 y_0$ s'obtiendra donc en prenant la dérivée du premier terme de Δy_0, et en multipliant le résultat obtenu par h, ce qui donnera

$$m(m-1) A_0 x_0^{m-2} h^2.$$

Le premier terme de $\Delta^3 y_0$ sera de même

$$m(m-1)(m-2) A_0 x_0^{m-3} h^3.$$

.....Enfin, *le premier terme de $\Delta^m y_0$ ou cette différence $m^{\text{ième}}$ elle-même,*

(*) On a, d'une manière générale,

$$\begin{aligned} y_{p-1} &= F[x_0 + (p-1)h], \\ y_p &= F[x_0 + ph], \\ y_{p+1} &= F[x_0 + (p+1)h], \end{aligned}$$

$$\Delta y_{p-1} = F'[x_0 + (p-1)h]h + F''[x_0 + (p-1)h]\frac{h^2}{1.2} + \ldots,$$

$$\Delta y_p = F'[x_0 + ph]h + F''[x_0 + ph]\frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

puisqu'elle se réduit à une constante, aura pour expression

$$\Delta^m y_0 = \Delta^m y_1 = \Delta^m y_2 = \ldots = m(m-1)(m-2)\ldots 2.1\,A_0 h^m$$

ou

$$1.2.3\ldots m\,A_0 h^m.$$

Applications.

238. 1° *Carrés des nombres entiers.* — La fonction est ici $y = x^2$. On doit substituer à la place de x les valeurs 1, 2, 3, 4, etc.; la raison h est donc l'unité, et les différences *secondes* qui sont constantes sont égales à 2 (237). Il suffit donc d'écrire dans une première ligne verticale les deux premiers carrés 1 et 4, dans une seconde ligne leur différence 3, et dans une troisième la différence seconde constante 2, pour prolonger ensuite le tableau autant qu'on voudra (234), en appliquant les formules

$$\Delta^2 y_0 + \Delta y_0 = \Delta y_1,$$
$$\Delta y_1 + y_1 = y_2.$$

CARRÉS.	Δ	Δ^2
1	3	2
4	5	2
9	7	2
16	9	2
25	11	⋮
36	⋮	
⋮		

2° *Cubes des nombres entiers.* — La fonction étant $y = x^3$, ce sont les différences *troisièmes* qui sont constantes et égales à 6 (237). Il suffit donc d'écrire dans la première ligne verticale du tableau les trois premiers cubes 1, 8, 27; dans la seconde ligne, leurs deux différences 7 et 19; dans la troisième ligne, la différence seconde correspondante 12; et enfin, dans la quatrième ligne, la différence troisième constante 6. On peut prolonger ensuite le tableau autant qu'on veut (234).

CUBES.	Δ	Δ^2	Δ^3
1	7	12	6
8	19	18	6
27	37	24	6
64	61	30	6
125	91	36	⋮
216	127	⋮	
343	⋮		
⋮			

3° *Somme des carrés des m premiers nombres.* — Prenons la suite

$$y_0 = 0^2,\quad y_1 = 0^2 + 1^2,\quad y_2 = 0^2 + 1^2 + 2^2,\quad y_3 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2, \ldots$$

Les différences premières de cette suite étant les carrés consécutifs $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$, il résulte de ce qui précède (1°) que les différences secondes des différences premières de la suite considérée *ou ses différences troisièmes*, sont constantes et égales à 2, *de sorte que les différences d'ordre supérieur n'existent pas.*

On aura donc

$y_0 = 0^2$	$\Delta y_0 = 1$	$\Delta^2 y_0 = 3$	$\Delta^3 y_0 = 2$
$y_1 = 0^2 + 1^2$	$\Delta y_1 = 4$	$\vdots$	$\vdots$
$y_2 = 0^2 + 1^2 + 2^2$	$\vdots$		
$\vdots$			

Pour résoudre la question proposée, il suffit de trouver le terme général y_m de la première colonne du tableau, lequel terme est égal à

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2.$$

Or, étant donnés y_0 et ses m différences successives (*qui se réduisent ici aux trois premières*), on peut poser (236)

$$y_m = y_0 + \frac{m}{1}\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0$$

ou

$$y_m = m + \frac{3m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

comme nous l'avons déjà trouvé (63).

4° *Somme des carrés des m premiers nombres impairs.* — Un nombre impair quelconque peut être représenté par $2x + 1$, x recevant successivement les valeurs 0, 1, 2, 3, etc. Si l'on considère la fonction $y = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$, on voit que les différences secondes en sont constantes et égales à $1.2.A_0 h^2$, c'est-à-dire à 8, puisque h est égale à l'unité. Ceci posé, prenons la suite

$$y_0 = 0^2,\quad y_1 = 0^2 + 1^2,\quad y_2 = 0^2 + 1^2 + 3^2,\quad y_3 = 0^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2, \ldots$$

Les différences premières de cette suite étant les carrés $1^2, 3^2, 5^2, \ldots$, il résulte de ce qui précède que les différences secondes des différences premières ou les différences troisièmes de la suite considérée sont constantes et égales à 8, *de sorte que les différences d'ordre supérieur n'existent pas.* On aura donc

$y_0 = 0^2$	$\Delta y_0 = 1$	$\Delta^2 y_0 = 8$	$\Delta^3 y_0 = 8$
$y_1 = 0^2 + 1^2$	$\Delta y_1 = 9$	$\vdots$	$\vdots$
$y_2 = 0^2 + 1^2 + 3^2$	$\vdots$		
$\vdots$			

Pour résoudre la question proposée, il suffit de trouver le terme général y_m de la première colonne du tableau, lequel terme est égal à

$$0^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2m-1)^2.$$

Or, étant donnés y_0 et ses m différences successives (*qui se réduisent ici aux trois premières*), on peut poser (236)

$$y_m = y_0 + \frac{m}{1}\cdot \Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{1.\ 2.}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}\Delta^3 y_0,$$

ou

$$y_m = m + 4m(m-1) + \frac{4m(m-1)(m-2)}{3} = \frac{m(2m-1)(2m+1)}{3}.$$

Si l'on pose, pour plus de simplicité, $2m-1 = l$, on obtient

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + l^2 = \frac{l(l+1)(l+2)}{6}\ (^*).$$

Nota. La marche indiquée (3°, 4°) permet de calculer la somme des cubes, des quatrièmes puissances, etc., des nombres entiers ou des nombres impairs consécutifs.

5° *Considérons une fonction du troisième degré* telle que

$$y = x^3 + 5x^2 - 2x + 7.$$

On veut calculer les valeurs de la fonction, pour des valeurs de la variable en progression arithmétique de raison 1 :

$$\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots.$$

On remarquera que, puisqu'il s'agit d'une fonction entière, la différence troisième est constante et égale à 1.2.3 ou 6 (puisque l'on a, dans l'exemple proposé, $A_0 = h = 1$). On cherchera directement les valeurs de la fonction pour les valeurs de x égales à -1, 0, 1, et l'on formera le tableau suivant qu'on prolongera facilement dans les deux sens, en se rappelant ce qui a été dit au n° 234.

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
-3	31	-8	-2	6
-2	23	-10	4	6
-1	13	-6	10	6
0	7	4	16	6
$+1$	11	20	22	6
$+2$	31	42	28	⋮
$+3$	73	70	⋮	
$+4$	143	⋮		
⋮	⋮			

Ayant pour y les valeurs 13, 7, 11, on en déduira les différences premières -6 et 4, la différence seconde 10. On sait que la différence troi-

(*) Les dernières formules établies (3°, 4°) sont utiles dans la théorie *des ponts suspendus* : elles servent à calculer la somme des longueurs de tiges qui relient les chaines au tablier.

sième est constante et égale à 6. Pour avoir le résultat de la substitution de $+2$, on dira donc :

$$6+10=16, \quad 16+4=20, \quad 20+11=31.$$

Pour avoir celui de la substitution de $+3$, on dira de même, *en procédant toujours par ligne oblique :*

$$6+16, 22; \quad 22+20, 42; \quad 42+31, 73.$$

Si l'on veut, au contraire, le résultat de la substitution de -2, il faudra dire :

$$10-6=4, \quad -6-4=-10, \quad 13-(-10)=23, \text{ etc.}$$

Cet exemple montre que, pour calculer les valeurs d'une fonction entière du troisième degré, pour des valeurs entières de la variable en progression arithmétique de raison égale à l'unité, il suffit de chercher directement les valeurs de la fonction qui correspondent aux trois nombres entiers consécutifs -1, 0, $+1$.

S'il s'agissait d'une fonction entière du quatrième degré, c'est la différence quatrième qui serait constante, et il faudrait calculer directement quatre valeurs consécutives de la fonction.

En général, pour une fonction entière du degré m, c'est la différence $m^{ième}$ qui sera constante (237), et il faudra calculer directement m valeurs consécutives de la fonction, pour pouvoir ensuite calculer très-rapidement toutes les autres.

239. *Remarque.* — Il arrive le plus souvent, lorsqu'on considère des nombres dont la succession est assujettie à une loi régulière, et qui sont suffisamment rapprochés, que les différences tendent à devenir constantes à mesure que leur ordre s'élève. On peut alors, en négligeant les quantités qui n'influent pas sur le degré d'approximation imposé, regarder ces différences comme invariables, à partir d'un certain ordre et dans un certain intervalle; ce qui permet de calculer les valeurs correspondantes de la fonction, comme si elle était réductible à un polynôme entier.

CHAPITRE II.

DE L'INTERPOLATION.

Définitions.

240. D'une manière générale, l'*interpolation* consiste à insérer entre les termes d'une suite donnée, de nouveaux termes soumis à la même loi.

Quand on insère entre deux termes d'une progression un certain nombre de moyens, on résout un problème d'interpolation.

Dans ce cas, la loi est connue et très-facile à exprimer pour les nombres intermédiaires qu'on cherche; mais ordinairement, c'est l'expérience qui a fourni des nombres dont la loi de succession reste inaperçue, et ce n'est qu'approximativement qu'on peut calculer les termes intermédiaires. On

y arrive en s'imposant, par exemple, la condition que les différences d'un certain ordre seront constantes, pour la série définitivement obtenue.

C'est ainsi que, pour les logarithmes, on *admet* que des accroissements égaux des nombres produisent des accroissements égaux des logarithmes. Cette convention revient à supposer constantes les différences premières des logarithmes, ou nulles leurs différences secondes. L'examen de la partie élevée des tables justifie d'ailleurs la proportionnalité adoptée (eu égard au degré d'approximation voulu).

Par sa nature même, le problème de l'interpolation est *indéterminé*. On conçoit, en effet, que, si l'on connaît les $m+1$ valeurs de la fonction qui correspondent à $m+1$ valeurs données de la variable, il y a une infinité de fonctions qui peuvent, pour les mêmes valeurs de la variable, se confondre avec la fonction inconnue, en s'en écartant plus ou moins dans l'intervalle (*)

Algébriquement, on cherche une fonction du degré m, qui soit satisfaite pour les $m+1$ valeurs de la variable. *Cette fonction existe toujours, et il n'en existe qu'une;* elle fournit le moyen de calculer les valeurs que prend la fonction, lorsqu'on fait passer la variable par les valeurs intermédiaires. *Mais ces valeurs doivent toujours être considérées comme approximatives;* car rien ne dit que la fonction inconnue soit du degré m, et l'on ne sait rien sur la forme qu'elle peut affecter.

Formule d'interpolation de Lagrange.

241. Posons

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m.$$

Cette fonction doit être satisfaite par les $m+1$ valeurs $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$, combinées avec les valeurs $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$.

On devra donc avoir :

$$y_0 = A_0 x_0^m + A_1 x_0^{m-1} + A_2 x_0^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x_0 + A_m,$$
$$y_1 = A_0 x_1^m + A_1 x_1^{m-1} + A_2 x_1^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x_1 + A_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_m = A_0 x_m^m + A_1 x_m^{m-1} + A_2 x_m^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x_m + A_m.$$

Pour déterminer les $m+1$ coefficients inconnus $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$, on a donc $m+1$ équations du premier degré. Il suffit de résoudre ces équa-

(*) C'est ce qu'un tracé graphique met complétement en évidence. Si l'on porte en abscisses les valeurs de la variable et en ordonnées les valeurs correspondantes de la fonction, on peut réunir les différents points ainsi construits par une infinité de courbes qui, toutes, satisferont aux conditions imposées, c'est-à-dire qui, toutes, pourraient représenter aussi bien la fonction cherchée, si l'on s'en tenait aux seules données numériques de la question. Mais la continuité qu'on observe en général dans les lois naturelles, porte à choisir, entre ces courbes, celle qui présente le moins de sinuosités ou dont la marche intermédiaire présente le plus d'analogie avec la marche générale indiquée par l'ensemble des points considérés.

Fig. 7.

tions pour obtenir la formule demandée; mais la marche suivante est beaucoup plus rapide.

Posons

$$y = \mu_0 y_0 + \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \ldots + \mu_m y_m,$$

$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, étant des fonctions de x qui doivent, d'après le problème posé, satisfaire aux conditions que nous allons énoncer :

Pour $x = x_0$, il faut qu'on ait $y = y_0$, c'est-à-dire il faut que μ_0 se réduise à l'unité, et que $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, deviennent nulles;

Pour $x = x_1$, il faut qu'on ait $y = y_1$, c'est-à-dire il faut que μ_1 se réduise à l'unité, et que $\mu_0, \mu_2, \ldots, \mu_m$, deviennent nulles;

....

Pour $x = x_m$, il faut qu'on ait $y = y_m$, c'est-à-dire il faut que μ_m se réduise à l'unité, et que $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}$, deviennent nulles.

On voit immédiatement qu'on peut, d'après cela, écrire

$$\mu_0 = \mathrm{K}(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m);$$

car pour toutes les valeurs $x = x_1, x = x_2, \ldots, x = x_m$, μ_0 deviendra bien nulle. Maintenant, pour que μ_0 soit l'unité pour $x = x_0$, il suffit qu'on prenne

$$\mathrm{K} = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_m)}.$$

Donc

$$\mu_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_m)}.$$

On trouvera de la même manière

$$\mu_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_m)},$$

....

$$\mu_m = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{m-1})}{(x_m - x_0)(x_m - x_1)\ldots(x_m - x_{m-1})}.$$

La formule cherchée prendra donc la forme

$$\begin{aligned} y = {} & \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_m)} y_0 \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_m)} y_1 + \ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{m-1})}{(x_m - x_0)(x_m - x_1)\ldots(x_m - x_{m-1})} y_m. \end{aligned}$$

L'équation obtenue est du degré m, et elle est satisfaite par $(m+1)$ couples de valeurs. Toute formule trouvée par une autre méthode et satisfaisant aux mêmes conditions, devra donc être identique à la précédente. En effet, deux polynômes en x du degré m étant égaux pour plus de m valeurs de la variable (pour $m+1$ dans le cas actuel), coïncident entièrement (178).

242. *Remarque.* — La démonstration précédente prouve d'elle-même que le problème de l'interpolation est complétement indéterminé. Car, si l'on n'exige pas que la fonction inconnue soit entière, on pourra soumettre

les différences $x - x_0$, $x - x_1$, $x - x_2$, etc., à tels signes *convenablement choisis* qu'on voudra. Par exemple, on peut prendre

$$\mu_0 = \frac{\sin(x - x_1)\sin(x - x_2)\ldots\sin(x - x_m)}{\sin(x_0 - x_1)\sin(x_0 - x_2)\ldots\sin(x_0 - x_m)},$$

ou bien

$$\mu_0 = \frac{\sqrt{x - x_1}.\sqrt{x - x_2}\ldots\sqrt{x - x_m}}{\sqrt{x_0 - x_1}.\sqrt{x_0 - x_2}\ldots\sqrt{x_0 - x_m}}.$$

Formule d'interpolation de Newton.

243. La formule de Lagrange, très-générale, est moins propre aux calculs que la formule de Newton; mais cette dernière exige que les $m+1$ valeurs données de la variable soient en progression par différence.

Soit y la fonction cherchée. Soient

$$x_0, \quad x_0 + h, \quad x_0 + 2h, \ldots, \quad x_0 + mh,$$

les $m+1$ valeurs de la variable en progression par différence de raison h, et

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2, \ldots, \quad y_m,$$

les $m+1$ valeurs correspondantes de la fonction.

Nous aurons dans tous les cas (236)

$$y_m = y_0 + \frac{m}{1}\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(m-1)]}{1.2\ldots m}\Delta^m y_0.$$

Remplaçons y_m par y et posons

$$x = x_0 + mh.$$

Nous en déduirons

$$m = \frac{x - x_0}{h}.$$

Il viendra, par suite,

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 y_0}{1.2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\cdots\left(\frac{x - x_0}{h} - (m-1)\right)\frac{\Delta^m y_0}{1.2\ldots m}.$$

Je dis que cette fonction, si l'on y considère x comme variable, répond aux conditions imposées (240). Elle est évidemment du degré m, le dernier terme renfermant le produit de m facteurs du premier degré en x. De plus, si l'on fait $x = x_0 + nh$, c'est-à-dire si l'on remplace x par un terme quelconque de la progression arithmétique formée par les valeurs de la variable, on doit remplacer par n le facteur $\frac{x - x_0}{h}$, et l'on obtient ainsi dans le second membre la valeur de y_n; de sorte que la fonction y prend bien alors la valeur correspondante à $x_0 + nh$. Il faut remarquer que, dans ce cas, les termes du second membre qui suivent le terme

$$n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]\frac{\Delta^n y_0}{1.2\ldots n},$$

disparaissent comme renfermant le facteur $n - n$ en numérateur.

L'avantage de la formule de Newton est de renfermer les différences successives qu'on déduit des valeurs données de la fonction. Ces différences diminuant, en général, très-rapidement, on pourra, dans la pratique, conserver seulement les premiers termes du second membre, et négliger tous les autres.

244. Pour simplifier l'écriture, on pose souvent

$$\frac{x - x_0}{h} = z.$$

Il vient alors

$$y = y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{z(z-1)\ldots(z-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m y_0.$$

Lorsqu'on ne tient compte que de la différence première, on a la formule très-simple

$$y = y_0 + z.\Delta y_0,$$

d'où

$$\frac{y - y_0}{\Delta y_0} = z = \frac{x - x_0}{h};$$

c'est-à-dire que *l'accroissement de la fonction est dans ce cas proportionnel à l'accroissement de la variable.* C'est ainsi qu'on opère, quand on cherche les logarithmes des nombres ou des rapports trigonométriques, qui ne sont pas directement inscrits dans les tables.

La formule d'interpolation, lorsqu'on conserve les deux premières différences, devient

$$y = y_0 + z.\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 y_0.$$

Quand $h = 1$, $z = \frac{x - x_0}{h}$ représente directement l'accroissement de x.

Applications.

245. 1° *Proposons-nous d'abord de calculer avec sept décimales le logarithme de* sin 1° 17′ 35″,7.

On regardera les logarithmes contenus dans la table comme les valeurs de la fonction y, les valeurs de x correspondront aux arcs. Les tables donnent

$$y_0 = \log\sin 1^\circ\, 17'\, 30'' = \bar{2},3529910$$

et, en même temps,

$$\Delta y_0 = 0,0009328, \quad \Delta^2 y_0 = -0,0000020, \quad \Delta^3 y_0 = 0,0000001.$$

On a

$$z = \frac{x - x_0}{h} = \frac{5'',7}{10''} = 0,57.$$

Par suite,

$$z.\Delta y_0 = 0,0005317.$$

$$\frac{z(z-1)}{1.2} = -0,12255, \quad \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 = 0,0000003,$$

$$\frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3} = 0,0584155, \quad \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}.\Delta^3 y_0 = 0,00000000584155.$$

On voit que, si l'on veut seulement sept décimales exactes, on peut négliger le terme

$$\frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0$$

qui ne s'élève pas à 6 unités du neuvième ordre décimal. On aura alors

$$y = y_0 + z.\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 y_0,$$

c'est-à-dire

$$y = \log \sin 1^\circ 17' 35'',7 = \bar{2},3535230 :$$

résultat qui concorde parfaitement avec celui donné par les tables de logarithmes sinus, où les arcs varient de seconde en seconde, placées au commencement des Tables trigonométriques de Callet.

246. 2° *Proposons-nous de trouver la fonction entière du quatrième degré qui, pour les cinq valeurs* $-2, -1, 0, 1, 2$, *de la variable, prend les valeurs* $67, 14, 3, 4, 11$.

On aura

$$y_0 = 67, \quad \Delta y_0 = -53, \quad \Delta^2 y_0 = 42, \quad \Delta^3 y_0 = -30, \quad \Delta^4 y_0 = 24.$$

Il suffira de substituer ces valeurs dans la formule

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta y_0 + \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 y_0}{1.2} + \ldots.$$

En remplaçant x_0 par -2 et h par 1, il viendra

$$y = 67 - 53(x+2) + 21(x+2)(x+1) - 5(x+2)(x+1)x + (x+2)(x+1)x(x-1).$$

En effectuant et en ordonnant, on trouve

$$y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 3.$$

247. 3° Reprenons la formule générale (243)

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta y_0 + \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 y_0}{1.2} + \ldots + \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\cdots\left(\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right)\frac{\Delta^m y_0}{1.2\ldots m}.$$

Supposons que les quantités $y_0, \Delta y_0, \Delta^2 y_0, \ldots$, soient toutes positives. Le facteur $\frac{x-x_0}{h}-(m-1)$ est le plus petit facteur de son espèce dans le second membre. S'il est positif, tous les autres le seront. La fonction y sera alors positive, comme somme de termes tous positifs. Si le facteur considéré devient égal à zéro, la même conclusion subsistera; le dernier terme du second membre disparaîtra, mais tous les autres resteront positifs.

$$\frac{x-x_0}{h}-(m-1) = 0$$

donne

$$x = x_0 + (m-1)h.$$

Par conséquent, x croissant indéfiniment à partir de cette valeur, et

les hypothèses indiquées étant réalisées, la fonction restera constamment positive sans jamais passer par zéro. Dès lors (194), $x_0 + (m-1)h$ représente *une limite supérieure* des racines positives de l'équation obtenue en égalant la fonction à zéro.

Si l'on reprend l'exemple du n° 238 (5°), on voit que la fonction

$$y = x^3 + 5x^2 - 2x + 7$$

prend la valeur positive 7 pour $x = 0$ et que toutes les différences correspondantes 4, 16, 6, sont positives. Dès lors, nous ferons $x_0 = 0$, $h = 1$, $m = 3$, dans la relation $x = x_0 + (m-1)h$, et nous trouverons 2 pour limite supérieure des racines positives de l'équation

$$x^3 + 5x^2 - 2x + 7 = 0.$$

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

248. En général, on commence par chercher les racines commensurables de l'équation proposée, et l'on supprime les facteurs correspondants.

Ensuite, s'il y a lieu, on applique à l'équation simplifiée la méthode des racines égales, de manière à pouvoir opérer sur de nouvelles équations n'ayant que des racines inégales. Cette précaution est indispensable si l'on veut pouvoir affirmer qu'entre deux nombres qui, substitués dans l'équation, donnent des résultats de signes contraires, il n'existe qu'une seule racine (ces deux nombres étant suffisamment rapprochés).

Le théorème de Descartes fera d'ailleurs préalablement connaître des limites supérieures des nombres de racines positives et négatives que l'équation considérée peut admettre.

Il sera encore convenable de déterminer, comme nous l'avons indiqué (Livre III, Chap. II), des limites aussi resserrées que possible, comprenant les racines positives d'une part, les racines négatives de l'autre. Dans tous les cas, si l'on emploie la méthode des différences, la valeur de x pour laquelle y et toutes les différences correspondantes seront positives, conduira à une limite supérieure des racines positives facile à former (247).

Méthode des différences, séparation des racines.

249. L'équation proposée étant du degré m, la différence $m^{ième}$ de son premier membre sera constante et égale à $1.2.3\ldots m A_0$ (A_0 étant le coefficient de x^m, et h étant égale à l'unité). Il suffira donc de calculer directement les m valeurs de ce premier membre pour les m substitutions

$$-3,\quad -2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\ldots.$$

On pourra alors former facilement un tableau semblable à celui établi au n° 238 (5°). On aura soin de tenir compte des indications fournies par les limites (248), de manière à ne pas prolonger le tableau inutilement dans un sens ou dans l'autre.

Si les résultats fournis par les substitutions *entières* ne sont pas tous

de même signe, deux résultats consécutifs seront, une ou plusieurs fois, de signes contraires; entre les nombres entiers correspondants, il tombera nécessairement un nombre impair de racines (180).

Si les intervalles ainsi marqués répondent au nombre des racines réelles possibles d'après le théorème de Descartes, les racines seront *séparées*, c'est-à-dire qu'il existera une racine, et une seule, entre deux substitutions entières ayant donné lieu à un changement de signe de la fonction.

Il n'en sera pas ainsi en général : ou le nombre des intervalles obtenus sera inférieur au nombre des racines réelles possibles, ou il n'y aura pas de changement de signe. Il faudra alors recourir à d'autres substitutions plus resserrées; et pour n'en pas faire de tout à fait inutiles, on s'aidera d'un tracé graphique.

On portera les valeurs équidistantes $(-2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ de la variable en abscisses, et les valeurs correspondantes de la fonction (inscrites au tableau déjà formé) en ordonnées. En joignant par un trait continu les points ainsi déterminés, on aura une courbe qui représentera approximativement la marche de la fonction, et les points où cette courbe rencontrera l'axe des abscisses ayant des ordonnées égales à zéro feront approximativement connaître les valeurs de la variable, qui annulent le premier membre de l'équation et sont les racines demandées. Ce n'est donc que dans les intervalles qui sembleront comprendre les valeurs correspondantes à ces points d'intersection, qu'on devra essayer de nouvelles substitutions.

Ces substitutions se feront en prenant $h = 0,1$ pour raison de la nouvelle progression arithmétique formée par les valeurs de x; et en général, elles suffiront pour décider (en reprenant le tracé de la courbe s'il est nécessaire dans les intervalles considérés) s'il existe ou non des racines dans ces intervalles.

Pour opérer ces nouvelles substitutions, on pourra suivre une marche identique à celle qu'on vient d'indiquer pour les substitutions entières.

En continuant ainsi, on pourra, non-seulement *séparer* les racines, mais en *approcher* à moins d'un dixième, d'un centième, d'un millième, etc.

Application aux équations du troisième degré.

250. *Au lieu de chercher directement les nouvelles différences qui dépendent de la raison* $0,1$, *il est préférable de déduire ces différences des premières calculées.* C'est ce qu'il est facile de faire à l'aide de formules générales qui sont d'un usage commode dans le cas du troisième degré, mais qui deviennent de plus en plus compliquées à mesure que le degré s'élève.

Dans le cas où la fonction $y = F(x)$ est du troisième degré, on a (237)

$$\Delta F(x) = F'(x)h + F''(x)\frac{h^2}{1.2} + F'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}.$$

Le second membre est un polynôme du second degré que nous pourrons désigner par $f(x)$. On aura alors

$$\Delta^2 F(x) = \Delta f(x) = f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1.2}.$$



De

$$f(x) = F'(x)h + F''(x)\frac{h^2}{1.2} + F'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}$$

on déduit, en remarquant que $F'''(x)$ est une constante,

$$f'(x) = F''(x)h + F'''(x)\frac{h^2}{1.2},$$

$$f''(x) = F'''(x)h.$$

La valeur de $\Delta^2 F(x)$ deviendra donc

$$\Delta^2 F(x) = F''(x)h^2 + F'''(x)h^3.$$

Le second membre de cette relation est une fonction du premier degré qu'on peut désigner par $\varphi(x)$. On a alors

$$\Delta^3 F(x) = \Delta\varphi(x) = \varphi'(x)h = F'''(x)h^3.$$

On a ainsi les relations suivantes :

$$\Delta F(x) = F'(x)h + F''(x)\frac{h^2}{2} + F'''(x)\frac{h^3}{6},$$

$$\Delta^2 F(x) = F''(x)h^2 + F'''(x)h^3,$$

$$\Delta^3 F(x) = F'''(x)h^3.$$

Ces formules étant complétement générales, supposons que la raison h devienne 10 fois plus petite ou égale à $\frac{h}{10}$, et désignons les nouvelles différences par δ. Nous aurons

$$\delta F(x) = F'(x)\frac{h}{10} + F''(x)\frac{h^2}{200} + F'''(x)\frac{h^3}{6000},$$

$$\delta^2 F(x) = F''(x)\frac{h^2}{100} + F'''(x)\frac{h^3}{1000},$$

$$\delta^3 F(x) = F'''(x)\frac{h^3}{1000}.$$

On voit que :

1° $\delta^3 F(x)$ *est la millième partie de* $\Delta^3 F(x)$;

2° $\delta^2 F(x)$ *se compose de* $\delta^3 F(x)$, *plus un terme qui est la centième partie de* $F''(x)h^2$ *ou de* $\Delta^2 F(x) - \Delta^3 F(x)$, *c'est-à-dire la centième partie de la différence qui précède verticalement* $\Delta^2 F(x)$ *dans la série des* Δ (234, 5°);

3° $\delta F(x)$ *se compose de trois termes dont les deux derniers seront immédiatement connus d'après les calculs précédents* [le dernier est le sixième de $\delta^3 F(x)$, et l'avant-dernier la moitié de $F''(x)\frac{h^2}{100}$], *et dont le premier est égal au dixième de* $F'(x)h$, *c'est-à-dire au dixième de la somme des trois quantités connues*

$$\Delta F(x) - \frac{\Delta^2 F(x) - \Delta^3 F(x)}{2} - \frac{\Delta^3 F(x)}{6},$$

en vertu de la relation

$$\Delta F(x) = F'(x)h + F''(x)\frac{h^2}{2} + F'''(x)\frac{h^3}{6}.$$

En résumé, on peut écrire, en désignant par y_0 la valeur de la fonction qui sert de point de départ, et par y_{-1} la valeur précédente dans le tableau déjà formé qui correspond aux symboles Δ :

$$\delta^3 y_0 = \frac{\Delta^3 y_0}{1000},$$

$$\delta^2 y_0 = \frac{\Delta^3 y_0}{1000} + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{100},$$

$$\delta y_0 = \frac{\Delta^3 y_0}{6000} + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{200} + \frac{1}{10}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{6}\right).$$

251. Soit l'équation $x^3 - 4x + 1 = 0$.

Cette équation peut avoir, d'après le théorème de Descartes, deux racines positives et une négative. On voit facilement que 2 est une limite supérieure des racines positives et -3 une limite inférieure des racines négatives. Ceci posé, substituons à x les valeurs $-1, 0, +1$. Le premier membre de l'équation prendra les valeurs $4, 1, -2$. Les deux différences premières correspondantes seront -3 et -3, la différence seconde sera zéro. Quant à la différence troisième, nous savons qu'elle est constante et égale à 6 (237). Nous pourrons donc former le tableau suivant :

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
-3	-14	15	-12	6
-2	1	3	-6	6
-1	4	-3	0	6
0	1	-3	6	
1	-2	3		
2	1			

En examinant la colonne des y, on voit qu'il existe une racine négative entre -2 et -3, et une seule, d'après le théorème de Descartes. De même, il existe une seule racine positive entre 0 et 1, et une seule entre 1 et 2.

Si l'on veut calculer la plus petite racine positive à 0,1 près, il faudra, entre 0 et 1, insérer des valeurs distantes de 0,1.

Pour $x = 0$, on a

$$y = 1,\quad \Delta y = -3,\quad \Delta^2 y = 6,\quad \Delta^3 y = 6.$$

Par suite, h devenant 0,1, on aura (le $\Delta^2 y$ qui correspond à $x = -1$ étant 0) :

$$\delta^3 y = 0{,}006;\ \delta^2 y = 0{,}006;\ \delta y = 0{,}001 + 0{,}1(-3-1) = -0{,}399.$$

Ces résultats permettront de former le tableau suivant :

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
0	1	− 0,399	0,006	0,006
0,1	0,601	− 0,393	0,012	0,006
0,2	0,208	− 0,381	0,018	0,006
0,3	− 0,173	− 0,363	0,024	

On voit que la racine cherchée est comprise entre 0,2 et 0,3.

Si on veut l'obtenir à 0,01 près, il faut partager l'intervalle qui sépare 0,2 et et 0,3 en dix parties égales. La raison de la progression arithmétique formée par les valeurs attribuées à la variable, devient 0,01 de 0,1 qu'elle était, c'est-à-dire 10 fois plus petite que la précédente. On peut donc déduire les nouvelles différences des précédentes, au moyen des mêmes formules (250).

Pour $x = 0,2$, on a

$$y = 0,208; \quad \Delta y = -0,381; \quad \Delta^2 y = 0,018; \quad \Delta^3 y = 0,006.$$

Par suite, on aura (le $\Delta^2 y$ qui correspond à $x = 0,1$ étant 0,012) :

$$\delta^3 y = 0,000006; \quad \delta^2 y = 0,000126; \quad \delta y = -0,038739.$$

Ces valeurs nous permettront d'établir le tableau suivant. Pour plus de rapidité dans l'écriture, nous écrirons *les différences* trouvées en négligeant la virgule. Nous la conserverons seulement dans les valeurs des y.

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
0,2	0,208000	− 38739	126	6
0,21	0,169261	− 38613	132	6
0,22	0,130648	− 38481	138	6
0,23	0,092167	− 38343	144	6
0,24	0,053824	− 38199	150	6
0,25	0,015625	− 38049	156	6
0,26	− 0,022424	− 37893	162	

On voit que la racine cherchée est comprise entre 0,25 et 0,26.

On pourra continuer de la même manière pour en approcher davantage.

Pour trouver la seconde racine positive ou la racine négative, on suivra une marche identique.

Dans le cas qui nous occupe, la résolution directe (Livre III, chap. VI) est d'ailleurs bien préférable.

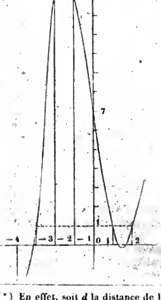
252. Soit l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$, déjà résolue (220). Cette équation

a deux racines positives et une racine négative. 2 est une limite supérieure des racines positives, -4 une limite inférieure de la racine négative. La fonction prend les valeurs $13, 7, 1$, pour les substitutions $-1, 0, 1$. On aura donc $-6, -6$, pour les deux différences premières correspondantes, 0 pour la différence seconde, 6 pour la différence troisième constante. On établira, par conséquent, le tableau suivant pour les substitutions entières :

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
-4	-29	30	-18	6
-3	1	12	-12	6
-2	13	0	-6	6
-1	13	-6	0	6
0	7	-6	6	6
1	1	0	12	
2	1	12		

On voit qu'il y a une racine négative entre -3 et -4. *Quant aux racines positives, elles ne sont pas encore séparées, de sorte qu'elles tombent toutes les deux entre deux nombres entiers consécutifs.*

Fig. 8.



Pour déterminer l'intervalle correspondant, on a deux moyens à sa disposition.

A l'aide du tableau formé, traçons la courbe qui représente la marche de la fonction entre $x = -4$ et $x = 2$, en prenant pour échelle des longueurs le demi-centimètre.

La forme de la courbe obtenue indique immédiatement que les deux racines positives sont comprises entre 1 et 2. Si l'on ne savait pas d'avance que ces racines existent, la conclusion serait la même ; car une droite parallèle à l'axe des abscisses ne pouvant pas couper la courbe en plus de trois points (*), la forme générale indiquée est bien approximativement celle de la courbe représentative de la fonction. Et dès lors, si la courbe rencontre l'axe des abscisses à droite du point o, ce ne peut être qu'entre les points 1 et 2.

(*) En effet, soit d la distance de la droite parallèle à l'axe des abscisses; si cette droite coupait la courbe en plus de trois points, l'équation $x^3 - 7x + 7 = d$ aurait plus de trois racines.

On peut encore consulter la dérivée de l'équation proposée. Cette dérivée est $3x^2 - 7 = 0$. Si l'équation donnée a, en effet, deux racines positives, l'équation dérivée en aura une comprise entre elles (215). La racine positive de l'équation dérivée est $\sqrt{\frac{7}{3}}$; cette racine tombe entre 1 et 2. Donc, si les racines positives de la proposée existent, comme elles doivent comprendre $\sqrt{\frac{7}{3}}$ et tomber entre deux nombres entiers consécutifs, il faut qu'elles soient elles-mêmes comprises entre 1 et 2.

Il ne restera plus qu'à partager l'intervalle de 1 à 2 en dix parties égales, pour avoir les deux racines à 0,1 près.

Pour $x = 1$, on a

$$y = 1, \quad \Delta y = 0, \quad \Delta^2 y = 12, \quad \Delta^3 y = 6.$$

Le $\Delta^3 y$ qui correspond à $x = 0$ étant 6, on aura :

$$\delta^3 y = 0{,}006; \quad \delta^2 y = 0{,}066; \quad \delta y = -0{,}369.$$

Nous formerons donc le tableau suivant, en négligeant la virgule des différences pour simplifier l'écriture :

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
1	1,000	− 369	66	6
1,1	0,631	− 303	72	6
1,2	0,328	− 231	78	6
1,3	0,097	− 153	84	6
1,4	− 0,056	− 69	90	6
1,5	− 0,125	21	96	6
1,6	− 0,104	117	102	6
1,7	+ 0,013	219	108	

On voit que l'une des racines cherchées est comprise entre 1,3 et 1,4 et que l'autre tombe entre 1,6 et 1,7.

On pourra approcher davantage des deux racines, en suivant le même procédé.

Équations de degré supérieur.

253. Pour montrer comment la méthode des différences peut s'appliquer aux équations de degré supérieur, nous choisirons l'équation du quatrième degré.

Nous indiquerons d'abord une manière expéditive de déduire alors dans chaque cas particulier, des premières différences obtenues, celles qui correspondent à une raison dix fois plus petite.

Nous savons (237) que

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = F'(x_0)\,h + F''(x_0)\,\frac{h^2}{1.2} + \ldots.$$

Dans le cas du quatrième degré, Δy_0 est une fonction du quatrième degré en h, sans terme constant. On peut donc poser

$$y_1 = y_0 + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4.$$

D est connu : ce n'est autre chose (113) que le coefficient de x^4 dans l'équation proposée.

Pour passer de y_1 à y_2 ou à y_3 (c'est-à-dire du résultat qui correspond à $x_0 + h$ à celui qui correspond à $x_0 + 2h$ ou à $x_0 + 3h$), il suffit de remplacer h par $2h$ ou par $3h$. Il viendra donc :

$$y_2 = y_0 + 2Ah + 4Bh^2 + 8Ch^3 + 16Dh^4;$$
$$y_3 = y_0 + 3Ah + 9Bh^2 + 27Ch^3 + 81Dh^4.$$

On en déduit (235) :

$$\Delta y_0 = Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4,$$
$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = 2Bh^2 + 6Ch^3 + 14Dh^4,$$
$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = 6Ch^3 + 36Dh^4.$$

On a d'ailleurs (237)

$$\Delta^4 y_0 = 1.2.3.4.Dh^4 = 24Dh^4.$$

Connaissant Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, on aura donc trois équations du premier degré pour déterminer les trois inconnues A, B, C.

Les formules trouvées étant complétement générales, permettront ensuite de passer aux nouvelles différences δ qu'on obtient, quand la raison h devient dix fois plus petite. Posons $\frac{h}{10} = h'$, nous aurons :

$$\delta y_0 = Ah' + Bh'^2 + Ch'^3 + Dh'^4,$$
$$\delta^2 y_0 = 2Bh'^2 + 6Ch'^3 + 14Dh'^4,$$
$$\delta^3 y_0 = 6Ch'^3 + 36Dh'^4,$$
$$\delta^4 y_0 = 24Dh'^4.$$

254. Appliquons ce qui précède à l'équation

$$8x^4 - 40x^3 + 57x^2 - 40x + 49 = 0.$$

Cette équation peut avoir, d'après le théorème de Descartes, quatre ou deux racines positives, ou pas du tout. La transformée en $-x$ ne présentant aucune variation, il n'y a pas de racine négative. On voit facilement que 5 est une limite supérieure des racines positives, si elles existent.

Formons le tableau des substitutions entières.

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	49	− 15	− 14	48	192
1	34	− 29	34	240	192
2	5	5	274	432	192
3	10	279	708	624	192
4	289	987	1332	816	192
5	1276	2319	2148	1008	

Il n'y a pas de changement de signe. Donc, si les racines positives existent, elles tombent entre deux nombres entiers consécutifs.

Si l'on construit la courbe des valeurs obtenues, on voit que c'est *probablement* entre 2 et 3. C'est donc cet intervalle qu'on partagera en dix parties égales.

On a ici

$$\Delta y_0 = 5,\quad \Delta^2 y_0 = 274,\quad \Delta^3 y_0 = 432,\quad \Delta^4 y_0 = 192.$$

Les équations à résoudre seront, par conséquent (253),

$$5 = A + B + C + 8,$$
$$274 = 2B + 6C + 112,$$
$$432 = 6C + 288.$$

On en tire immédiatement

$$C = 24,\quad B = 9,\quad A = -36.$$

Par suite,

$$\delta y_0 = -3{,}4852;\quad \delta^2 y_0 = 0{,}3352;\quad \delta^3 y_0 = 0{,}1728;\quad \delta^4 y_0 = 0{,}0192.$$

Ces résultats permettent d'écrire le tableau ci-dessous. Nous négligerons, pour plus de rapidité, la virgule des différences.

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
2	5,0000	− 34852	3352	1728	192
2,1	1,5148	− 31500	5080	1920	192
2,2	− 1,6352	− 26420	7000	2112	192
2,3	− 4,2772	− 19420	9112	2304	192
2,4	− 6,2192	− 10308	11416	2496	192
2,5	− 7,2500	1108	13912	2688	192
2,6	− 7,1392	15020	16600	2880	192
2,7	− 5,6372	31620	19480	3072	192
2,8	− 2,4752	51108	22552	3264	192
2,9	+ 2,6348	73652	24816	3456	
3	10,0000				

Il y a changement de signe, quand on passe de 2,1 à 2,2 et de 2,8 à 2,9. L'équation proposée a donc deux racines positives, l'une comprise entre 2,1 et 2,2, l'autre entre 2,8 et 2,9.

Rigoureusement, le tracé de la courbe ne permet pas d'affirmer qu'il n'y a pas de racines entre 0 et 1 ou entre 1 et 2. Pour lever cette difficulté, prenons l'équation dérivée

$$32x^3 - 120x^2 + 114x - 40 = 0.$$

Cette équation revient à

$$16x^3 - 60x^2 + 57x - 20 = 0.$$

Je fais disparaître le coefficient du premier terme en posant

$$y = 16x.$$

Il vient

$$y^3 - 60y^2 + 912y - 5120 = 0.$$

Pour faire disparaître le second terme, je pose

$$y = z + 20.$$

Il vient

$$z^3 - 288z - 2280 = 0.$$

Cette équation a une seule racine réelle positive, comme il est facile de s'en assurer en appliquant la règle connue (217). Donc, l'équation dérivée n'ayant qu'une racine réelle positive, l'équation proposée ne peut pas en admettre quatre (216), et elle n'a bien que les deux racines positives que nous avons déterminées à 0,1 près.

On peut remarquer que la racine positive de l'équation en z est comprise entre 20 et 21 ; donc, celle de l'équation en y est comprise entre 40 et 41, et celle de l'équation en x entre $\frac{40}{16}$ et $\frac{41}{16}$ ou entre les nombres entiers 2 et 3. Par suite, les deux racines positives de l'équation proposée devant comprendre la racine positive de l'équation dérivée et tomber entre deux entiers consécutifs, seront elles-mêmes comprises entre 2 et 3. La courbe nous avait indiqué ce résultat d'une manière douteuse, l'équation dérivée nous y conduit d'une manière certaine. Mais il est beaucoup plus rapide d'esquisser la courbe, que d'étudier l'équation dérivée.

255. L'exemple que nous venons de traiter suffit pour indiquer comment on peut appliquer la méthode des différences aux équations du quatrième degré.

Si l'on a à calculer les racines incommensurables d'une équation du cinquième degré (il est rare que les applications conduisent au delà), il faudra commencer par chercher les formules qui permettent de passer des différences Δ aux différences δ, en suivant la marche indiquée au n° 253. On n'aura plus ensuite qu'à former les tableaux des différences, en s'aidant de l'examen de la courbe qui représente la marche de la fonction et en consultant au besoin l'équation dérivée.

Application de la méthode des différences aux équations transcendantes.

256. On peut traiter les équations algébriques qui ne sont pas des fonctions entières et les équations transcendantes, comme les équations algébriques entières.

Lorsqu'on a substitué dans l'équation considérée des nombres équidistants, si deux substitutions donnent des résultats de signes contraires, il existe une racine entre les valeurs correspondantes de la variable. On insère dans l'intervalle trouvé des nombres variant par degrés plus rapprochés, de manière à obtenir la racine avec une plus grande approximation. Si le tableau des différences prouve alors que les différences d'un certain ordre peuvent être regardées comme nulles, on assimile (seulement dans l'intervalle déterminé) la fonction considérée à une fonction

algébrique, et l'on ramène la question à la résolution d'une équation algébrique.

C'est la marche qu'on suivra, lorsque les différences du troisième ordre ou celles du second ordre seront négligeables : on n'aura qu'à résoudre une équation du second ou du premier degré (244, 245).

Dans les autres cas, on *séparera* d'abord la racine à l'aide d'un petit nombre de substitutions convenablement choisies; puis, on pourra en approcher après autant qu'on voudra, en appliquant *la méthode de Newton*, comme nous l'indiquerons.

257. *Par un point* A *pris sur la circonférence d'un cercle, mener une corde* AB *qui détermine un segment* AmB *équivalent au quart de l'aire du cercle* (Euler).

Soit R le rayon du cercle, soit z l'arc correspondant à l'angle AOB dans le cercle de rayon 1. On aura

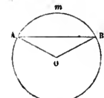
$$AmB = \frac{R^2 z}{2} - \frac{R^2 \sin z}{2} = \frac{\pi R^2}{4},$$

d'où

$$z - \sin z = \frac{\pi}{2}.$$

Pour simplifier, posons $z - \frac{\pi}{2} = x$, d'où $\sin z = \cos x$. Nous aurons à résoudre l'équation

Fig. 9.



$$x - \cos x = 0,$$

de sorte que le problème proposé revient à trouver un arc égal à son cosinus.

La fonction $x - \cos x$ est évidemment *croissante*, comme l'indique d'ailleurs la dérivée $1 + \sin x$. Quand x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, la fonction passe de la valeur -1 à la valeur $+\frac{\pi}{2}$. Donc l'équation donnée a *une racine réelle et une seule*, comprise entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$.

La Table (*voir à la fin du volume*) qui donne les arcs et leurs rapports trigonométriques exprimés en parties décimales du rayon pris pour unité, montre immédiatement que l'arc cherché est nécessairement compris entre 42° et 43°. On a, en effet,

$$\text{arc } 42° = 0{,}7330 \quad \text{et} \quad \cos 42° = 0{,}7431,$$
$$\text{arc } 43° = 0{,}7505 \quad \text{et} \quad \cos 43° = 0{,}7314.$$

C'est, par conséquent, dans cet intervalle que la fonction change de signe en passant par zéro.

Désignons par y la fonction $x - \cos x$, et cherchons les valeurs de la fonction pour les arcs 41°, 42°, 43°, 44°. Nous aurons :

$$\text{arc } 41° = 0{,}7156 \quad \text{et} \quad \cos 41° = 0{,}7547,$$
$$\text{arc } 44° = 0{,}7679 \quad \text{et} \quad \cos 44° = 0{,}7193.$$

On pourra alors former le tableau suivant :

x	y	Δ
41°	− 0,0391	0,0290
42°	− 0,0101	0,0292
43°	+ 0,0191	0,0295
44°	0,0486	

Les différences du premier ordre sont, d'après ce tableau, très-peu différentes; de sorte que, dans l'intervalle de 42° à 43°, on peut regarder la fonction y comme une fonction algébrique du premier degré et employer la formule d'interpolation

$$y = y_0 + z.\Delta y_0.$$

y_0 est la valeur de la fonction pour $x_0 = 42°$.

z désignant ce qu'il faut ajouter à 42° pour que y devienne nulle, on aura

$$0 = y_0 + z.\Delta y_0, \quad \text{d'où} \quad z = -\frac{y_0}{\Delta y_0} = 0,346.$$

L'unité étant ici le degré, z sera égal à

$$20'\,45'',6$$

et la valeur de x demandée sera

$$42°\,20'\,45'',6.$$

Cette valeur est exacte à moins de 1",6 par défaut, approximation très-grande, si l'on a égard à la rapidité des calculs qui nous y ont conduit.

Eu revenant au problème proposé, on a pour l'arc cherché

$$z = \frac{\pi}{2} + x = 132°\,20'\,45'',6;$$

et la corde qui sous-tendra ce dernier arc, retranchera du cercle (sauf l'erreur indiquée) un segment équivalent au quart de sa surface.

258. *Mener dans un cercle donné une corde qui le partage en deux segments, dont le plus grand soit une moyenne proportionnelle entre l'aire du cercle et l'autre segment* (Concours de l'École Polytechnique, 1859).

Fig. 10.

Cherchons l'arc qui correspond au plus petit segment.

Lorsqu'on divise une quantité quelconque en moyenne et extrême raison, la plus petite partie de cette quantité en est une fraction marquée par $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. En désignant le rayon du cercle par

R, on aura donc

$$\text{segment } AmB = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \pi R^2.$$

Désignons par x l'arc qui, dans le cercle de rayon 1, correspond à l'angle AOB. On aura

$$\text{segment } AmB = \frac{R^2 x}{2} - \frac{R^2 \sin x}{2}.$$

Par suite, l'équation du problème sera

$$\frac{R^2 x}{2} - \frac{R^2 \sin x}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \pi R^2$$

ou

$$x - \sin x = (3-\sqrt{5})\pi.$$

En effectuant le calcul indiqué dans le second membre, il viendra

$$x - \sin x - 2,3999632 = 0.$$

Pour $x = 90°$, le premier membre se réduit à $-1,8296669$; pour $x = 180°$, il devient $+0,7416294$. La racine cherchée tombera donc entre 90° et 180°, mais beaucoup plus près de 180°.

Il faudra donc partir de 180°, et faire varier d'abord x de 10° en 10° en remontant. Si l'on se sert de la table déjà indiquée (287), on trouvera les valeurs suivantes (y représente toujours la fonction) :

$$x = 170°, \quad y = 0.3935,$$
$$x = 160°, \quad y = 0.0505.$$
$$x = 150°, \quad y = -0.2820.$$

La racine demandée tombe donc entre $x = 160°$ et $x = 150°$, et est beaucoup plus près de 160°.

Nous allons donc faire varier x de degré en degré, toujours en remontant. Il vient

$$x = 159°, \quad y = 0,0167.$$
$$x = 158°, \quad y = -0,0170.$$

La racine cherchée tombe donc entre 158 et 159°, à peu près à égale distance de ces deux limites.

Nous sommes ainsi conduit à former le tableau suivant :

x	y	Δ	Δ^2
158°	− 0,0169494	0,0084123	0,0000071
158° 15′	− 0,0085371	0,0084194	0,0000071
158° 30′	− 0,0001177	0,0084265	0,0000069
158° 45′	+ 0,0083088	0,0084334	0,0000068
159°	0,0167422	0,0084402	
159° 15′	0,0251824		

Ce tableau prouve que la racine cherchée est comprise entre 158° 30′ et

158° 45′ et que, dans cet intervalle, on peut regarder la différence seconde comme constante, c'est-à-dire remplacer la fonction proposée par une fonction algébrique du second degré.

z étant ce qu'il faut ajouter à 158° 30′ pour avoir la racine demandée ou pour que y soit nulle, on aura (244)

$$0 = y_0 + z.\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2}\Delta^2 y_0.$$

y_0 est la valeur de la fonction pour $x_0 = 158°\,30'$. On déduit de la relation posée

$$z = -\frac{y_0}{\Delta y_0} - \frac{z(z-1)}{2}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0}.$$

La racine, d'après une remarque précédente, doit peu s'écarter de 158° 30′. On commencera donc par négliger le second terme du second membre, et l'on prendra d'abord

$$z = -\frac{y_0}{\Delta y_0} = \frac{0,0001177}{0,00084265} = 0,0139678.$$

Remplaçant alors z par cette valeur dans le second membre de l'équation complète, on a plus exactement

$$z = 0,0139734.$$

x variant dans le tableau formé de 15′ en 15′, cette valeur de z

$$\left(z = \frac{x - x_0}{h}\right)$$

équivaut à

$$0,0139734 \times 15' \quad \text{ou à} \quad 12'',576.$$

Par suite, l'arc demandé est égal à

$$158°\,30'\,12'',576,$$

valeur qu'il est facile de vérifier.

La dérivée de la fonction

$$x - \sin x - 2,3999632 \quad \text{est} \quad 1 - \cos x.$$

Cette dérivée étant toujours positive, quel que soit x, la fonction proposée est constamment croissante et n'admet pas d'autre racine que la racine trouvée.

259. Soit l'équation

$$x^x - 100 = 0 \quad \text{(Euler)}.$$

Il sera plus commode de la mettre d'abord sous la forme suivante, en prenant les logarithmes :

$$x\log x - \log 100 = 0,$$

c'est-à-dire

$$x\log x - 2 = 0.$$

La dérivée du premier membre est

$$\log x + \frac{x\log e}{x} = \log x + \log e.$$

x croissant de o à ∞, la fonction dérivée est constamment croissante. Elle n'admet donc qu'une seule racine $\frac{1}{e}$. Pour cette valeur et les valeurs plus petites, la fonction proposée est nécessairement négative. Puisqu'elle n'admet aucune racine réelle inférieure à l'unique racine réelle de l'équation dérivée, elle ne peut admettre, elle aussi, qu'une seule racine réelle (215) que nous allons chercher.

En désignant par y la fonction considérée, on a (en reprenant l'équation $x^x - 100 = 0$) :

$$\text{pour } x = 3, \quad y = -73,$$
$$\text{pour } x = 4, \quad y = +156.$$

La racine cherchée tombe donc entre 3 et 4. Substituons 3,5, l'équation étant ramenée à la forme $x \log x - 2 = 0$, il vient

$$y = -0{,}09576.$$

Ce résultat étant encore négatif, mais très-petit, la racine doit être plus grande que 3,5, mais très-proche de cette valeur. Substituons 3,6. On trouve

$$y = +0{,}00268900.$$

Ainsi, la racine tombe entre 3,5 et 3,6, beaucoup plus près de 3,6. Substituons 3,59. Il viendra

$$y = -0{,}0072269.$$

La racine tombe donc entre 3,59 et 3,60, et il sera facile en continuant de l'obtenir avec une plus grande approximation.

260. Soit l'équation

$$x - \operatorname{tang} x = 0.$$

Cette équation ne change pas, lorsqu'on y remplace x par $-x$; à chaque racine, correspond donc une autre racine égale et de signe contraire. On peut donc ne considérer que les racines positives.

Lorsque x est positif, il faut que $\operatorname{tang} x$ le soit aussi, pour que l'équation puisse être satisfaite. Les arcs x ont donc leurs extrémités dans les quadrants de rang impair, puisque la *tangente* n'est positive que dans ces quadrants (*voir* la *Trig.*, 9); et leurs valeurs sont comprises entre $n\pi$ et $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, n étant un nombre quelconque entier et positif.

Dans chacun des quadrants ainsi limités, l'arc et la tangente vont ensemble en croissant, l'arc de $n\pi$ à $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, la tangente de o à ∞; donc, *à chaque quadrant*, correspond une racine réelle et une seule.

L'équation proposée admet, par conséquent, *une infinité* de racines réelles.

La *première* racine (celle qui correspond au *premier* quadrant) est évidemment $x = 0$. A mesure que le rang du quadrant considéré s'éloigne, l'extrémité de l'arc x correspondant s'éloigne aussi de l'origine du quadrant. Soient, en effet, $n\pi + \alpha$ la $n^{ième}$ racine et $(n+p)\pi + \beta$ la $(n+p)^{ième}$

racine, α et β étant inférieurs à $\frac{\pi}{2}$. On aura, d'après l'équation donnée,

$$\tang(n\pi+\alpha) = n\pi+\alpha,$$
$$\tang[(n+p)\pi+\beta] = (n+p)\pi+\beta.$$

Mais

$$\tang(n\pi+\alpha) = \tang\alpha,$$
$$\tang[(n+p)\pi+\beta] = \tang\beta.$$

Or $(n+p)\pi+\beta$ l'emporte nécessairement sur $n\pi+\alpha$; donc on a

$$\tang\beta > \tang\alpha \quad \text{ou} \quad \beta > \alpha.$$

Enfin, si l'arc considéré est trop grand, la tangente correspondante l'emporte sur lui; s'il est trop petit, c'est l'inverse. Car la fonction commence toujours par être positive dans chaque quadrant, puisque la tangente part de la valeur zéro.

Proposons-nous maintenant de calculer la *seconde* racine, celle qui correspond *au second quadrant de rang impair*, c'est-à-dire *au troisième quadrant du cercle*.

La table placée à la fin du volume montre qu'on a

$$\text{arc } 257° = 4,4855, \quad \tang 257° = 4,3315,$$
$$\text{arc } 258° = 4,5030, \quad \tang 258° = 4,7046,$$

c'est-à-dire que la racine cherchée est comprise entre 257° et 258°.

Cela posé, nous allons faire croître x de 10′ en 10′. Il viendra

$$x = 257°, \quad y = 0,154021,$$
$$x = 257°\,10', \quad y = 0,098712,$$
$$x = 257°\,20', \quad y = 0,041898,$$
$$x = 257°\,30', \quad y = -0,016486.$$

L'arc cherché tombe donc entre 257° 20′ et 257° 30′, plus près de cette dernière valeur.

D'après le calcul effectué, on a

$$\text{arc } 257°\,20' = 4,491\ldots, \quad \text{arc } 257°\,30' = 4,494\ldots$$

On peut donc prendre pour valeur approchée de x à 0,01 près, $x = 4,49$; puis, achever le calcul par la méthode de Newton (263).

Méthode d'approximation de Newton.

261. Soit d'abord $F(x) = 0$ une équation algébrique entière. Désignons par a la valeur approchée d'une racine réelle, et par $a+h$ la valeur exacte de cette même racine. Nous aurons en même temps (113)

$$F(a+h) = 0$$

et

$$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + F''(a)\frac{h^2}{1.2} + \ldots + F^{(m)}(a)\frac{h^m}{1.2\ldots m} = 0.$$

On en déduit

$$(1) \qquad h = -\frac{F(a)}{F'(a)} - h^2\left[\frac{F''(a)}{2F'(a)} + \frac{F'''(a)}{2.3.F'(a)}h + \ldots\right].$$

Les termes de la parenthèse sont multipliés par h et par des puissances

supérieures de h, à partir du second; la parenthèse elle-même est multipliée par h^2. Si l'on néglige cette parenthèse, on aura donc, avec une approximation d'autant plus grande que h sera plus petit,

$$(2) \qquad h = -\frac{F(a)}{F'(a)},$$

et la valeur *approchée* de la racine deviendra

$$a - \frac{F(a)}{F'(a)}.$$

Si l'on désigne par a_1 cette nouvelle valeur, on pourra s'en servir pour trouver une seconde valeur plus approchée,

$$a_1 - \frac{F(a_1)}{F'(a_1)}.$$

Et, en répétant plusieurs fois la même opération, on obtiendra rapidement une très-grande approximation.

On peut se faire une idée de la manière dont les approximations obtenues croîtront, à l'aide de la remarque suivante.

Si l'on néglige les termes de la parenthèse qui, dans la formule (1), contiennent h, on pourra regarder l'erreur commise comme à peu près égale à

$$\frac{F''(a)}{2F'(a)} h^2.$$

Si $\frac{F''(a)}{2F'(a)}$ *est inférieur à l'unité,* l'erreur sera donc moindre que h^2, c'est-à-dire que *chaque application de la formule* (2) *doublera le nombre des chiffres décimaux exacts.* Si la racine est connue à 0,01 près, c'est-à-dire si h est moindre que 0,01, l'erreur commise en se servant une première fois de la formule (2) sera le plus souvent moindre que 0,0001, et si l'on s'en sert une seconde fois, on aura la racine à 0,00000001 près.

D'ailleurs, il sera facile dans chaque cas particulier de s'assurer, à chaque *correction*, de la véritable approximation qu'on aura atteinte.

La méthode de Newton est également applicable aux équations transcendantes.

En effet, on a dans ce cas (114)

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h} = F'(a) + \alpha;$$

α étant une quantité très-petite qui s'annulerait avec h. On en déduit, puisqu'on doit avoir $F(a+h) = 0$,

$$h = -\frac{F(a)}{F'(a) + \alpha},$$

et, approximativement,

$$h = -\frac{F(a)}{F'(a)}.$$

262. Reprenons l'équation

$$x^4 - 4x^3 + 1 = 0,$$

déjà considérée (251). Nous avons trouvé que l'une des racines positives

de cette équation avait o,25 pour valeur approchée à moins d'un centième. Si nous représentons cette racine par $0,25 + h$, h sera moindre que o,01, et l'on aura exactement

$$h = -\frac{F(x)}{F'(x)} - \frac{h^2}{2}\frac{F''(x)}{F'(x)} - \frac{h^3}{6}\frac{F'''(x)}{F'(x)}.$$

On a d'ailleurs

$$F'(x) = 3x^2 - 4, \quad F''(x) = 6x, \quad F'''(x) = 6.$$

Pour $x = 0,25$, le coefficient de h^2 est moindre que $\frac{1}{4}$ et celui de h^3 est moindre que $\frac{1}{3}$. Par suite, le second terme du second membre est moindre que o,000025 et le troisième terme est moindre que o,000003. On aura donc, à o,0001 près,

$$h = -\frac{F(x)}{F'(x)}.$$

D'après le tableau formé (251) et le calcul préparatoire effectué, on a pour $x = 0,25$

$$F(x) = 0,015625 \quad \text{et} \quad F'(x) = -3,8125.$$

Donc

$$h = \frac{0,015625}{3,8125} = 0,0041,$$

et la racine à o,0001 près sera o,2541.

Si nous représentons maintenant la racine par $0,2541 + h_1$, h_1 sera moindre que o,0001, et l'on aura exactement

$$h_1 = -\frac{F(x)}{F'(x)} - \frac{h_1^2}{2}\frac{F''(x)}{F'(x)} - \frac{h_1^3}{6}\frac{F'''(x)}{F'(x)}.$$

Pour $x = 0,2541$, le coefficient de h_1^2 est moindre que $\frac{1}{4}$ et celui de h_1^3 est moindre que $\frac{1}{3}$; par suite, le second terme du second membre est moindre que o,0000000025 et le troisième que o,000000000003. On aura donc, à o.0000001 près,

$$h_1 = -\frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{0,0000064264_{21}}{3,80629957} = 0,00000169;$$

et la racine cherchée sera, avec la même approximation,

$$0,25410169.$$

263. Pour l'équation transcendante $x - \text{tang}\, x = 0$, nous avons trouvé (260) que la seconde racine à o,01 près était $x = 4,49$.

Appliquons la méthode de Newton. On a ici

$$F'(x) = 1 - (1 + \text{tang}^2 x) = -\text{tang}^2 x.$$

Par suite, la première *correction* sera

$$h = -\frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{x - \text{tang}\, x}{\text{tang}^2 x}.$$



Pour convertir l'arc x en degrés, nous nous servirons des tables de réduction qui font partie de celles de Callet. Nous aurons

$$\begin{array}{rl}
x = & 4,49 \\
& 3,49065850 = 200^\circ \\
\hline
& 0,99934150 \\
& 0,99483768 = 57^\circ \\
\hline
& 0,00450382 \\
& 0,00436332 = 15' \\
\hline
& 0,00014050 \\
& 0,00013575 = 28'' \\
\hline
& 0,00000475 = 0'',98,
\end{array}$$

c'est-à-dire

$$x = 257^\circ\, 15'\, 28'', 98,$$

d'où

$$\log \operatorname{tang} x = 0,6456433$$

et

$$\operatorname{tang} x = 4,42225.$$

Il en résulte

$$x - \operatorname{tang} x = 0,06775.$$

On a ensuite

$$\begin{array}{rl}
\log(x - \operatorname{tang} x) = & \bar{2},8309093 \\
\log \operatorname{tang}^2 x = & 1,2912866 \\
\hline
\log h = & \bar{3},5396227 \\
h = & 0,0034.
\end{array}$$

La valeur de x était donnée à $0,01$ près : nous pourrons regarder h comme exact à $0,0001$ près.

Appliquons une seconde fois la méthode.

Nous aurons

$$\begin{array}{rl}
x = & 4,4934 \\
& 3,49065850 = 200^\circ \\
\hline
& 1,00274150 \\
& 0,99483768 = 57^\circ \\
\hline
& 0,00790382 \\
& 0,00785398 = 27' \\
\hline
& 0,00004986 \\
& 0,00004848 = 10'' \\
\hline
& 0,00000138 = 0'',28,
\end{array}$$

c'est-à-dire

$$x = 257^\circ\, 27'\, 10'', 28,$$

d'où

$$\log \operatorname{tang} x = 0,6525566$$

et

$$\operatorname{tang} x = 4,493208.$$

Il en résulte

$$x - \operatorname{tang} x = 0,000192.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} \log(x - \operatorname{tang} x) &= \bar{4}, 2833012 \\ \log \operatorname{tang}^2 x &= 1, 3051132 \\ \hline \log h_1 &= \bar{6}, 9781880 \\ h_1 &= 0, 00000951. \end{aligned}$$

La nouvelle valeur de x était exacte à 0,0001 près : nous pourrons regarder h_1 comme exact à 0,00000001 près, et prendre

$$x = 4, 49340951;$$

ce qui revient à

$$x = 257^\circ 27' 12'', 24.$$

Cette valeur est exacte à 0",01 près par défaut, comme il est facile de s'en assurer.

Interprétation géométrique de la méthode de Newton (*).

264. La recherche des racines réelles de l'équation $F(x) = 0$ revient à la détermination des points où la courbe qui a pour équation $y = F(x)$ coupe l'axe des x.

Soit a une valeur approchée de l'une des racines de l'équation $F(x) = 0$; pour cette valeur a substituée à la place de x, on aura $y = F(a)$. L'équation de la tangente à la courbe $y = F(x)$, au point dont les coordonnées sont $x = a$ et $y = F(a)$, est

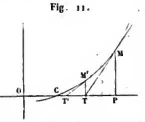
$$y - F(a) = F'(a)(x - a).$$

Le point où cette tangente coupe l'axe des x a pour abscisse la valeur

$$x = a - \frac{F(a)}{F'(a)};$$

et cette valeur est précisément celle que fournit une première application de la méthode de Newton. Ainsi, OP représentant la valeur approchée a de la racine cherché OC, si l'on mène au point M de la courbe, qui correspond à l'abscisse OP, une tangente MT, le point T sera, *en général*, beaucoup plus près du point C que le point P, c'est-à-dire que OT sera une valeur plus approchée de la racine OC que OP $= a$. En remplaçant alors OP par OT et en menant par le point M' de la courbe, qui a pour abscisse OT, une nouvelle tangente, on obtiendra une valeur OT' encore plus approchée, et ainsi de suite.

Fig. 11.



Cette interprétation montre en même temps qu'il faut, pour que la méthode soit applicable, que le point T soit en réalité plus près du point C que le point P.

(*) Ce paragraphe suppose des Notions de Géométrie analytique (*Voir* t. III).

C'est ce qui pourrait ne pas arriver si la valeur approchée $x = a$ correspondait, par exemple, sur la courbe, à un point voisin d'un point *maximum*. Dans ce cas, la valeur absolue de $F'(a)$ pourrait être très-petite et le terme de correction $-\frac{F(a)}{F'(a)}$ extrêmement grand, c'est-à-dire complétement illusoire.

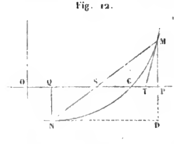
Ainsi, a et b étant les deux nombres qui, comprenant la racine, ont servi à la séparer, il faut, pour le succès certain de la méthode, qu'il n'y ait entre les points de la courbe qui correspondent aux abscisses $x = a$, $x = b$, aucun point *maximum* ou *minimum*, non plus qu'aucun point d'inflexion (*); en d'autres termes, il faut qu'il n'y ait entre a et b aucune racine des équations

$$F'(x) = 0, \quad F''(x) = 0.$$

265. L'interprétation géométrique de la méthode de Newton permet de procéder souvent avec plus de sécurité, en conduisant à une interprétation analogue de la méthode d'interpolation bornée à l'emploi des parties proportionnelles (**244**).

Soient, en effet, OQ et OP les deux abscisses x_0 et $x_0 + h$ qui comprennent la racine $OC = x$. Menons la corde MN qui joint sur la courbe les points correspondants à ces abscisses. Cette corde coupera l'axe des abscisses au point S, tandis que la tangente MT la coupera au point T. Le point C tombera nécessairement entre les points S et T (si l'arc de courbe ne présente aucune inflexion entre les points M et N) : la racine cherchée sera donc comprise entre les valeurs OS et OT, et l'erreur commise en la remplaçant par l'une d'elles sera moindre que leur différence.

Fig. 12.



Ceci posé, menons par le point N la parallèle ND à l'axe des x, jusqu'à la rencontre de MP. Les triangles semblables NQS, NMD, donneront

$$\frac{QS}{ND} = \frac{NQ}{MD}.$$

ND représente l'intervalle h des substitutions; NQ représente $-y_0$ (ou l'ordonnée qui correspond à x_0 prise en signe contraire, c'est-à-dire

(*) Un point d'inflexion est, comme on le sait, caracterise par le changement de courbure de la courbe (l'arc devenant concave après avoir été convexe, ou réciproquement). Il en résulte qu'en un point d'inflexion, $F'(x)$ chauge d'allure, c'est-à-dire diminue après avoir augmenté jusqu'à ce point, ou augmente après avoir diminué. $F''(x)$ passe donc alors du positif au négatif ou du négatif au positif (145) : ce qui montre que les abscisses des points d'inflexion sont données par $F''(x) = 0$, comme celles des points maximums ou minimums par $F'(x) = 0$.

en valeur absolue), et MD la différence $y_1 - y_0$ ou Δy_0. On a donc

$$\frac{OS}{h} = -\frac{y_0}{\Delta y_0}.$$

$\frac{OS}{h}$ est donc précisément ce que nous avons désigné précédemment par z (244, 257), et

$$OS = x_0 + zh$$

est la valeur approchée fournie par la méthode des parties proportionnelles.

OT et OS donnant ainsi deux valeurs approchées de la racine OC, l'une par excès, l'autre par défaut, si l'on prend leur moyenne $\frac{OT + OS}{2}$ pour valeur de la racine, l'erreur sera moindre que la demi-différence

$$\frac{OT - OS}{2}.$$

En effet, désignons par x la valeur exacte de la racine, par e l'erreur de OT, par e' l'erreur de OS. On aura

$$x = OT - e, \quad x = OS + e',$$

d'où

$$\frac{OT + OS}{2} = x + \frac{e - e'}{2} \quad \text{et} \quad \frac{OT - OS}{2} = \frac{e + e'}{2};$$

ce qui démontre la remarque énoncée, d'ailleurs évidente.

266. Comme application, reprenons l'exemple du n° 259.

Nous avons trouvé que l'équation

$$x^x - 100 = 0 \quad \text{ou} \quad x\log x - 2 = 0$$

avait pour racine $x = 3,59$ à 0,01 près.

Appliquons la méthode de Newton; nous aurons pour correction

$$-\frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{2 - x\log x}{\log x + \log e} = \frac{0,0072269}{0,9893889} = 0,0073,$$

ou, pour valeur approchée de la racine,

$$x = 3,5973.$$

Appliquons la méthode des parties proportionnelles; nous aurons

$$z = -\frac{y_0}{\Delta y_0} = \frac{0,0072269}{0,0099159} = 0,72.$$

L'intervalle considéré étant 0,01, la correction sera 0,0072. On aura donc, pour valeur approchée de la racine,

$$x = 3,5972.$$

Prenons la moyenne des deux valeurs obtenues; nous aurons

$$x = 3,59725,$$

valour exacte à moins de o,00005. On pourra donc prendre

$$x = 3,5972,$$

et tous les chiffres conservés seront exacts.

Euler trouve

$$x = 3,597285.$$

CHAPITRE IV.

MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

267. La méthode la plus simple qu'on puisse appliquer à la résolution des équations numériques est la méthode connue sous le nom de *méthode des approximations successives par substitution*. Et dans certains cas, c'est la seule méthode qu'on puisse réellement employer.

D'une manière générale, elle consiste à mettre l'équation proposée sous la forme particulière

$$x = f(x),$$

c'est-à-dire à isoler l'inconnue dans le premier membre, sans se préoccuper de laisser cette même inconnue engagée dans certains termes du second membre. En négligeant alors ces mêmes termes, on obtient pour x une première valeur approchée. En substituant cette valeur dans le second membre de la relation

$$x = f(x),$$

sans négliger cette fois aucun de ses termes, on obtient une seconde valeur plus approchée, qu'on substitue à son tour. Et l'on continue, jusqu'à ce qu'on parvienne au degré d'approximation voulu.

Il arrivera souvent que les valeurs ainsi obtenues convergeront très-rapidement vers la valeur exacte de la racine.

Soit a une quelconque des valeurs approchées (à partir de la seconde) et $a+h$ la valeur exacte de la racine. Nous aurons

$$a + h = f(a + h).$$

Mais (114)

$$f(a+h) - f(a) = h[f'(a) + \alpha].$$

Par suite,

$$(a + h) - f(a) = h[f'(a) + \alpha].$$

L'erreur commise en prenant $f(a)$ pour racine est donc, à très-peu près, égale à $h.f'(a)$; ce qui montre que la méthode n'est applicable qu'autant que $f'(a)$ est moindre que 1. Lorsque la méthode peut être employée, les chiffres communs à deux valeurs approchées consécutives appartiennent à la valeur exacte.

Application aux équations du second degré.

268. Dans le cas où le coefficient a de l'équation générale

$$ax^2 + bx + c = 0$$

est très-petit, la formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

n'est pas propre aux calculs numériques. En effet, après avoir obtenu approximativement la valeur du numérateur, il faut la diviser par $2a$; on divisera donc en même temps l'erreur commise par une quantité très-petite, c'est-à-dire qu'on l'augmentera dans une très-grande proportion. La difficulté est immédiatement levée par la méthode des approximations successives.

Cherchons d'abord la racine qui diffère peu de $-\frac{c}{b}$; on obtiendra ensuite la seconde racine immédiatement, puisque la somme des deux racines est connue et égale à $-\frac{b}{a}$.

Mettons l'équation donnée sous la forme

$$(1) \qquad x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}.$$

On a ici (267)

$$f(x) = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b},$$

d'où

$$f'(x) = -\frac{2ax}{b}.$$

a étant très-petit par hypothèse, $f'(x)$ sera inférieur à l'unité, et l'on peut appliquer la méthode.

La première valeur approchée est

$$x = -\frac{c}{b}.$$

La seconde valeur approchée s'obtiendra en substituant $-\frac{c}{b}$ à la place de x^2 dans le second membre de l'équation (1). Il viendra

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}.$$

Cette valeur sera, en général, suffisamment approchée au point de vue pratique. On pourra d'ailleurs obtenir une troisième valeur plus approchée encore, en substituant $-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}$ à la place de x, dans le second membre de l'équation (1). Il viendra

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}\right)^2 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{a^3c^4}{b^7}.$$

On doit d'ailleurs s'arrêter au troisième terme du second membre $-\frac{2a^2c^3}{b^5}$, et prendre pour formules d'approximation successives :

$$x=-\frac{c}{b},\quad x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3},\quad x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5},$$
$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5}-\frac{5a^3c^4}{b^7},\ldots.$$

On voit que chaque valeur se déduit de la précédente par l'addition d'un terme de correction, et que les erreurs qui subsistent après cette addition sont toujours *très-petites par rapport au terme ajouté*; ce qui, dans toute question d'approximation, est une condition essentielle. Ainsi, quand on prend $x=-\frac{c}{b}$, l'erreur commise contenant a comme facteur, est très-petite par rapport à $-\frac{c}{b}$. Quand on prend $x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}$, l'erreur commise contenant a^2 comme facteur, est très-petite par rapport à $-\frac{ac^2}{b^3}$; etc. D'après cela, en s'arrêtant à un certain terme, on saura toujours si la valeur adoptée est approchée par excès ou par défaut : il suffira de consulter le signe du premier terme de correction négligé.

269. Reprenons *le problème du puits* (*Alg. élém.*, 198). Nous avons trouvé pour équation

$$\frac{x^2}{u^2}-2\left(\frac{T}{v}+\frac{1}{g}\right)x+T^2=0.$$

Le coefficient $\frac{1}{v^2}$ de x^2 est égal à $\frac{1}{340^2}$. Nous pouvons donc appliquer la formule

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3},$$

puisque c'est la plus petite racine qui répond seule au problème.

Si l'on suppose $T=10''$, par exemple, on aura

$$a=\frac{1}{340^2},\quad b=-2\left(\frac{10}{340}+\frac{1}{g}\right),\quad c=100.$$

En adoptant pour g la valeur $9,80944$ et en effectuant les calculs, on trouve

$$b=-0,26278.$$

On a alors

$$\log\left(-\frac{c}{b}\right)=\log\frac{100}{0,26278}=2.5804077,$$

d'où, pour première valeur approchée,

$$x=-\frac{c}{b}=380^{\mathrm{M}},55.$$

Calculons la correction $-\frac{ac^2}{b^3}$. Nous aurons

$$\log\left(-\frac{ac^2}{b^3}\right)=\log\frac{100^2}{340^2.0,26278^3}=0,6782653.$$

On en déduit

$$-\frac{ac^2}{b^3} = 4^{\text{M}},76$$

et, par conséquent, on obtient pour seconde valeur approchée

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} = 385^{\text{M}},31.$$

Comme il est facile de s'en assurer, cette valeur est exacte à moins de 1 mètre, approximation bien suffisante au point de vue pratique (eu égard à la question posée).

270. *Remarque.* — Lorsque c est très-petit dans l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

sans que a et b remplissent la même condition, le produit $\frac{c}{a}$ des racines est très-petit, sans que leur somme $-\frac{b}{a}$ le soit. Une des racines est donc très-petite, et l'on peut, pour la calculer, employer encore les formules précédentes. En effet, on peut toujours écrire

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b},$$

et le terme $-\frac{ax^2}{b}$ est très-petit par rapport à x, puisqu'il contient x au carré. La première valeur approchée est donc $x = -\frac{c}{b}$, la seconde sera

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}, \text{ etc.}$$

271. Si l'on voulait appliquer la méthode de Newton à l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

en partant de la première valeur approchée $-\frac{c}{b}$, on aurait pour la première correction h

$$h = -\frac{\text{F}\left(-\frac{c}{b}\right)}{\text{F}'\left(-\frac{c}{b}\right)} = -\frac{\frac{ac^2}{b^2} - c + c}{-\frac{2ac}{b} + b};$$

et si l'on néglige devant b au dénominateur le terme très-petit $-\frac{2ac}{b}$, on trouve $h = -\frac{ac^2}{b^3}$.

Équations de degré supérieur.

272. On peut se servir des considérations qui précèdent pour résoudre l'équation du troisième degré $ax^3 + bx + c = 0$, quand le coefficient a est très-petit. Nous ne nous y arrêterons pas. L'exemple suivant suffira pour montrer la marche à suivre dans le cas des équations algébriques de degré quelconque, lorsqu'elles se prêtent à l'application de la méthode.

Quand on cherche le diamètre qu'on doit donner à un tuyau de distribution d'eau pour que *la dépense* (volume d'eau fourni par seconde) et *la charge par mètre courant* (c'est-à-dire le quotient de la hauteur d'eau nécessaire pour produire l'écoulement malgré la résistance du tuyau, par la longueur du tuyau) aient des valeurs déterminées, on est conduit à une équation de la forme

$$D^6 - \frac{0,000507}{0,154213}\frac{Q^2}{J}D - \frac{0,00001294}{0,154213}\frac{Q^2}{J} = 0.$$

D est le diamètre cherché, Q la dépense et J la charge imposées; les nombres qui entrent dans l'équation ont été déduits de l'expérience.

Supposons qu'on donne

$$Q = 0^{\text{Mc}},006283 \text{ et } J = 0^{\text{M}},01649.$$

L'équation proposée n'a qu'une seule racine positive (199) : c'est cette racine que nous cherchons.

A cause de la petitesse du coefficient 0,00001294, on commencera par négliger le terme constant de l'équation. Il vient alors, en divisant par D,

$$D^5 = \frac{0,000507}{0,154213}\frac{Q^2}{J}.$$

Première valeur approchée de D.

$$\begin{array}{rll} \log 0,000507 = & \bar{4},7050080 & \\ \log Q^2 = & \bar{5},5963342 & \log 0,006283 = \bar{3},7981671 \\ \text{L}\,0,154213 = & 0,8118875 & \log 0,154213 = \bar{1},1881198 \\ \text{L}\,J = & \underline{1,7827793} & \log 0,01649 = \bar{2},2172207 \\ \log D^5 = & \bar{6},8960090 & \\ \log D = & \bar{2},9792018 & \end{array}$$

Pour calculer la seconde valeur approchée de D, il faudra calculer le terme constant de l'équation et le terme qui contient D à la première puissance (ce qu'on fera très-simplement en ajoutant le logarithme de la première valeur de D au logarithme de D^5 qui a servi à l'obtenir, et qui représente le logarithme de $\left.\frac{0,000507}{0,154213}\frac{Q^2}{J}\right)$.

Seconde valeur approchée de D.

$$\begin{array}{rll} \log \frac{0,000507}{0,154213}\frac{Q^2}{J} = & \bar{6},8960090 & \\ \log D = & \underline{\bar{2},9792018} & \\ & \bar{7},8752108 & 0,000000750243 \\ \log 0,00001294 = & \bar{5},1119343 & \\ \log Q^2 = & \bar{5},5963342 & \\ \text{L}\,0,154213 = & 0,8118875 & \\ \text{L}\,J = & \underline{1,7827793} & \\ & \bar{7},3029353 & \underline{0,000000200879} \\ & D^6 = & 0,000000951122 \\ & \log D^6 = & \bar{7},9782362 \\ & \log D = & \bar{2},9963727 \end{array}$$

On opérera d'une manière analogue pour trouver la troisième valeur approchée de D, en se servant des résultats déjà obtenus.

Troisième valeur approchée de D.

$$\log \frac{0,000507}{0,154213}\frac{Q^2}{J} = \bar{6},8960090$$

$$\log D = \bar{2},9963727$$

$$\bar{7},8923817 \quad 0,000000780516$$

$$(\text{Terme constant})\ 0,000000200879$$

$$D^6 = 0,000000981395$$

$$\log D^6 = \bar{7},9918438$$

$$\log D = \bar{2},9986406$$

Au point de vue pratique, on peut s'arrêter, car les logarithmes des deux dernières valeurs de D ne diffèrent pas de 0,003. Ces deux dernières valeurs sont, d'après les logarithmes obtenus,

$$0,099168 \quad \text{et} \quad 0,099687.$$

On adoptera donc pour le diamètre du tuyau la valeur $0^M,099$ ou mieux la valeur $0^M,100$.

Pour la valeur $D = 0,099$, le premier membre de l'équation se réduit à $-0,000000038588$; pour la valeur $D = 0,100$, il se réduit à $+0,000000012059$. La racine demandée tombe donc entre 0,099 et 0,100, et plus près de ce dernier nombre.

273. ***A l'aide d'une annuité a = 11986 francs, on a pu éteindre une dette de 200000 francs en 50 ans : on demande le taux de l'intérêt.***

On a dans ce cas (*Alg. élém.*, **274**)

$$(1) \qquad r = \frac{a}{A} - \frac{a}{A(1+r)^n};$$

et, à cause de la petitesse du second terme du second membre, on peut employer la méthode des approximations successives. La première valeur de r sera donc $r = \frac{a}{A}$.

Première valeur approchée de r.

$$\log a = 4,07868$$

$$\log A = 5,30103$$

$$\log r = \bar{2},77765$$

$$r = 0,059931$$

Cette valeur est approchée par excès.

Seconde valeur approchée de r.

$$\log a = 4{,}07868 \qquad \frac{a}{A} = 0{,}059931$$

$$\bar{L}\,A = \bar{6}{,}69897$$

$$\bar{L}(1+r)^{50} = \bar{2}{,}73612 \qquad \log(1+r) = 0{,}02527760$$

$$\log\frac{a}{A(1+r)^n} = \bar{3}{,}51377 \qquad \frac{a}{A(1+r)^n} = 0{,}003264$$

$$r = 0{,}056667$$

Cette seconde valeur est encore approchée par excès, puisque la valeur de r substituée dans le second terme du second membre de l'équation (1) était elle-même approchée par excès.

Troisième valeur approchée de r.

$$\log a = 4{,}07868 \qquad \frac{a}{A} = 0{,}059931$$

$$\bar{L}\,A = \bar{6}{,}69897$$

$$\bar{L}(1+r)^{50} = \bar{2}{,}80309 \qquad \log(1+r) = 0{,}02393815$$

$$\log\frac{a}{A(1+r)^n} = \bar{3}{,}58074 \qquad \frac{a}{A(1+r)^n} = 0{,}003808$$

$$r = 0{,}056123$$

Cette dernière valeur est encore approchée par excès. On est conduit à prendre $r = 0{,}056$, en conservant les chiffres communs aux deux dernières valeurs. Le second membre de l'équation (1) devient alors 0,056 comme le premier.

$$\log a = 4{,}07868 \qquad \frac{a}{A} = 0{,}059931$$

$$\bar{L}\,A = \bar{6}{,}69897$$

$$\bar{L}(1+r)^n = \bar{2}{,}81680$$

$$\log\frac{a}{A(1+r)^n} = \bar{3}{,}59445 \qquad \frac{a}{A(1+r)^n} = 0{,}003931$$

$$0{,}056000$$

Équations transcendantes.

274. Reprenons, pour terminer, l'équation

$$(1) \qquad x - \operatorname{tang} x = 0,$$

déjà considérée au n° 260.

Nous avons vu que cette équation avait une infinité de racines réelles, et nous avons déterminé la plus petite des racines positives (zéro excepté). Cherchons une formule qui permette d'obtenir facilement une racine de rang quelconque.

Nous avons remarqué que l'extrémité de chaque arc racine tombait dans un quadrant de rang impair, de sorte que la $(n+1)^{\text{ième}}$ racine était moindre que $(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

En désignant par z la distance de l'extrémité de la racine cherchée à

l'extrémité du quadrant correspondant, on peut donc écrire

(2) $$(2n+1)\frac{\pi}{2} = x + \alpha.$$

On en déduit

$$\tang x = \tang\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \cot\alpha = \frac{1}{\tang\alpha}.$$

Mais l'équation (1) donne $\tang x = x$. Par suite,

$$x = \frac{1}{\tang\alpha} \quad \text{ou} \quad \tang\alpha = \frac{1}{x}.$$

Revenant à l'équation (2), on aura donc

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} = x + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}.$$

On peut développer en série $\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}$ d'après une formule connue (168). Il viendra donc

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \ldots;$$

et si l'on désigne par a la quantité constante $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, on pourra isoler x dans un membre et poser

(3) $$x = a - \frac{1}{x} + \frac{1}{3.x^3} - \frac{1}{5.x^5} + \frac{1}{7.x^7} - \ldots.$$

Cette équation se prête immédiatement au calcul par approximations successives.

La première valeur approchée de x sera $x = a$, la seconde $x = a - \frac{1}{a}$.

La troisième s'obtiendra en remplaçant x par $a - \frac{1}{a}$ dans le second et le troisième terme du second membre de l'équation (3), et en négligeant tous les autres termes; cette troisième valeur sera donc

$$x = a - \frac{1}{a - \frac{1}{a}} + \frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a}\right)^3}.$$

Si l'on effectue les divisions, en négligeant tous les termes qui renferment a^5, il viendra

$$x = a - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3}\right) + \frac{1}{3a^3} = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}.$$

Pour avoir une quatrième valeur approchée de x, on substituera la valeur précédente dans le second membre de l'équation (3). On négligera tous les termes du second membre qui contiennent x^7, et l'on effectuera les divisions indiquées dans les autres termes, en négligeant aussi tous

40.

les termes des différents quotients obtenus, qui renferment a^3. Il viendra

$$\begin{aligned} x &= a - \frac{1}{a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}} + \frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}\right)^3} - \frac{1}{5\left(a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}\right)^5} \\ &= a - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} + \frac{5}{3a^5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^3} + \frac{3}{a^5}\right) - \frac{1}{5a^5} \\ &= a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3} - \frac{13}{15a^5}. \end{aligned}$$

On pourra calculer de même le cinquième, le sixième terme de la série, etc.

Pour avoir alors les différentes racines, à partir de la seconde, il suffira de remplacer a par sa valeur $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ et de substituer les nombres 1, 2, 3, etc., à la place de n.

275. *En résumé*, pour résoudre une équation numérique, on commencera par séparer les racines, en procédant par substitutions régulièrement espacées.

La racine cherchée étant ainsi obtenue à 0,1 ou à 0,01 près, on en approchera davantage par interpolation ou en appliquant la méthode de Newton.

Quand la forme de l'équation le permettra, il sera souvent avantageux d'employer directement et isolément la méthode des approximations successives.

Dans tous les cas, le degré d'approximation atteint, devra être soigneusement vérifié.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1° Résoudre l'équation

$$70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1 = 0.$$

($x_1 = 0{,}069432$, $x_2 = 0{,}330009$, $x_3 = 0{,}669991$, $x_4 = 0{,}930568$.)

2° Résoudre l'équation

$$(4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x = 0.$$

(Cette équation a une infinité de racines réelles, la plus petite racine positive est 0, la seconde est 2,563434.)

3° Partager un demi-cercle en deux parties équivalentes, par une corde menée de l'extrémité du diamètre qui lui sert de base.

4° Partager l'aire d'un cercle en trois parties équivalentes, par deux cordes menées d'un même point de sa circonférence.

5° Résoudre l'équation $x \sin \frac{1}{2} x = 1$.

($x = 1{,}481682$.)

6° Résoudre l'équation $x^x = e^{\frac{3\pi}{2}}$.

($x = 3{,}644174$.)

7° Résoudre l'équation $x - e \sin x = m$.

($e = 0,24531615$, $m = 329° 44' 27'',66$.

On doit trouver $x = 320° 52' 15'',52$).

8° Résoudre l'équation $e^{2x} = \frac{x+1}{x-1}$.

($x = 1,19967867$.)

9° Déterminer la plus petite valeur qu'on puisse donner à a, pour que l'équation

$$e^x + e^{-x} - ax = 0$$

soit possible.

($a = 3,01776$.)

10° Trouver le nombre des racines réelles qu'admet l'équation

$$x = A \sin x + B,$$

pour chaque système de valeurs des coefficients A et B, et effectuer la séparation de toutes ces racines. Application à l'équation

$$x = 3142 \sin x + 157 \text{ (*)}.$$

(Concours de l'École Polytechnique, 1857.)

(*) On pourra consulter sur cette dernière question un article publié par M. Ch. Bourgeois, dans le tome XIX des *Nouvelles Annales*, p. 130.

NOTES.

NOTE I.

EXPRESSION DU COTÉ DU PENTÉDÉCAGONE RÉGULIER.

Cherchons l'expression du côté du polygone régulier de quinze côtés, inscrit dans le cercle dont le rayon est l'unité.

L'arc sous-tendu par le côté du pentédécagone régulier est la différence des arcs sous-tendus par les côtés de l'hexagone et du décagone réguliers (*Géom.*, 129), et l'on a

$$\frac{2\pi}{15} = \frac{2\pi}{6} - \frac{2\pi}{10} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}.$$

Si x représente le côté cherché, on pourra donc écrire (*Trig.*, 4)

$$x = 2\sin\frac{\pi}{15} = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{10}\right).$$

Mais on a trouvé (*Trig.*, 7)

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},\quad \cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Il viendra, par suite,

$$x = \frac{1}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(-1+\sqrt{5})\right].$$

NOTE II.

TRISECTION DE L'ANGLE.

Nous avons trouvé (*Trig.*, 23)

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

Cette relation, qui exprime la liaison qui existe entre le cosinus de l'arc simple et celui de l'arc triple, peut s'écrire, en remplaçant a par $\frac{1}{3}a$,

$$\cos a = 4\cos^3\frac{1}{3}a - 3\cos\frac{1}{3}a.$$

Si l'on donne $\cos a = b$ et si l'on demande $\cos \frac{1}{3} a = x$, la question sera ramenée à la résolution de l'équation

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{b}{4} = 0.$$

Cette équation a ses trois racines réelles (*Complément d'Alg.*, 217), la condition $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$ revenant ici à

$$\left(\frac{-3}{12}\right)^3 + \left(\frac{-b}{8}\right)^2 < 0 \quad \text{ou à} \quad b^2 < 1.$$

On peut obtenir ces trois racines comme il suit. Tous les arcs qui ont un cosinus donné sont compris dans la formule (*Trig.*, 8)

$$2K\pi \pm \alpha,$$

α étant l'arc qui, dans les deux premiers quadrants, a pour cosinus la valeur proposée. Les valeurs de x seront donc toutes les valeurs différentes renfermées dans l'expression

$$\cos\left(\frac{2K\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right),$$

K représentant un entier quelconque, positif ou négatif. Mais n étant aussi un entier quelconque, K ne peut affecter que les trois formes

$$3n, \quad 3n+1, \quad 3n+2.$$

On aura donc pour racines :

$$\cos\left(2n\pi \pm \frac{\alpha}{3}\right) = \cos \pm \frac{\alpha}{3} = \cos \frac{\alpha}{3},$$

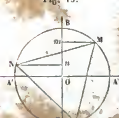
$$\cos\left(2n\pi + \frac{2\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right),$$

$$\cos\left(2n\pi + \frac{4\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} \mp \frac{\alpha}{3}\right).$$

Les six valeurs obtenues, deux à deux égales, se réduisent ainsi aux trois suivantes :

$$\cos \frac{\alpha}{3}, \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right), \quad \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right).$$

Fig. 13.



D'après cela, prenons $AM = \frac{\alpha}{3}$ et formons le triangle *équilatéral* MNP. On aura

$$AN = \frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}, \quad AP = \frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}.$$

Les perpendiculaires Mm, Nn, Pp, abaissées des sommets du triangle équilatéral sur le

diamètre BB′ perpendiculaire à AA′, représenteront, prises avec les signes convenables, les raciues de l'équation

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{b}{4} = 0.$$

Comme la somme de ces racines est nécessairement nulle (*Complément d'Alg.*, 182), on en déduit ce théorème de géométrie : *Si des trois sommets d'un triangle équilatéral, on abaisse des perpendiculaires sur un diamètre quelconque du cercle circonscrit, la somme des deux perpendiculaires situées d'un même côté de ce diamètre sera égale à la troisième perpendiculaire située de l'autre côté.*

On voit sur la figure qu'il y aura deux racines positives et une négative si $\frac{\alpha}{3}$ est $> \frac{\pi}{6}$ ou $\alpha > \frac{\pi}{2}$, et deux racines négatives et une positive si $\frac{\alpha}{3}$ est $< \frac{\pi}{6}$ ou $\alpha < \frac{\pi}{2}$: ce qui concorde avec le signe que prend alors le terme constant de l'équation (*Complément d'Alg.*, 182).

Les valeurs *absolues* des racines de même signe sont l'une plus petite, l'autre plus grande que $\frac{1}{2}$. En effet, Mm et Pp représentent les sinus de deux arcs dont la somme est $\frac{\pi}{3}$. L'un de ces arcs étant plus grand que $\frac{\pi}{6}$, l'autre sera plus petit. Par conséquent, si Mm surpasse $\sin\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{1}{2}$, Pp tombera au-dessous. La troisième racine Nn, étant en valeur absolue égale à la somme des deux autres, sera plus grande que $\frac{1}{2}$.

D'après cela, b désignant le cosinus d'un arc *donné* A, on saura immédiatement quelle est la racine qui représente $\cos\frac{A}{3}$.

En suivant une marche analogue à celle qu'on vient d'indiquer, *étant donné* $\sin a$, *on pourra trouver* $\sin\frac{1}{3}a$. La formule

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

devient, lorsqu'on remplace a par $\frac{1}{3}a$,

$$\sin a = 3\sin\frac{1}{3}a - 4\sin^3\frac{1}{3}a;$$

d'où, en posant $\sin a = b$ et $\sin\frac{1}{3}a = x$,

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{b}{4} = 0,$$

équation qui ne diffère de la précédente que par le signe de b, et qu'on traitera de la même manière.

La question examinée fournit une méthode pour la résolution *du cas irréductible de l'équation du troisième degré* (*Complément d'Alg.*, 219).

Toute équation du troisième degré peut se ramener à la forme

(1) $$z^3 + pz + q = 0.$$

Les coefficients p et q sont supposés réels.

Nous venons de voir que l'équation

(2) $$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{\cos\alpha}{4} = 0$$

avait pour racines

$$\cos\frac{\alpha}{3},\quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),\quad \cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right).$$

Si l'on arrive à pouvoir *identifier* les deux équations considérées, le problème sera résolu.

Je pose $z = \rho x$. L'équation (1) peut alors s'écrire

$$x^3 + \frac{p}{\rho^2}x + \frac{q}{\rho^3} = 0.$$

Il y aura donc coïncidence si l'on détermine ρ d'une part, l'arc α de l'autre, de manière à avoir

$$\frac{p}{\rho^2} = -\frac{3}{4},\quad \frac{q}{\rho^3} = -\frac{\cos\alpha}{4},$$

c'est-à-dire

$$\rho = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\quad\text{et}\quad \cos\alpha = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Pour que ces valeurs soient admissibles, il faut que p soit *négatif*, et que la valeur de $\cos\alpha$ ou de $\cos^2\alpha$ tombe au-dessous de 1, ce qui fournit la condition

$$\left(-\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2 \quad\text{ou}\quad \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

Cette condition ne peut d'ailleurs être satisfaite que si p est < 0. Si elle est remplie, les équations (1) et (2) se confondent, et la relation $z = \rho x$ conduit aux trois valeurs

$$2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3},\quad 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(120^\circ+\frac{\alpha}{3}\right),\quad 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(240^\circ+\frac{\alpha}{3}\right)$$

déjà trouvées (*Complément d'Alg.*, 219).

NOTE III.

DES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES.

On appelle *équations réciproques* celles dont on reproduit toutes les racines dans un ordre différent, en divisant successivement l'unité par

chacune d'elles; c'est-à-dire que si α est une racine quelconque de l'équation considérée, cette équation admettra aussi la racine $\frac{1}{\alpha}$.

Cherchons à quels signes on peut reconnaître les équations réciproques. Considérons d'abord une équation de degré *impair* telle que

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

Changeons x en $\frac{1}{x}$. La transformée sera

$$x^5 + \frac{D}{E}x^4 + \frac{C}{E}x^3 + \frac{B}{E}x^2 + \frac{A}{E}x + \frac{1}{E} = 0.$$

Si l'équation proposée est réciproque, la transformée en $\frac{1}{x}$ doit la reproduire identiquement, ce qui entraîne les relations

$$\frac{D}{E} = A, \quad \frac{C}{E} = B, \quad \frac{B}{E} = C, \quad \frac{A}{E} = D, \quad \frac{1}{E} = E.$$

On en déduit

$$E^2 = 1 \quad \text{ou} \quad E = \pm 1,$$

et, par suite,

$$D = \pm A, \quad C = \pm B.$$

Donc, *pour qu'une équation de degré impair soit réciproque, il faut et il suffit que les coefficients des termes à égale distance des extrêmes soient égaux et de même signe ou égaux et de signes contraires.*

Considérons maintenant une équation de degré *pair* telle que

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Si l'on change x en $\frac{1}{x}$, on a pour transformée

$$x^4 + \frac{C}{D}x^3 + \frac{B}{D}x^2 + \frac{A}{D}x + \frac{1}{D} = 0.$$

En identifiant les deux équations, on obtient les relations

$$\frac{C}{D} = A, \quad \frac{B}{D} = B, \quad \frac{A}{D} = C, \quad \frac{1}{D} = D.$$

On en déduit

$$D^2 = 1 \quad \text{ou} \quad D = \pm 1.$$

Si l'on prend $D = +1$, il vient

$$C = A, \quad B = B;$$

si l'on prend $D = -1$, il vient

$$C = -A, \quad B = -B \quad \text{ou} \quad B = 0.$$

Ainsi, *pour qu'une équation de degré pair soit réciproque, il faut et il suffit que les coefficients à égale distance des extrêmes soient égaux et de même signe, ou bien, le terme du milieu manquant, égaux et de signes contraires.*

Étant donnée une équation réciproque de la forme

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0,$$

on peut l'écrire comme il suit :

$$(x^5 + 1) + Ax(x^3 + 1) + Bx^2(x + 1) = 0.$$

En supprimant le facteur $x + 1$ correspondant à la racine -1, cette équation devient

$$\begin{array}{r|r|r|l} x^4 - 1 & x^3 + 1 & x^2 - 1 & x + 1 = 0; \\ +A & -A & +A & \\ & +B & & \end{array}$$

c'est-à-dire qu'elle est encore réciproque.

Si l'on a l'équation réciproque

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 - Bx^2 - Ax - 1 = 0,$$

on peut l'écrire

$$(x^5 - 1) + Ax(x^3 - 1) + Bx^2(x - 1) = 0.$$

En supprimant le facteur $x - 1$ correspondant à la racine 1, on trouve

$$\begin{array}{r|r|r|l} x^4 + 1 & x^3 + 1 & x^2 + 1 & x + 1 = 0, \\ +A & +A & +A & \\ & +B & & \end{array}$$

équation réciproque.

Enfin, si l'équation réciproque proposée est

$$x^4 + Ax^3 - Ax - 1 = 0,$$

on peut l'écrire sous la forme

$$(x^4 - 1) + Ax(x^2 - 1) = 0.$$

Supprimant les facteurs $x - 1$ et $x + 1$, dont le produit $x^2 - 1$ correspond aux racines 1 et -1, il viendra

$$x^2 + Ax + 1 = 0,$$

équation réciproque.

Ainsi, *par la suppression des racines égales à l'unité, on peut ramener toutes les équations réciproques à la même forme : sous cette forme, elles sont de degré pair et ont leurs coefficients à égale distance des extrêmes égaux et de même signe.*

Prenons donc l'équation générale

$$x^{2n} + Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} + \ldots + Bx^2 + Ax + 1 = 0.$$

Cette équation étant réciproque, ses racines se distribueront par couples, tels que α et $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ et $\frac{1}{\beta}$, γ et $\frac{1}{\gamma}$, ... *On pourra donc ramener sa résolution à celle d'une équation de degré deux fois moindre, en posant*

$$x + \frac{1}{x} = z;$$

car une seule valeur de z correspondra évidemment aux deux racines réciproques qui composent chaque couple.

Il s'agit maintenant d'éliminer x entre l'équation proposée et la relation auxiliaire qu'on vient d'écrire. Pour le faire simplement, on remarque que cette équation peut se mettre sous la forme

$$x^n + \frac{1}{x^n} + A\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + B\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \ldots = 0,$$

en divisant par x^n et en rapprochant les termes également distants des extrêmes. La question est ainsi ramenée à exprimer en fonction de z chacun des binômes

$$x^n + \frac{1}{x^n}, \quad x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}, \quad x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}, \ldots.$$

Or on a

$$\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{p+1} + \frac{1}{x^{p+1}}\right) + \left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}\right).$$

On en déduit, en remplaçant le facteur $x + \frac{1}{x}$ par z,

$$x^{p+1} + \frac{1}{x^{p+1}} = \left(x^p + \frac{1}{x^p}\right)z - \left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}\right).$$

Cette formule résout la question, puisqu'elle permet d'exprimer la valeur de chaque binôme à l'aide des valeurs des deux précédents. On a successivement, en faisant $p = 1, 2, 3, 4, \ldots$,

$$x + \frac{1}{x} = z, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = z^4 - 4z^2 + 2, \ldots.$$

Une fois les racines de l'équation en z déterminées, les valeurs de x seront données par la relation

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

ou par la formule

$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2}.$$

NOTE IV.

EMPLOI DE LA RÈGLE A CALCUL EN GÉOMÉTRIE ET EN TRIGONOMÉTRIE.

Nous avons donné (t. I, *Note IV*) la théorie générale de *la règle à calcul*. Il nous reste à montrer l'usage qu'on en peut faire pour abréger, au point de vue pratique et lorsqu'une très-grande approximation n'est pas nécessaire, les calculs géométriques ou trigonométriques.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

Si l'on désigne par a, b, c, les dimensions d'un parallélipipède rectangle et par D la densité de la substance, le poids du corps considéré sera représenté par le produit

$$abc\mathrm{D} \quad \text{ou} \quad \frac{abc}{\frac{1}{\mathrm{D}}}.$$

Les tables inscrites au revers de la règle font connaître D et $\frac{1}{\mathrm{D}}$ pour les matières les plus usuelles. Ces valeurs sont inscrites dans les deux colonnes qui suivent la désignation des substances.

S'il s'agit d'un cylindre ayant d pour diamètre de sa base et h pour hauteur, son poids sera exprimé par la formule

$$\frac{1}{4}\pi d^2 h\mathrm{D} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 h}{\frac{4}{\pi\mathrm{D}}}.$$

La colonne intitulée *Cyl.* fait connaître les valeurs de $\frac{4}{\pi\mathrm{D}}$ pour les substances considérées.

Enfin, pour une sphère ayant d pour diamètre, le poids sera

$$\frac{\pi d^3}{6}\mathrm{D} \quad \text{ou} \quad \frac{d^3}{\frac{6}{\pi\mathrm{D}}}$$

La colonne intitulée *Sph.* fait connaître les valeurs de $\frac{6}{\pi\mathrm{D}}$.

La surface d'un cercle est $\frac{\pi d^2}{4}$ en fonction de son diamètre ou

$$\frac{d^2}{\frac{4}{\pi}} = \frac{d^2}{1,273}.$$

Le volume d'un cylindre sera alors exprimé par

$$\frac{d^2 h}{1,273}.$$

De même, le volume d'une sphère égal à $\frac{\pi d^3}{6}$ sera égal à

$$\frac{d^3}{\frac{6}{\pi}} = \frac{d^3}{1,91}.$$

Si l'on connaît la circonférence C d'un grand cercle, on a pour le volume de la sphère

$$\frac{\mathrm{C}^2 d}{6\pi} = \frac{\mathrm{C}^3}{6\pi^2} = \frac{\mathrm{C}^3}{59,22}.$$

Les nombres indiqués, nombres inscrits sur la règle, permettent d'arriver aux résultats cherchés à l'aide d'un seul mouvement de la réglette.



Supposons, par exemple, qu'on veuille calculer le volume d'un cylindre en employant la formule $\frac{d^2 h}{1,273}$. On n'aura qu'à amener le diviseur 1,273 lu sur la réglette au-dessus du nombre d lu sur l'échelle inférieure de la règle, et il est évident que le volume correspondra, sur l'échelle supérieure, au nombre h lu sur la réglette.

S'il s'agit d'un poids, c'est le diviseur 1,273 qui variera.

Pour une sphère, le procédé sera le même, en remplaçant le facteur h par un facteur d.

APPLICATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

Le revers de la réglette présente, outre l'échelle des logarithmes, deux échelles, l'une au milieu, l'autre qui correspond au bord supérieur de la réglette. Ces échelles peuvent remplacer une table de *sinus naturels* s'étendant de 30′ à 90° et une table de *tangentes naturelles* s'étendant de 30′ à 45°.

L'échelle des sinus est l'échelle supérieure du revers de la réglette. Cette échelle est divisée en parties proportionnelles aux logarithmes des sinus, de sorte qu'elle est identique en longueur à l'échelle supérieure de la règle. Quant à la graduation, elle donne les arcs

de 10′ en 10′,	depuis l'arc de	40′	jusqu'à celui de	10°;
de 20′ en 20′,	»	10°	»	20°;
de 30′ en 30′,	»	20°	»	30°;
de degré en degré,	»	30°	»	60°;
de 2° en 2°,	»	60°	»	70°.

Les trois dernières divisions correspondent aux arcs de 75°, 80°, 90°.

L'échelle supérieure de la règle donne les logarithmes des nombres de 1 à 100 ou de 0,01 à 1. L'arc qui a pour sinus naturel 0,01 est l'arc de 34′ environ. Cet arc qui a 0 pour partie décimale de son log sin, répond au commencement de l'échelle.

Supposons qu'on demande le sinus de 12°. On fera concorder toutes les extrémités de droite des échelles de la règle et de la réglette retournée. A partir de la division marquée 10 sur l'échelle supérieure de la réglette, on comptera six divisions ($6 \times 20' = 2°$), et on lira au-dessus de la dernière, sur l'échelle supérieure de la règle, 0,208, en remarquant que, lorsque le sinus demandé tombe dans la seconde partie de l'échelle supérieure de la règle, le premier chiffre significatif exprime des dixièmes. Ce premier chiffre est un chiffre de centièmes, lorsque le sinus tombe dans la première partie de l'échelle. On trouve dans la table des sinus naturels $\sin 12° = 0,2079$.

Si l'on demande l'arc correspondant à un sinus donné, on lit le sinus sur l'échelle supérieure de la règle, et le nombre de degrés cherché lui correspond sur l'échelle supérieure de la réglette.

On peut, si cela semble plus commode, ne pas retourner la réglette, la laisser dans sa rainure. On fait alors coïncider l'extrémité de l'arc lu au revers de la réglette avec l'extrémité de droite de la règle, et, au-dessous de la dernière division de la règle, on lit sur la face de la réglette le sinus cherché.

Si l'on demande, au contraire, l'arc correspondant à un sinus donné, il

faut amener l'extrémité de ce sinus lu sur la face de la réglette au-dessous de la dernière division de la règle; l'arc, exprimé en degrés, se lira alors sur le revers de la réglette et au-dessous de l'extrémité de droite de la règle.

L'échelle des tangentes est l'échelle placée au milieu du revers de la réglette. Cette échelle est divisée en parties proportionnelles aux logarithmes des tangentes, et les procédés à appliquer pour s'en servir sont identiques à ceux qu'on vient d'indiquer relativement aux sinus.

Supposons qu'on demande l'arc dont la tangente est o,6249. La règle, comme les tables, donne 32°.

La tangente d'un angle exprime aussi *la pente par mètre* d'une certaine ligne droite par rapport à l'horizon. L'échelle des tangentes permet donc de réduire immédiatement les pentes par mètre en degrés, et réciproquement.

Les ingénieurs évaluent les inclinaisons par rapport à l'horizon en degrés ou en centimètres par mètre. Dans le génie, la pente est indiquée par une fraction dont le numérateur est 1, et le dénominateur la base du talus pour une hauteur égale à 1. La tangente égale à 0,1 correspond à un angle de 5° 42' environ sur l'horizon, ou à une pente de 10 centimètres par mètre, ou à une pente de $\frac{1}{10}$; c'est-à-dire que, pour s'élever sur le talus d'une hauteur égale à 1^{M}, il faut parcourir 10^{M} en projection horizontale.

TABLE des arcs et de leurs rapports trigonométriques, exprimés en parties décimales du rayon 1.

Arc.	Degrés.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.		
0	0°	0	1,0000	0	∞	90	1,5708
0,0175	1	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	89	1,5533
0,0349	2	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	88	1,5359
0,0524	3	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811	87	1,5184
0,0698	4	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	86	1,5010
0,0873	5	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	85	1,4835
0,1047	6	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84	1,4661
0,1222	7	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	83	1,4486
0,1396	8	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	82	1,4312
0,1571	9	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81	1,4137
0,1745	10	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80	1,3963
0,1920	11	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79	1,3788
0,2094	12	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78	1,3614
0,2269	13	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	77	1,3439
0,2443	14	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76	1,3265
0,2618	15	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75	1,3090
0,2793	16	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74	1,2915
0,2967	17	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	73	1,2741
0,3142	18	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72	1,2566
0,3316	19	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	71	1,2392
0,3491	20	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70	1,2217
0,3665	21	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	69	1,2043
0,3840	22	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68	1,1868
0,4014	23	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	67	1,1694
0,4189	24	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66	1,1519
0,4363	25	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65	1,1345
0,4538	26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	64	1,1170
0,4712	27	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63	1,0996
0,4887	28	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62	1,0821
0,5061	29	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61	1,0647
0,5236	30	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60	1,0472
0,5411	31	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59	1,0297
0,5585	32	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58	1,0123
0,5760	33	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57	0,9948
0,5934	34	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	56	0,9774
0,6109	35	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55	0,9599
0,6283	36	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54	0,9425
0,6458	37	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53	0,9250
0,6632	38	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52	0,9076
0,6807	39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51	0,8901
0,6981	40	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50	0,8727
0,7156	41	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	49	0,8552
0,7330	42	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48	0,8378
0,7505	43	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	47	0,8203
0,7679	44	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46	0,8029
0,7854	45	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	45°	0,7854
		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Degrés.	Arc.

FIN DU SECOND VOLUME.

